氏名	大澤　弘基（おおさわ　ひろき）
学位の種類	博　士（情報科学）
学位記番号	情　博　第　７０６号
学位授与年月日	令和　２年　３月２５日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科、専攻	東北大学大学院情報科学研究科（博士課程）システム情報科学専攻
学位論文題目	Coloring Reconfiguration Problems and Their Generalizations （彩色遷移問題とその一般化に関する研究）
論文審査委員	（主査）東北大学教　授　周　暁 東北大学教　授　静谷　啓樹　　東北大学教　授　篠原　歩 東北大学准教授　伊藤　健洋　　東北大学准教授　鈴木　顕

論 文 内 容 の 要 旨

第１章　序論

本論文では，理論計算機科学分野における（組合せ）遷移問題と呼ばれる問題を扱う．理論計算機科学の分野では，系に対して与えられた条件を満たすような解を少なくとも一つ見つけるような探索問題が古くから研究されてきた．代表的な探索問題の一つが本論文でも扱う彩色問題であり，これはグラフの頂点に対して色数等の制約を満たす色割当が存在するか判定する問題である．これに対して遷移問題は条件を満たす複数の解同士に隣接関係を定義した上で，その隣接関係から誘導されるグラフ構造を解析する問題である.2000 年代に遷移問題の枠組みが提唱されて以来，様々な探索問題に関してその解空間を状態空間とした遷移問題が盛んに研究されている．遷移問題の分野で最もよく研究されているものが到達可能性問題であり，これは解を頂点とするグラフ上での異なる２つの解の到達可能性を判定する問題である．

本論文では代表的な遷移問題である彩色遷移問題の到達可能性問題について扱う．この問題はグラフの彩色を状態集合とする遷移問題であり，2 つの彩色がグラフ上の一つの頂点のみについて色が異なる場合を 2 つの状態間の隣接関係として定義している．彩色遷移問題についてはグラフクラス，彩色の一般化，色数などといった様々な観点から研究が進められており，特に色数に関しては色数 3 以下と色数 4 以上の間に計算容易性と計算困難性の違いが存在することが知られている．

本論文では彩色遷移問題に対して解間の隣接関係に基づいた一般化を考え，それによりこれまでに解析されていなかった遷移問題の変更規則の構造の観点から彩色遷移問題の計算複雑性を解析する．また，彩色遷移問題のグラフクラスを制限した問題である辺彩色遷移問題についても扱う．本論文は全 7 章で構成され，その成果は大きく分けて 3 種類の問題に基づいている．

第２章　準備

本章では，本論文中で使用されるグラフ理論及び理論計算機科学の基礎的な用語を定義するとともに，本論文で扱う問題の形式的定義を与える．本論文では recolorability グラフと呼ばれる色集合を頂点集合とするグラフを導入することで，彩色遷移問題の変更規則を一般化する．与えられた recolorability グラフ R の下で，2 つの彩色の隣接関係は 2 つの彩色が一つの頂点のみについて色が異なることに加えて，異なっている 2 つの色の間に recolorability グラフ上で辺が存在しなければならないという制約を満たす必要がある．ある特定の recolorability グラフが定まるとそれに対応して彩色遷移問題の変更規則が一つ定まるものとなっている．

第３章　計算困難性

本章ではいくつかの recolorability グラフの集合に対して，彩色遷移問題が計算困難となることを示した．まず，準備として，ある recolorability グラフ R’を部分グラフとして持つ recolorability グラフ R について，R’の下での彩色遷移問題から R の下での彩色遷移問題への

多項式時間帰着が可能であることを示している．このことから，ある特定の recolorability グラフに対して彩色遷移問題の計算困難性を示せば，同様の困難性がその recolorability グラフを部分グラフとして含む任意の recolorability グラフに対して成り立つこととなる．

次に本章では，recolorability グラフが最大次数 4 以上の場合，もしくは recolorability グラフがサイクルを 2 つ以上持つ場合に問題が PSPACE 完全となることを示している．これは既に知られている色数 4 以上の場合の彩色遷移問題の PSPACE 完全性を一般化する結果となっている．

本章ではさらに，いくつかの特定の recolorability グラフについて問題の計算困難性を示した．

第 4 章　多項式時間アルゴリズム

本章ではまず，recolorability グラフがパス，もしくはサイクルの場合に対して彩色遷移問題が線形時間で判定可能であることを示した．さらに，この場合については 2 つの状態間の最短の変更系列の長さも線形時間で求まることを示している．これらの結果は，既に知られている色数 3 の場合の彩色遷移問題の線形時間アルゴリズム，及び最短の変更系列の長さを求めるアルゴリズムを一般化するものとなっている．

本章ではまた，彩色遷移問題が claw と呼ばれる特定のグラフである場合について彩色遷移問題が多項式時間判定可能であることを示している．Recolorability グラフが k+1 頂点の k スターである彩色遷移問題は本質的に色数 k の彩色遷移問題と等価であり，recolorability グラフが最大次数 4 以上の場合の PSPACE 完全性の結果と recolorability グラフが claw のときの多項式時間アルゴリズムはこの性質に基づいている．

本章では前章の結果と合わせて，recolorability グラフの最大次数に関して計算容易性と計算困難性の違いが存在することを示している．すなわち，recolorability グラフが最大次数 2 以下の場合については彩色遷移問題が線形時間判定可能となるのに対し，recolorability グラフが最大次数 3 以上の場合には彩色遷移問題が PSPACE 完全となる場合が存在することを示している．

第 5 章　辺彩色遷移問題

本章では，前章までに解析した recolorability グラフを導入した彩色遷移問題に対してさらなる一般化を加え，状態の変更が非可逆的となる彩色遷移問題について計算複雑性の解析を行っている．ここでは recolorability グラフは有向グラフの形で与えられる．この有向 recolorability グラフの下で，頂点の色は変更元の色から変更先の色へ有向 recolorability グラフ上で有向辺が存在する場合のみ，色を変更することができる．本章ではまず recolorability グラフが木の各辺に単方向の向きつけを与えたある特定のグラフである場合に対して彩色遷移問題の NP 完全性を示している．また，この結果の系として，非有向の recolorability グラフ上の彩色遷移問題については最短の変更系列を求める問題が recolorability グラフが木の場合であっても NP 困難となることを示している．次に recolorability グラフをさらに制限した有向木とした場合については問題が多項式時間判定可能となることを示している．

本章の内容は，非可逆的な変更規則を与えた彩色遷移問題については，変更規則の構造が比較的単純な場合でも計算困難であることを示し，また計算容易性の結果との比較により，計算複雑性の違いに関して示唆を与えるものとなっている．

第 6 章　結論

本章では，辺彩色遷移問題及びリスト辺彩色遷移問題を対象として PSPACE 完全性の証明を行っている．辺彩色遷移問題及びリスト辺彩色遷移問題はそれぞれグラフの辺彩色とリスト辺彩色を状態集合とする遷移問題であり，グラフのライングラフを取ることでグラフクラスがライングラフに制限された彩色遷移問題としてみなすこともできる．このうち辺彩色遷移問題についてはこれまで未解決問題であった計算困難性の証明を与え，リスト辺彩色遷移問題については色数 3 以下と色数 4 以上で計算容易性と計算困難性の違いが存在することを示している．

第 7 章

本論文では彩色遷移問題に対し，変更規則の一般化，非可逆的変更規則の一般化，辺彩色遷移問題の大きく分けて 3 つの観点から体系的な解析を行った．各章の主な貢献は以下の通りである．

第 3 章，第 4 章では recolorability グラフの構造に基づいて計算複雑性の解析を行い，

recolorability グラフのグラフクラスに関して既存研究の結果を一般化する形で網羅的な解析を行った．第 5 章ではこれまで彩色遷移問題では研究されていなかった非可逆的な変更規則を導入し，変更規則が比較的単純な場合であっても計算困難となることを示した．第 6 章では辺彩色遷移問題とリスト辺彩色遷移問題について PSPACE 完全性を示した．

以上要するに，本論文は彩色遷移問題に対する新たな視点からの解析を可能とする一般化を与えるだけでなく，既存研究の研究を補完，一般化する形で体系的な解析を与えており，遷移問題の理論研究の発展に大きく寄与するものである．

論文審査結果の要旨

組合せ遷移とは，従来研究されてきた組合せ問題とは異なり，解同士の関係性に着目した新しい枠組みである．複数の状態間の動的な状態遷移が定義されたシステムに対して，その状態間の関係性を解析することができ，常時稼働型システム等，実社会への応用が期待されている．

本論文では組合せ遷移の分野における代表的な問題である彩色遷移問題に対して，状態遷移規則の一般化の観点から計算複雑性の解析を行った．本論文は全 7 章から構成される．

第 1 章は序論である．

第 2 章ではグラフ理論とアルゴリズム理論の基本的な概念を導入し，また本論文で扱う問題及びその解析のための基礎的な定義を行っている．

第 3 章，第 4 章では，状態遷移規則を recolorability グラフと呼ぶ無向グラフの形式で表現した彩色遷移問題について, recolorability グラフの構造に基づいて彩色遷移問題の計算複雑性の解析を行っている．第 3 章ではいくつかの種類の recolorability グラフについて彩色遷移問題の計算困難性と与えている．第 4 章では recolorability グラフがサイクルである場合について多項式時間アルゴリズムを与えるとともに，最短遷移系列の観点からも解析を行っている．ここで与えた結果は彩色遷移問題の従来研究における色数に関する計算複雑性の結果を一般化するものとなっている．これらは，既存の組合せ遷移に関する論文ではあまり扱われていなかった，解同士の関係性に着目した研究であり，彩色遷移問題の困難性の要因に迫る重要な結果である．

第 5 章では recolorability グラフを有向グラフに一般化し，彩色遷移問題に対して非可逆的な状態遷移規則を定義した問題を解析している．この結果として recolorability グラフが木であり，しかも木の各辺に単方向の向きつけを与えた比較的単純な構造の場合であっても彩色遷移問題が計算困難となることを示している．前章の内容をさらに一般化した内容となっており，高く評価できる．

第 6 章では彩色遷移問題の特殊例である，辺彩色遷移問題，及びその一般化であるリスト辺彩色遷移問題の計算困難性を証明している．辺彩色遷移問題の計算困難性を世界で初めて示したものであり，2012 年に提示された未解決問題を解決している．また，リスト辺彩色遷移問題については色数に関して厳密な計算複雑性の境界を与えており，高く評価できる．

第 7 章は結論である．

以上，本論文は彩色遷移問題の計算複雑性に対して複数の観点から既存研究を一般化し，多数の結果を与えている．特に，遷移問題に対して，状態遷移規則の一般化の観点から行う研究はこれまであまり例がなく，組合せ遷移の理論研究やシステム情報科学の発展に寄与するところが少なくない．

よって，本論文は博士（情報科学）の学位論文として合格と認める．