修士学位論文要約（平成29年３月）

# グラフの配送コスト最小化問題に関する研究

千葉 詩音

指導教員: 周 暁　　学位論文指導教員: 鈴木 顕

# The Delivery Cost Minimization Problem on Graphs

Shion CHIBA

Supervisor: Xiao ZHOU　　Research Advisor: Akira SUZUKI

Consider a graph $G$ such that each vertex in $G$ is either a supply vertex or a demand vertex, and each demand vertex has a nonnegative integer weight. Then, we wish to partition $G$ into subtrees by deleting some edges from $G$ so that each subtree contains exactly one supply vertex; the subtree represents a delivery route from the supply vertex to each demand vertex. In the delivery cost minimization problem, we are given such a graph $G$ together with a cost function which can be calculated by the flows on edges, and asked to find a partition of $G$ with the minimum delivery cost. In this thesis, we study the complexity of this problem and its variants from the viewpoint of cost functions.

## 1. はじめに

ネットワーク上のデータ配信や電力網の配電融通，災害時の避難経路策定など，経路を決める問題は様々な場面に現れる．実行可能な経路は複数存在するが，その経路の選び方によってコストが変化するような状況を考えよう．例えば，データ配信であれば占有帯域，配電融通であれば電力損失などがコストとして挙げられる．このような状況では，実行可能な経路の中でも，できるだけコストが小さくなる経路を見つけたい．本論文では，このような問題をグラフにおける**配送コスト最小化問題**として定式化し，その計算困難性を解析した．

本論文で扱うグラフ $G = (V, E)$ の点集合 $V$ は，**供給点**の集合 $S \subseteq V$ と**需要点**の集合 $D = V \setminus S$ に分割される．このとき，$G$ の**配送経路** $\mathcal{R}$ とは，$G$ からいくつかの辺を削除して得られる $|S|$ 個の部分木 $T_1, T_2, \ldots, T_{|S|}$ の集合である．ただし，各 $i \in \{1, 2, \ldots, |S|\}$ に対し，$T_i$ はちょうど１個の供給点を含まなければならない．例えば，図 1(a) のグラフ $G$ に対して，図 1(b) の全域森は $G$ の配送経路の一例である．以降では，各部分木 $T_i$ に含まれる供給点を $s_i$，$T_i$ に含まれる全ての需要点の集合を $D_i$，$T_i$ に含まれる全ての辺の集合を $E_i$ と書く．

次に，グラフの配送経路に対し，コストを定義する．グラフ $G = (V, E)$ の各辺は辺重み $r\colon E \to \mathbb{Z}^+$ をもち，各需要点は需要量 $d\colon D \to \mathbb{Z}^+$ をもつとする．ここで，$\mathbb{Z}^+$ は，全ての非負整数の集合を表す．$G$ の配送経路には閉路がないことから，各部分木 $T_i$ において，供給点 $s_i$ から各需要点 $v \in D_i$ への経路は一意に定まる．各需要点の需要量を満たすように，供給点 $s_i$ からその部分木に含まれる全ての需要点 $v \in D_i$ にフローを流す．このとき，配送経路 $\mathcal{R}$ における**辺 $e$ のフロー** $f(\mathcal{R}, e)$ とは，$e$ を流れるフローの合計値と定義する．**辺 $e$ のコスト** $c(\mathcal{R}, e)$ は，その辺のフロー $f(\mathcal{R}, e)$ と辺重み $r(e)$ から計算することができる関数として与えられる．このとき，**配送経路 $\mathcal{R}$ のコスト**とは，$\sum_{i=1}^{|S|} \sum_{e \in E_i} c(\mathcal{R}, e)$ と定義される．

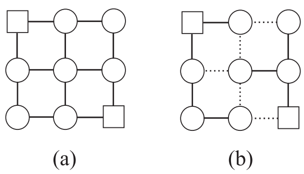

図 1．(a) 入力グラフと (b) 配送経路の例．ここで，四角は供給点を表し，丸は需要点を表している．また，削除されたグラフの辺は，点線で描かれている．

本論文では，各辺のコストが一次関数である場合と二次関数である場合を考えた．すなわち，グラフの各辺 $e$ に対し，一次関数では $c(\mathcal{R}, e) = r(e) \times f(\mathcal{R}, e)$ であり，二次関数では $c(\mathcal{R}, e) = r(e) \times f(\mathcal{R}, e)^2$ である．例えば，図 2 の配送経路 $\mathcal{R}$ のコストを計算すると，各辺のコストが一次関数の場合は

$$3 \times 8 + 2 \times 6 + 1 \times (6 + 7) = 49$$

となり，各辺のコストが二次関数の場合は

$$3 \times 8^2 + 2 \times 6^2 + 1 \times (6 + 7)^2 = 433$$

となる．

配送コスト最小化問題では，グラフ $G$ が与えられたとき，コストが最小となる $G$ の配送経路 $\mathcal{R}$ を求めたい．以降では，各辺のコストが一次関数の配送コスト最小化問題を**一次配送コスト最小化問題**と呼び，各辺のコストが二次関数の配送コスト最小化問題を**二次配送コスト最小化問題**と呼ぶ．

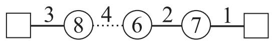


図 2．需要量と辺重みも記載した配送経路の一例．ここで，需要量は需要点の中に，辺重みは辺の側に記載している．

二次配送コスト最小化問題に対しては，指数時間アルゴリズムが与えられており，その性能が計算機実験で評価されている[3]．しかし，二次配送コスト最小化問題が多項式時間で解けるかどうかは知られていなかった．

本論文では，配送コスト最小化問題の計算困難性を解析した．まず本論文では，二次配送コスト最小化問題が NP 困難であることを証明した．すなわち，$P \neq NP$ の仮定下では，二次配送コスト最小化問題を解く多項式時間アルゴリズムは存在しないことを証明した．さらに本論文では，一次配送コスト最小化問題に対する三つの変種問題を考え，それらが NP 困難であることを示した．

## 2. 本論文の結果

本節では配送コスト最小化問題の計算困難性に関する結果を与える．紙面の都合上，それぞれの定理に対する証明は省略するが，略証として多項式時間帰着を構成した帰着元の問題を記す．

### 2.1 二次配送コスト最小化問題

二次配送コスト最小化問題に対し，以下の定理を与える．

**定理 1** 二次配送コスト最小化問題は，一般のグラフに対し強 NP 困難である．また，平面グラフに制限しても NP 困難である．

**略証．** 一般のグラフに対する強 NP 困難性は，3-Partition 問題[1] からの多項式時間帰着を与えることで示した．また，平面グラフの NP 困難性は，Partition 問題[1] からの多項式時間帰着を与えた．■

### 2.2 一次配送コスト最小化問題

一次配送コスト最小化問題に対する三つの変種問題を考え，それぞれに対する計算困難性を示す．

1 つ目は，**供給量付き一次配送コスト最小化問題**である．この問題では，各供給点に供給量が入力として与えられる．グラフの配送経路に含まれる各木 $T_i$ に対し，$T_i$ に含まれる需要点の需要量の総和が供給点 $s_i$ の供給量以下でなければならないという条件を持つ．

**定理 2** 供給量付き一次配送コスト最小化問題は，一般のグラフに対し強 NP 困難である．また，平面グラフに制限しても NP 困難である．

**略証．** 一般のグラフに対する強 NP 困難性は，3-Partition 問題[1] からの多項式時間帰着を与えることで示した．また，平面グラフの NP 困難性は，Partition 問題[1] からの多項式時間帰着を与えた．■

2 つ目は，**辺容量付き一次配送コスト最小化問題**である．この問題では，各辺に辺容量も入力として与えられる．グラフの配送経路に含まれる各木 $T_i$ において，各辺のフローがその辺の辺容量以下でなければならないという条件を持つ．この変種問題に対する計算困難性は，供給量付き一次配送コスト最小化問題に対する定理 2 の証明を利用することで，下記の通り示せる．

**系 1** 辺容量付き一次配送コスト最小化問題は，一般のグラフに対し強 NP 困難である．また，平面グラフに制限しても NP 困難である．

3 つ目は，**削除不可能な辺集合付き一次配送コスト最小化問題**である．この問題では，入力として削除不可能な辺集合が与えられ，この辺集合に含まれる辺は必ず配送経路に含まれなくてはならないという条件を持つ．

**定理 3** 削除不可能な辺集合付き一次配送コスト最小化問題は，平面グラフに対して NP 困難である．

**略証．** Strongly planar 3SAT 問題[2] からの多項式時間帰着を与えることで示した．■

## 3. まとめ

本論文では，配送コスト最小化問題の計算困難性を解析した．特に，指数時間アルゴリズムが知られていたものの[3]，その計算困難性が未解明であった二次配送コスト最小化問題に対しても NP 困難性を証明した．また，供給量や辺容量，削除不可能な辺集合も入力として与えられる一次配送コスト最小化問題の三つの変種問題に対して，それぞれ計算困難性を示した．

## 文献

1) M.R. Garey, D.S. Johnson: Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W.H. Freeman, New York, 1979.
2) L. Wu: On strongly planar 3SAT. Journal of Combinatorial Optimization, Vol. 32, Issue 1, pp. 293–298, 2016.
3) 安田宜仁, 湊真一, 竹延祐二, 林泰弘: 配電損失最小化問題のスケーラブルな厳密解法. 平成 28 年電気学会全国大会論文集, 6-156, Vol. 6, pp. 250–251, 2016.