

小学校算数「場合の数」に関する児童のインフォーマルな 知識と解法

—誤りやすさを回避するために—

大 家 まゆみ*

本研究の目的は、小学校算数科「場合の数」を学習する前に、児童が持っているインフォーマルな知識と解法を探究し、誤りやすい解法を回避するためにはどうすればよいかを検討することであった。ここでは「場合の数」の中から「並べ方」に焦点を当て、この単元を学習する前の児童に対し、3つの数の並べ方を問う課題を出し、その解答を質的に検討した。調査対象者は公立小学校に通う6年生35名(男子22名、女子13名)であった。回答パターンを分析した結果、ペアを作る(3種類)・順々に回す(2種類)・最初を固定する(1種類)という3つの解法(計6種類)が見出された。さらに誤りやすい解法として、6種類ある3つの解法を複合して無造作に用いる場合に、思考操作に必要な論理法則を理解、発見することができないために、誤答に至りやすいこと、また正答した場合も非論理的で法則には則らない解法になることが明らかになった。

キーワード：小学校算数、場合の数、並べ方、小学6年

1. 問題

小学校の算数の目標は、平成20年告示小学校学習指導要領に於いて、「算数的活動を通して、数量や図形についての基礎的・基本的な知識及び技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てるとともに、算数的活動の楽しさや数理的な処理のよさに気づき、進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる。」と示されている。つまり児童が日常生活で起こる現象を考える上で、作業的活動や体験的活動など操作的な活動を通して、自らの力で抽象的な思考を生み出すことが重要であり、算数的活動を通して算数の目標が達成される(日本数学教育学会、2005)。

日常生活で起こりうる現象を扱う単元のうち、平成20年改訂の学習指導要領で再び小学校の算数で扱われるようになったのが「場合の数」である。この単元は平成元年改訂の学習指導要領では小学6年で扱っていたが、平成10年改訂の際に中学校の数学に移行した。そして平成20年度告示の折に再び小学校の算数で扱うこととなった。この「場合の数」は「D 数量関係」の中で「具体的な事柄について、起こり得る場合を順序よく整理して調べることができるようにする」ことを目標とする

*教育学研究科 博士課程後期

ものである。特に小学校の場合、児童が興味や関心を持ちやすいように、日ごろから児童が体験したり見聞きたりすることが多い問題を取り上げて、具体的な事実在即して落ちや重なりがないように分類、整理して、起こり得る全ての場合を考えられるようになることをねらいとしている（日本数学教育学会、2005）。この「場合の数」は①順列（ものごとの起こる順序や並べ方）と②組み合わせ（1つの集合から、いくつかの要素を取り出して組み合わせる方法）の2つから成り、表と樹形図を用いて場合の数を調べるように、教科書は①と②の順に構成されている。つまり、表や図を用いて解くという作業的、体験的で具体物を用いた操作的な活動を通して、一種の思考実験を行い、数理的な現象の法則を一般化して理解できるようにするための一連の過程を、教科書での学びを通して授業が支えることになる。

一方、道具的に図や表を用いて問題を解くための法則を理解し、解法を身につけるだけでは、真に法則を理解し、一般化できるだけの力がつくとはいえないだろう。ある現象の背後に法則があることに学習者自らが「気づく」ことが、小学校算数の目指す目標の1つである。この「気づき」という表現は、平成10年改訂の小学校算数科の学習指導要領に初めて取り入れられて以来、小学校算数科のみに見られ、興味深いことに、中学や高校の学習指導要領にはない言葉である。授業者が「場合の数」を教えるにあたって、教科書の最初にある発問を丁寧に扱い、児童がじっくりと考えて自ら問題の答えとその根底にある法則に気づくよう促す場合と、児童に発問する時間を十分に確保しないままに教科書通りに授業を進める場合では、児童が問題の法則に自ら気づく余裕や、学習後に得られる知識が変わってくると考えられる。

なぜならば、学習者1人1人は個性に応じて様々な理解の様相を示すにもかかわらず、授業のあり方、すなわち教科書通りに知識を伝達する授業者とその知識を受動的に体得する学習者という一方的な指導方法によって、児童の学習の成果が限定されることが予想される。子どもは本来、自ら「気づく」ことができる存在であり、単純に問題解決方略を身に付けて応用できるようにするにとどまることは、算数科教育が目指すところではないだろう。算数科の目標では「数理的な処理のよさに気づき、進んで生活に生かそうとする」発展的な考えが重視されるようになってきており、様々な問題が解けるようになって常にも新しいことにチャレンジする心、新しい解法に興味を抱きつづける動機づけが強調されてきている。

このように、授業者が教える以前に学習者が自ら気づき、内面に知識を構成し、表現していく構成主義的な視点に立つならば、子ども自身のインフォーマルな知識、すなわちある単元を学習する前に持っている問題の解き方に関する知識や技に注目することが重要になってくる。そこで本研究では、「場合の数」の単元学習前に子どもが持っている問題の解き方に関する知識を、どのように表現するのかについて検討することを目的とする。教科書では表や図を使った解き方については解説しているが、子どもが事前に持っている知識については記載がないため、授業者は自らの経験知や暗黙知によって推論しつつ、授業を展開していくのが常だろう。しかし、子どもが持つインフォーマルな知識には子どもの個性が表れており、そこには学習者が誤りやすい思考も同時に見ることができるだろう。

そこで本研究では、小学6年生を対象として、算数「場合の数」の中でも順列を学習する前の知識を問う調査を実施することとした。順列を取り上げたのは、子どもにとって身近に起こり得る現象を取り扱う単元であり、なじみやすい単元だからである。また「場合の数」は、平成20年改訂の学習指導要領から、6年で学習するように小学校算数科に再び組み込まれた単元であり、先行研究はほとんど見られないのが現状である。「場合の数」に関する児童の思考や理解を調査した手島(1984)は、小学1年から6年の児童1057名を対象に、4枚の数字カードを用いて4桁の数字を作る並べ方の問題についての解答を調査し、4桁の整数を構成する作業は3年生から可能であること、ただし落ちや重なりがないように考察できるのは4年生以降であることを明らかにした。手島は児童が4枚の数字カードを並べて4桁の数字を作る際に、「順々に回す」「先頭を固定する」「先頭から2桁を固定する」という3つの思考操作を行っている想定した。佐藤・椎名(2014)が、手島の調査で児童が行った思考操作の割合を算出したところ、「千の位を固定する」操作は41%、「千の位と百の位を固定する」操作は71%の児童が行っていた。

しかし80年代に行われた手島の研究以降、佐藤・椎名(2014)まで「場合の数」を扱った調査研究はほとんど見られない。これには平成10年の学習指導要領改訂の際に、この単元が中学2年に移行したことも影響しているだろう。その後、佐藤・椎名(2014)は小学1年から5年までを対象とし、3枚の数字カードから2枚を使って2桁の数をつくる課題によって、並べ方に関する児童の思考過程を検討した。その結果、3年生以上は約8割の正答率だった。佐藤・椎名は手島の調査で見出された児童の思考操作「順々に回す」「先頭を固定する」「先頭から2桁を固定する」に加え、「ペアを作る」思考操作を考案した。ペアを作るとは、一の位と十の位、あるいは千の位と百の位など隣り合う2つの位の数字を入れ替える操作を指す。佐藤・椎名によれば、手島の調査では「ペアを作る」思考操作は29%の児童が行っていた。

そこで本研究では、手島と佐藤・椎名の知見に基づいて、「順々に回す」「先頭を固定する」「先頭から2桁を固定する」「ペアを作る」の4つの思考操作が、まだ「場合の数」を学習していない6年生のインフォーマルな知識にどの程度の割合で見出されるかを検討する。

なお、「場合の数」には「並べ方」と「組み合わせ方」の2種類があるが、手島(1984)と佐藤・椎名(2014)の調査はいずれも「並べ方」のみを扱っている。本研究の実際の調査では、並べ方と合わせて組み合わせに関する問題1問も同時に実施したが、ここでは手島や佐藤・椎名の調査をもとにした発展的な検証を行うために、並べ方のみを扱う。本研究で明らかにしたい点は次の2点である。

- (1) 並べ方に関するインフォーマルな知識、解き方にはどのようなものがあるか。
- (2) 表や図を使わない場合、どのような誤りに陥りやすいか。

2. 方法

2-1. 対象者

東京都の公立小学校に通う6年生35名(男子22名、女子13名)。

2-2. 調査概要

単元「場合の数」の1時間目が始まる前の時間に、担任教師が事前テストを配布し、「これからこの問題を解いて下さい。」と児童に指示した。児童が回答した後、担任教師により事前テストが回収された。児童は「次の問題1に答えて下さい。」という教示文に従い、「問題1：並べ方」に解答した。解答に要した時間はおよそ5分であった。調査時期は2015年9月上旬であった。

2-3. 事前テスト課題

事前テスト課題はTable1の通りである。筆者が作成し、B4サイズ of 用紙に印刷した。なお、並べ方の問題以外に、問題2では組み合わせ方の問題を解いてもらった。ここでは問題1の並べ方の問題のみを分析の対象とする。

3. 結果と考察

3-1. 正答率と解答

問題1の正答率は平均値が6点満点で5.57、標準偏差は0.86であった。多くの児童が正答できたといえる。6点満点に満たなかった児童は35名中8名であり、6点満点だった児童の割合は77.14%と高かった。しかし正答率が高ければ十分なインフォーマルな知識を学習する前に獲得しているとは言えない。そこで以下では、見出された解答から児童のインフォーマルな知識と解法について探る

Table1 事前テスト問題（並べ方）

問題1 はるとさん、ゆうとさん、あおいさんの3人が、順番に教科書を音読します。音読する順番を決めるとき、どのように決めたらよいでしょうか。①から⑧の□の中に、3人の名前を順番に書いて下さい。思いっくだけ書いて下さい。



	最初	→	2番目	→	最後
①	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>
②	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>
③	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>
④	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>
⑤	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>
⑥	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>
⑦	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>
⑧	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>	→	<input type="text"/>

こととした。

3-2. 見出された解法：ペアを作る・順々に回す・最初を固定する

Table2に児童の解答方法を示す。なお、解法1から6までを組み合わせで解答した児童が多く見られたため、各解法の人数は延べ人数で示した。

Table2 問題1の解答方法 (n=35)

解法	解法1	解法2	解法3	解法4	解法5	解法6
解き方	ペアを作る 最後を固定する	順々に回す (逆)	順々に回す	最初を固定する	ペアを作る 最初と最後を入れ替える	ペアを作る 最初を固定する
延べ人数	13	11	9	7	6	5
割合	37.14	31.43	25.71	20.00	17.14	14.29

注) 割合の算出方法: 各解法の延べ人数 ÷ 35 × 100

最も多かった解法1は、「ペアを作る」解法である。すなわち最初と2番目を入れ替えてペアを作り、最後を固定する解法で、37.14%の児童がこの解法を用いた (Figure1)。

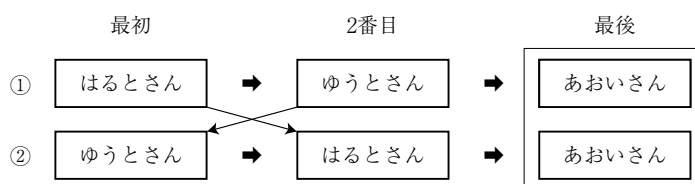


Figure1 最後を固定して、最初と2番目の人の順番を入れ替える

次に多かった解法2と解法3はいずれも「順々に回す」解法である。Figure2は最初の人を次のグループの最後に移動し、Figure3は最後の人を最初に移動する解法である。解法2 (31.43%) と解法3 (25.71%) を合わせると 57.14%の児童がこの解法を用いていた。

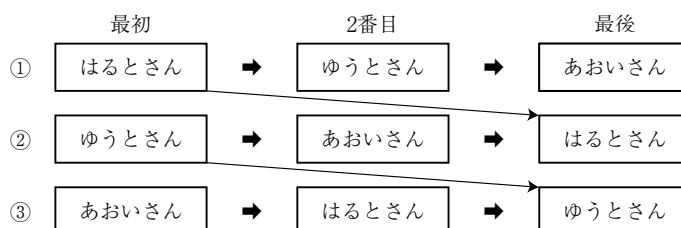


Figure2 同じグループの最初の人を次のグループの最後に移動する

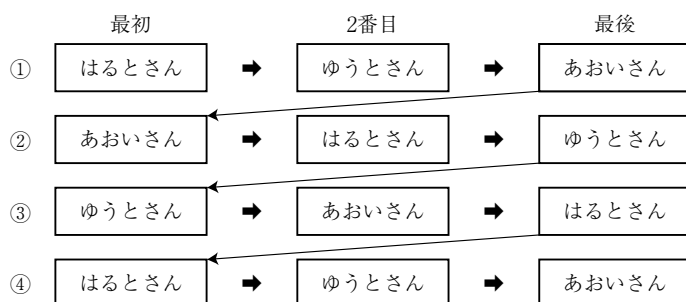


Figure3 同じグループの最後の人を次のグループの最初に移動する

解法4は「先頭を固定する」解法(手鳥, 1984)であり, この解法は樹形図を用いた解き方の導入となる。実際に解法4を用いた児童は20.00%に過ぎず, インフォーマルな知識しか持たない単元学習前の児童にとっては, 難しい解法といえるだろう。家庭学習や学習塾など, 学校以外の場ですでに学んでいる児童が用いている可能性もあり, 純粋に「学習前」とは言えないケースも含まれていると思われる。

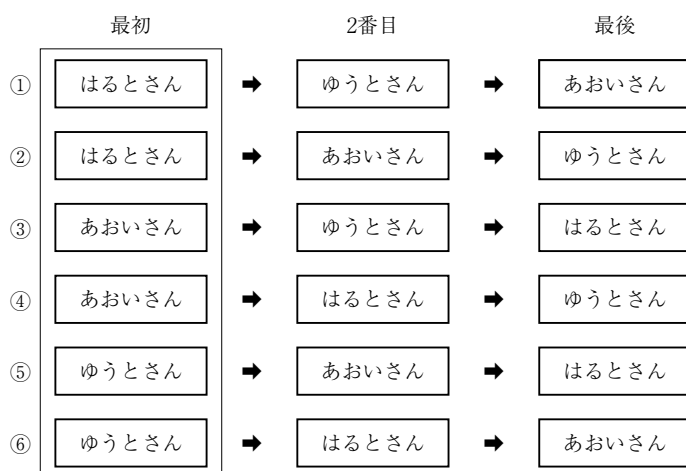


Figure4 全てのグループの最初の人を固定する

解法5は, 解法1と同様に「ペアを作る」解法であるが, 最初と最後の人を入れ替え, 2番目を固定する解法である。児童の17.14%がこの解き方を用いている。

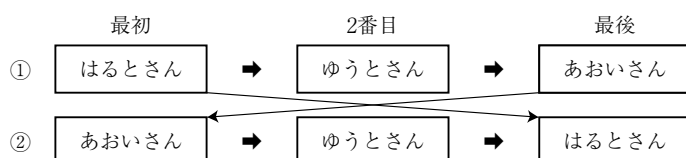


Figure5 同じグループの最初と最後の人の順番を入れ替える

解法6は、解法1, 5と同様に「ペアを作る」解法であり、最初を固定して2番目と最後の人の順番を入れ替える解法である。児童の14.29%がこの解き方を用いていた。

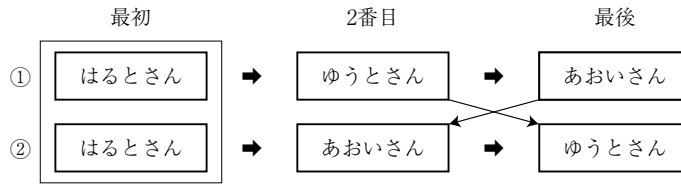


Figure6 最初の人を1人だけ固定して、2番目と最後の人の順番を入れ替える

3-3. 起こりやすい誤答:「ペアを作る」「順々に回す」「最初を固定する」を複合する場合

教科書では解法4の「最初を固定する」解法を導き出すために、児童に自ら問題を考えさせた上で、図や表を用いて解く方法を示している。しかし単元「場合の数」を学習する前の児童は、佐藤・椎名(2014)が指摘しているように、「ペアを作る」「順々に回す」「最初を固定する」の3つの解法を無造作に複合してランダムに用いるケースが見受けられる。佐藤・椎名によればこの傾向は3年生から4年生に上がるときに急減するのだが、一方で児童は問題を解くのが難しいと感じると、無造作に解き方を変更して誤った解答に行きつくことが多いという。

この傾向に関しては、6年生になっても単元を学習する以前は、同じような傾向がみられると考えられる。そこで本研究では、どのような誤答が起こりやすいのかを児童の事前テストの結果を鑑みて検討する。

(1)で述べたように、誤答した児童の人数は35名中8名と割合は低かった。しかしここには佐藤らが言うように、無造作に思考操作の論理規則を変更した事例が見られる。たとえばある児童はFigure7のように、①と②は解法5「ペアを作る」を用い、最初と最後の人の順番を入れ替えている。しかし③と⑤では解法2「順々に回す」を用い、④と⑤が同じ並べ方になっている。また⑦は最初と2番目にはるとさんの名前を入れ、⑥と⑧は②と同じ並べ方になっている。このように無造作に思考操作の論理規則を変更すると、かえって落ちや重なりが生まれ、結果として誤答に至る場合がある。

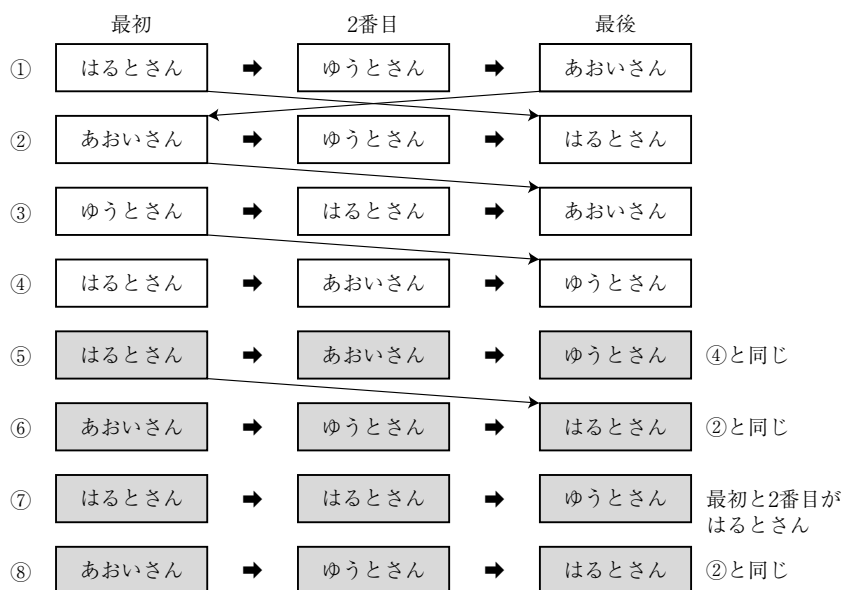


Figure7 解法2「順々に回す」と解法5「ペアを作る：最初と最後の順番を入れ替える」を無造作に変更して誤答に至る例

4. 討論

4-1. 並べ方に関するインフォーマルな知識および解き方

児童の事前テストら、解法1から6までの解法が見出された。これらの6つの解法は「ペアを作る」「順々に回す」「最初を固定する」の3つの解法に集約される。一方で、児童は問題を解くプロセスで行き詰まると、6つの解法を無造作に変更し、思考操作の論理法則を一貫して用いることはしなかった。誤答に至った児童が35名中8名と少ない人数だったにもかかわらず、正答者の中にも同様に、いくつかの解法を組み合わせた複合型の解答を示した者が多かった。教科書に掲載されている樹形図のもとになる考え方である「先頭(最初の人)を固定する」を用いた児童は35名中7名にとどまった。このことから、児童の多くは何等かの法則性を見出す前に、行き当たりばったりともいえるランダムな解法をその都度、選択しては行き詰まる度に解法を変更する問題解決をしていると考えられる。本研究で用いた課題は、佐藤・椎名にならない、児童が思いつくままに列挙したとしても正答にたどり着くことができる比較的やさしい問題であった。問題1で調べる対象を3人にしたのは、このためであった。学習前であっても混乱しにくく、問題解決の見通しをもって取り組めるよう配慮したが、法則性をつかんで解答した児童は少なかったといえる。

4-2. 誤りやすさを回避するために一発展的な学習につながる考え方を身に付ける

本研究の課題は3人の順番を変えていく並べ方の問題であった。教科書では4つの数を扱っており、調べる対象が4つ以上に増えた場合に図や表を利用して、ある法則性を理解して掴み取る応用力を身に付けていく展開となっている。

教科書よりもさらに発展的な学習について、本研究の調査対象校を管轄する東京都教育委員会(2011)は「学習指導要領に示された内容の理解を一層深める学習や広げる学習、さらに進んだ内容についての学習」と定義している。東京都では学習指導要領の内容の理解をさらに深めたり、広げたりする学習と、学習指導要領の内容をさらに進めた学習の2つが発展的学習と呼ばれる。この定義は小中共通であり、小中接続期における小学校算数の「場合の数」と中学校数学の「確率」を小中で連携しつつ指導していく際の1つの指標となる。

児童のインフォーマルな知識や問題の解き方、誤答に至りやすい解法を加味した上で、中学校数学の「確率」とも関連して「場合の数」を検討していくことが今後必要となるだろう。そのためにも本研究では扱わなかった「組み合わせ方」についても探究し、並べ方との違いについて理解を深めることが重要である。

【引用文献】

文部科学省(2008). 小学校学習指導要領 東京書籍.

日本数学教育学会(編著)(2005). 算数教育指導用語辞典第三版 教育出版.

佐藤 学・椎名 美穂子(2014). 場合の数における児童の指向性思考からの考察 岡山大学算数・数学教育学会誌:パピルス, 21, 94-102.

手島 勝朗(1984). 問題解決における発達課題についての一考察:—「場合の数」の試行的アプローチを通して— 日本数学教育学会誌, 66, 19-25.

東京都教育委員会(2011). 発展的な学習を推進するための指導資料 小学校編 算数.

<http://www.kyoiku.metro.tokyo.jp/buka/shidou/shidoushiryou/chuugakkou03.pdf> [2015年9月27日取得]

Children's Informal Knowledge and Solution on Permutation in Elementary School Mathematics:

To Avoid Mistakes

Mayumi OIE

(Graduate Student, Graduate School of Education, Tohoku University)

The purpose of the present study was to investigate children's informal knowledge and solutions before they learn permutation in mathematics at elementary school and to consider how to avoid mistakes when they solve the task. I focused on permutation and asked elementary school students how they can put three numbers in order to solve the problem. The participants were 6th graders (N=35; male=22, female=13) at the public elementary school in Tokyo. Their solutions to the task were analyzed qualitatively. The results indicated that three solutions (6 variations) were found: (1) to make pairs (3 variations), (2) to pass round (2 variations), and (3) to fix the head. In addition, when children mixed three solutions that consist of six variations, they took mistakes because they couldn't understand and find theoretical rules necessary for thinking operation. Even several correct answers connected illogical solutions without rules.

Keywords : elementary school mathematics, numbers of cases, permutation, 6th graders