つれづれなるままに数学

日合 文雄

研究者が自分の半生を振り返って，何事かを達成したと思えるなら幸せでしょう．私には何事かを成就したという思いがありません．皆様に自慢できる仕事もありませんので，できることなら最終講義のような行事はスキップしたいのですが，許してもらえないようです．ひっそりと消えて行きたい人間を無理矢理引っ張り出して話をさせるのは大学におけるいじめの一つではないかと思いますが，自分が何事も成し得なかったことを自覚せよという親心なのだろうと思って引き受けるしかありません．

最初に忘れないうちに，皆様に感謝とお礼を申し上げたいと思います．仙台に来て１３年と半年の間，気持ちよく仕事をすることができました．数学群の先生方，研究科の先生方，事務の皆様に大変お世話になりました．本当にありがとうございました．それから，私のところに来てくれた学生さん達，とりわけドクターの学生さん達とは楽しく数学の議論をすることができました．これだけ申し上げれば，私の目的は達せられましたので，これで私の話はお終いにしていいのですが，それではあんまりだと言われそうなので，日頃思うことや仲間と話題にすることなどを少しだけお話しすることにします．与太話と思って気楽に聴いてください．自分がやった数学の研究についてはほとんど話しません．

私にも青春の時代はあった

人からときどき何故会社に行ったのかと訊かれることがありますが，自分でもよく分かりません．私が学部３，４年であった頃は，全国的に大学闘争はなやかなりし時代でした．私は党派的な人間ではなかったし，いわゆるノンポリ（今や化石語か）でしたが，当時の状況を真面目に引き受けていたことは間違いありません．(団塊の世代は多かれ少なかれあの時代状況を引きずっていると思います.）東工大では革マルと中核（民青はあまり強くなかった）の両派がいましたが，それらと別にノンセクトラジカルの全学改革推進会議というグループがありそのリーダーが先の菅首相でした．(三つ子の魂百までと言いますが，彼は昔から当局側を追求するのが得意だったわけです.）私が３年生の終わり頃に大学がバリケード封鎖された後は卒業まで講義はなかったし，４年のセミナーもほとんどしませんでした．大学に行っても近くの喫茶店に入り浸っていたように思いますが，今となっては朦朧とした感じです．しかし大学院に行かなかった本当の理由は多分，数学を勉強して難しい理論を知るにつけて，自分には数学で仕事をする才能がないというコンプレックスが大きくなったせいだと思います．青春とは迷いの時代なのでしょう．

会社は川崎製鉄（現在の JFE スチール）で神戸の三宮の近くの春日野道にあった本社のシステム課で SE として働きました．当時は大型計算機万能の時代で，大きな部屋

に UNIVAC の計算機が設置されていて，プログラムはパンチカードで入力しました．BASIC, FORTRAN, COBOL などの言語でたくさんのプログラムを書きました．会社でまずいことがあったわけではありませんが，自分には会社勤めは合わないし，もう一度数学の勉強をしたいと思うようになりました．それで３年目の夏に会社を辞めて，３年遅れで東工大の大学院に入ることにしました．私の希望を快く受け入れて下さった恩師の梅垣壽春先生には本当に感謝しなければなりません．私が卒業した後，国澤清典先生（数理統計とＯＲで著名）と梅垣先生は数学科から袂を分かち情報科学科を新設されたので，もう数学科に所属されていませんでした.（私が梅垣先生の数学科での最後の学生で，この研究科にしばらく在籍した小澤正直氏（名古屋大情報科学）は情報科学科での最初の学生の一人です.）それで，数学科の院生として私を引き受けるのにかなり無理していただいたと思います.

会社勤めで世の中の不条理（ちょっと大げさですが）を実感し，３年ブランクで数学をやり直すのに他人と同じ風にしたくはありませんでした．社会のためになる数学をやりたいという切実な気持ちがありました．それで，25 歳の私は大それたことにも，応用数学者になることを自分に課しました．凸解析，数理経済，ゲームの理論，制御理論，情報理論などを文献を読み漁りました．後に一般均衡理論でノーベル経済学賞を受賞したドブルーなどは純粋に数学の論文を書いていることを知りました（ご愛敬にも数学的な間違いがありましたが）．読み漁った理論のあちこちに集合値の関数が現れることを知りました．そのような関数の確率変数としての理論が数学的に不備であるように思われたので，少し考えたら上手いアイデアを思いつきました．そのテーマで修士論文を書き，その一部を梅垣先生との共著論文

- F. Hiai and H. Umegaki, Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, *J. Multivariate Analysis* **7** (1977), 149–182

として発表しました．梅垣先生はフォン・ノイマン環上の非可換確率論を創始者で，非可換の条件付き期待値とマルチンゲールの理論，さらに非可換相対エントロピーなどで有名でした．集合値の確率変数に対する条件付き期待値とマルチンゲールを取り上げたのには，その影響が大きかったと思います．論文の一番重要なポイントは以下の通りです.

$\mathcal{X}$ を可分な Banach 空間とし（例えば n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と思ってもらえばよい），$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とします．$\mathcal{X}$ の空でない閉集合を値とする集合値関数 $F : \Omega \to 2^{\mathcal{X}}$ が可測であるとは，$\mathcal{X}$ の任意の開集合 O に対して

$$\{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap O \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}$$

であるときをいいます．このような集合値確率変数 F に対して，$\mathcal{X}$-値可測関数 $f : \Omega \to \mathcal{X}$ が F の選択関数であるとは $f(\omega) \in F(\omega)$ a.e. となるときをいいます．私は次の結

果を示しました．$\mathcal{X}$-値可積分関数から成る Banach 空間 $L^1(\Omega;\mathcal{X})$ の空でない閉部分集合 M が集合値確率変数 F により，

$$M = \{f \in L^1(\Omega;\mathcal{X}) : f(\omega) \in F(\omega)\ a.e.\}$$

と表される（つまり，M は F の可積分な選択関数の全体である）ための必要十分条件は M が分解可能である，つまり，任意の $f, g \in M$ と任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\chi_A f + \chi_{\Omega\setminus A} g \in M$$

が成立することであるという結果です．いま，$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の σ-部分集合体とし，集合値確率変数 F の可積分な選択関数 f の $\mathcal{G}$-条件付き期待値 $E(f|\mathcal{G})$ の全体の L^1-ノルム閉包を M とします．このとき，任意の $B \in \mathcal{G}$ に対して

$$\chi_B E(f|\mathcal{G}) + \chi_{\Omega\setminus B} E(g|\mathcal{G}) = E(\chi_B f + \chi_{\Omega\setminus B} g|\mathcal{G})$$

ですから，M は $\mathcal{G}$ に関して分解可能です．よって上の結果から $\mathcal{G}$-可測な集合値確率変数 G が存在して，M は G の $\mathcal{G}$-可積分な選択関数の全体に等しくなります．さらに，このような G は一意的です．私はこの G を F の $\mathcal{G}$-条件付き期待値と定義しました．これが集合値確率変数の条件付き期待値の標準的な定義となりました．

上記論文は数学的には大したことはないと思いますがやたらと引用されます.（少なくとも引用件数の面では）私の代表論文となりました．数学者としては論文の数は少なくない方ですが，最初の論文が一番良いというのはちょっと情けないと思います．梅垣先生からは，このテーマは面白いとは思わないという批評を受けましたし，国内からは反響が皆無で空しい気持ちがしました．実際この論文の分野は外国ではそこそこ研究者はいますが，日本ではほとんど研究者がいません．分野が存在する限り論文は引用され続けるでしょうが，とにかく非常にマイナーな分野です．そんなことで，何編か続きの論文を書いた後，修論の続きで仕事をするのは止めにしました．大学に戻った当初は，応用数学者になることを目指したのでしたが，自分には不可能だと諦めて，本来勉強していたヒルベルト空間上の作用素環や作用素論の分野に回帰しました．

幕間狂言

上で修論のテーマは止めにしたと言いました．実際のところ，私はあっさりした方の性格なので，一つのことをとことん追求するという粘っこさがありません．一つのことを徹底してやるには，もっと肉を食って脂ぎっていないと駄目なようです．しかし，一瞬間だけ昔のテーマに戻ったことがあります．修士を終えて直ぐ東工大の助手に採ってもらいました.（昔は学位なしで助手になるのが普通でしたし，修士だけで助手になるのも珍しくはありませんでした.）１年して国澤先生が退官され，東京理科大（野田）で情報科学科を新設されたときに一緒に理科大に移りました．神保雅一氏（名

古屋大情報科学）も一緒でした．同じ年の秋にアメリカ帰りの大矢雅則氏が加わりました．理科大で６年くらい経ったときに，シシリー島のカタニアで（シシリーはマフィアの島として有名ですが，マフィアの本拠地はパレルモの方です），集合値関数に関する国際シンポジウムがあるので来ないかという手紙が来ました．このテーマから手を引いていましたが，外国に行ったことことがなかったので良いチャンスだと思って行くことにしました．何も新しい結果がないのはまずいと思って，プロシーディング用に論文を一つでっち上げました．それをもう少し発展させてシンポジウムの後に発表したのが

- F. Hiai, Convergence of conditional expectations and strong laws of large numbers for multivalued random variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* **291** (1985), 613–627

です．これも私の論文では引用件数が多い方です．余談ですが，シンポジウムに行って，自分がトップバッターの基調講演者になっているのを知って吃驚しましたが後の祭りでした．初めての英語の講演で酷いものでした．今でも苦い思い出です．国際会議で基調講演者になったのは，残念ながらこのとき一回限りです．その後何十回と英語の講演をしましたが，一度も満足できたためしがありません．人には得手不得手があるのだと諦めるしかないようです．

師匠の爪の垢でも

理科大に移って９年目の夏だったと思います．琉球大であった実函数論・函数解析学合同シンポジウムに出席した帰りの飛行機で北大の安藤毅先生と隣り合わせになりました．羽田に乗り換えて札幌に帰るということでした．安藤先生は世界的な作用素論の大家で，私にはとても恐くて近づき難い存在でした．飛行機の中で私の研究テーマや個人的なことをいろいろと訊かれたので，おかしなこともあるものだと思いました．その後直ぐに，安藤先生のところの助教授が北大理学部に移動するので，その後に来ないかという話がありました．安藤先生の定年を待たずに８年以内に他に移ることが条件でしたが，直ぐに決断して行くことにしました.（最近になって，あのときの話は飛行機の中で急に思いついたのですかと安藤先生に訊いたことがありますが，多分その前に決めていたと思うがもう忘れてしまったと言われました.）安藤先生がおられたのは応用電気研究所（現在の電子科学研究所）の応用数学部門でした．応電研には 15 以上の部門がありましたが，数学の部門は一つだけでした．安藤先生には運営の仕事も多かったと思いますが，助教授の私には雑用が一切ありませんでした．理学部の講義を１コマだけ引き受けていましたが，安藤先生と交代で担当したので，２年で１コマ講義するだけで，後は研究だけしていればよい恵まれた環境でした．

安藤先生を身近に見て，世の中にはこんなに数学が出来る人もいるのかというのが最初の印象でした．安藤先生の証明はよく安藤マジックと呼ばれることがある通り，神業としか思えないことが度々でした．まさに problem solver としての面目躍如たるも

のがありました．安藤先生の頭の中には膨大な数の証明キットが整然と並んでいて，問題がインプットされるとその中から一番適当なものをひょいと取り出すという風に私には思えました．私は師匠の爪の垢でも煎じて，少しでも近づきたいと念願しました．（安藤先生を師匠と呼ぶのは失礼とは思いますが，直接の弟子でないので私には師匠というのが一番ぴったりしています.）安藤先生からは研究スタイルも含めてたくさんのことを教わりました．直接に教わったことはありませんが，門前の小僧よろしく見習ったのでした．しかし今でもとても遠い存在のままです．私が今日まで数学をやって来られたのは，応電研にいた５年半の間に身につけた数学のやり方や知識に寄っているところが大きいと思います．数学で大理論と呼ばれるものは概して動物で言えば骨の部分にあたり，すごい理論であると感銘はしますが，時に味気ないと思うこともあります．私は骨より肉と皮の部分の数学に面白みと美味しさを感じる人間です．このような自分の数学のスタイルを固めたのもこの時期でした．

Petz 氏との遭遇

1989 年ですから，応電研に移って５年目の８月末だったと思います．ルーマニアのクラヨーヴァという所であった作用素環に関するコンファレンスに出席しました．ちょうど旧ソ連と東欧の共産党国家のドミノ倒しが起こりつつある頃でしたが，ルーマニアではまだチャウシェスク体制が続いていました．チャウシェスク大統領の娘のゾヤ・チャウシェスクというのが数学者で，ゾヤが所長をしていた数学研究所がブカレストにありました（所長と言ってもお飾りみたいなものだったと思います）．ルーマニアの国中から数学オリンピックの受賞者などを集めて作用素論（ゾヤの専門）と作用素環論に一極集中させたので，この分野に関してはルーマニアは世界に冠たるものがありました．私が出たコンファレンスのオープニングセレモニーでも政府のお偉方や市長が挨拶して，大統領の娘のおかげでと持ち上げるのでした．この年の６月にポーランドから始まった東欧共産党国家のドミノ崩壊がルーマニアまで及んで，１２月のルーマニア革命によってチャウシェスク体制は崩壊し，チャウシェスク夫妻は逃亡中に捕まり処刑されました．娘のゾヤも拘束されましたが，後に放免されました（2006 年に病没しました）．ゾヤはルーマニア国民が食糧難で窮乏を極めている中で贅沢三昧をしたようですが，特別悪い人間ではなかったと思います．数学研究所の成功に力を尽くしたようですし，研究所にいた著名な数学者の何人かが亡命したときには，家族に危害が及ばないように配慮したという話も聞きました．コンファレンスでは，彼女は華美な化粧と服装でものすごく浮いた存在でした．ボディガード役の数学者がいつも側についていたのが印象的でした．私はコンファレンスに行く前に人間ドックを受けました．胃にポリープがあるというので胃カメラで細胞検査を受けましたが，その検査結果を待たずに旅立ちました．初めての人間ドックでもあり，当時はポリープがありふれたものであるとは知りませんでしたので，最悪の場合を想像して落ち込んでいました．さらに出発の前に風邪を引いて 38 度以上の熱がありました．それでコンファレ

ンスの誰かに体調が良くないと言いましたら，その日の夜にとても優秀な感じの医者が部屋に来てくれて診察して注射をしてくれたのには吃驚しました．大統領の娘の威光はすごいものだと思いました．コンファレンスのバンケットでも信じられないくらいの豪華な食事が出ました．後で当時のルーマニア国民の困窮を知ってひどく罪悪感を感じたものでした．2001 年に黒海に面した保養地のコンスタンツァという所であったコンファレンスでもう一度ルーマニアに行きましたが，このときにはマクドナルドを代表するアメリカ型資本主義が幅をきかせていました．コンスタンツァで私に起きた不名誉な事件は思い出すたびに恥ずかしくなります．ホテルからコンファレンスの会場へはバスで行くので回数券が支給されました．コンファレンスの説明でバス券には必ずパンチを入れるように聞きましたが，券の両端にパンチしないといけないと言われたのを聞き漏らしていました．バスにたまたま４，５人の検札官（警官だったかもしれない）が乗り込んできて，私の切符が片方しかパンチされていないのを咎められました．罰金を払えと言われましたが納得できなかったので拒否しましたら，バスの終点まで連れて行かれ４，５人に取り囲まれて厳しく追及されました．少しは言い返しましたが，罰金を払わないなら警察に連れていくと脅かされ勝ち目はないと諦めました．100 ドル札１枚を払ったような気がします．バスの中にコンファレンスの参加者がたくさんいたのに，笑って見ているだけで誰も助けてくれませんでした．一緒だった長田まりゑさん（大阪教育大名誉教授）からは「日合さんはコンスタンツァで警察に連行されたのよね」と今でもからかわれます．コンスタンツァからの帰りにブカレストで，ルーマニア革命のときに治安部隊によって多数の市民が虐殺された広場を見てきました．ルーマニア革命は市民蜂起に便乗した宮廷クーデターという説もありますが，真相は闇に閉ざされたままのようです．東欧革命からソ連崩壊に至るヨーロッパの変容ぶりは凄まじいものがあったと思います．

さて前置きはこれくらいにして，本題の Dénes Petz 氏についてですが，彼とは数学の興味が重なる部分が多く，ルーマニアのコンファレンスに行く数年前から文通していました．ルーマニアに来るならブダペストにも寄ったらと誘われたので行くことにしました．ブカレストからブダペストはオリエント・エクスプレスと呼ばれる列車の区間に入っていて，アガサ・クリスティの推理小説が頭にあったので，オリエント急行の旅も悪くないなと思ったのでした．あにはからんや，オリエント急行と言っても名ばかりで，列車も寝台も酷く汚いし，国境での手荷物チェックがやたら厳しくて往生しました．ブダペストの街は今では日本からの観光名所になっていますが，まだ共産主義国家であった当時は（とはいえ訪問した直後の１０月に共産党政府は崩壊するのですが），街全部が黒ずんで汚く，ソ連製の車の排気ガスが酷かったことを憶えています．日本人は非常に珍しかったようで，街を歩いているとじろじろ見られました．ペスト側のエリザベート橋から真っ直ぐの大通りに面した建物の中のおばあさんが一人で住んでいるフラットの一部屋を借りました．夜街を散歩して建物に入ろうとしたら，

大きな鉄格子の入り口のカギが何度試しても開かなくて，外は暗いし建物を間違えたのかと泣きそうになったのを記憶しています．50 回くらいも試してやっと開いたのですが，カギが粗悪で空けるのに非常なコツがいるのでした．Petz 氏と初めて会っていろいろ話したり，彼がいたアカデミー数学研究所（現在のアルフレッド・レニィ数学研究所）で講演もしたと思いますが記憶にありません．よく憶えているのは，オリエント急行が酷かったのと，カギが開かなくて苦労したことだけです．Petz 氏が漫画のポパイとそっくりなのはご愛敬でした．こんな感じで Petz 氏との付き合いが始まりました．因みに大道芸人の数学者として日本に住み着いて有名なピーター・フランクルは，私がブダペストに行った 10 年も前にフランスに亡命していましたが，その昔ブダペストの数学研究所で Petz 氏の同僚だったそうです．ピーター・フランクルはユダヤ系ハンガリー人ですが，Petz 氏はドイツ系ハンガリー人です．

ブダペストで Petz 氏に会った翌年に，彼は大矢氏の世話で理科大（野田）に１，２ヶ月滞在しました．私が北大から１０月に茨城大（水戸）に移った直後くらいだったと思います．我孫子に北大に移る前に買ったマンションがあり，家族は我孫子に住むことにして，我孫子と水戸を毎週往復することにしました．それで柏の日本料理店で Petz 氏と会食しました．この年の４月に量子情報幾何と量子情報理論の日本の第一人者である長岡浩司氏（電通大）が北大工学部に赴任しました．彼とは以前から作用素不等式などに関して質問を受けたりして付き合いがあり，北大を離れる前に大学の彼の部屋で雑談する機会がありました．その際に，長岡氏が自分には何としても解きたい問題があるのだがと言って説明してくれたことがありました．重要で面白い問題だとは思いましたが，問題の背景にあまり興味がなかったので考えてみようとは思いませんでした．Petz 氏と会食したときに，長岡氏から聞いた問題について話しました．その瞬間に彼は叫びました「それは俺の問題だ！ 俺はその問題を最近ずっと考えている！」そういうことならと自分でも考えてみる気になりました．問題は情報理論で基本的に重要な「Stein の補題」の量子版です．有限量子系の２つの状態をいくつもテンソルした結合系で量子仮説検定したときの誤り確率の漸近的な指数限界が，最初に与えられた２つの状態の梅垣の相対エントロピーと一致するかという問題です．Petz 氏は問題の情報論的な意味をわきまえていたに違いないですが，私自身は恩師である梅垣先生の相対エントロピーを正当化する問題としてむしろ捉えていたと思います．当時，非可換（＝量子）相対エントロピーについては，梅垣の相対エントロピーの他にも有力な候補があって，どちらが正しい相対エントロピーであるか疑問でした．もし量子仮説検定の誤り確率の漸近的な指数限界として梅垣の相対エントロピーが現れるなら，それが正しい相対エントロピーであると正当化できると考えました．具体的に 2×2 の行列環をいくつもテンソルして，結合系での最適な測定（テスト）をどう選べばよいかを調べました．最初に 2×2 でも，５個テンソルするだけで 32×32 の大きな行列になるので紙に書くだけでも大変でした．そのうち，上手い測定の選び方が見えてきて，

後は作用素環の知っているテクニックですんなり証明できました．それで共著論文

- F. Hiai and D. Petz, The proper formula for relative entropy and its asymptotics in quantum probability, *Comm. Math. Phys.* **143** (1991), 99–114

にまとめました．

この論文の主定理をもう少しだけ説明しましょう．$\mathcal{A}$ を有限次元 C^* 環（行列環としてよい）とし，φ_0, φ_1 を $\mathcal{A}$ 上の状態とします．各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して，n 重テンソル積 C^* 環 $\mathcal{A}^{\otimes n}$ 上にテンソル積状態 $\varphi_k^{(n)} := \varphi_k^{\otimes n}$ $(k = 0, 1)$ を考えます．$\varepsilon \in (0, 1)$ に対して

$$\beta_\varepsilon(\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}) := \min\{\varphi_1^{(n)}(Q) : Q \in \mathcal{A}^{\otimes n}, \text{射影}, \varphi_0^{(n)}(I - Q) \le \varepsilon\}$$

と定めます．量子系 $\mathcal{A}$ の状態が φ_0, φ_1 のいずれかであり，結合系 $\mathcal{A}^{\otimes n}$ 上ではそれらのテンソル積状態 $\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}$ のいずれかが起こるとします．$\mathcal{A}^{\otimes n}$ の射影 Q により定まる測定（テスト）$(Q, I - Q)$ によって，φ_0, φ_1 のいずれであるかを決定する問題を考えます．φ_0 を帰無仮説，φ_1 を対立仮説として，測定の結果が 0 のとき φ_0 を採択し，1 のとき φ_0 を棄却（φ_1 を採択）するものとします．このとき，φ_0 が正しいのにそれを棄却する第 1 種誤り確率は $\varphi_0^{(n)}(I - Q)$ で与えられ, φ_0 が正しくないのにそれを採択する第 2 種誤り確率は $\varphi_1^{(n)}(Q)$ で与えられます．したがって，$\beta_\varepsilon(\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)})$ は第 1 種誤り確率を ε 以下に押さえたときの，第 2 種誤り確率の最小値を意味します．この最小誤り確率の $n \to \infty$ のときの漸近極限について

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \beta_\varepsilon(\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}) \le -S(\varphi_0 \| \varphi_1)$$

が成立します．ここで，右辺の $S(\varphi_0 \| \varphi_1)$ は梅垣の相対エントロピー

$$S(\varphi_0 \| \varphi_1) := \mathrm{Tr}\, D_0(\log D_0 - \log D_1)$$

です（D_0, D_1 は φ_0, φ_1 の密度行列）．

当時の私は Stein の補題については門外漢で十分なバックグラウンドを持っていませんでしたので無手勝流で証明を作りましたが，今から考えると証明のやり方は非常に自然なものでした．情報理論でいうタイプと呼ばれる標準的な手法であり，表現論でいうテンソル表現の既約分解の考えであり，作用素環でいうゲージ不変 C^* 環の有限次元部分環で因子分解を考えることに対応していました．Petz 氏との共著論文では量子 Stein の補題の順定理の部分を証明したのですが，逆定理の部分は完全には証明できないままでした．しかし 2000 年に長岡氏は弟子の小川朋宏氏と共著で量子 Stein の補題の逆定理の部分

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \beta_\varepsilon(\varphi_0^{(n)}, \varphi_1^{(n)}) \ge -S(\varphi_0 \| \varphi_1)$$

を証明し，量子 Stein の補題を完成させました．長岡氏から聞いた話では，彼は私と Petz 氏の論文でとても悔しい思いをしたそうで，論文のコピーを部屋のドアに張って奮起したそうです．順定理では彼を出し抜いたのですが，９年後に逆定理でリベンジされたことになります．量子仮説検定論はその後目覚ましい発展があり，最近では量子情報理論の発展の一翼を担うまでの広がりを見せています．

Petz 氏は 1992 年に荒木不二洋先生の世話で京大数理解析研究所の客員教授として１年間家族全員で京都に滞在しました．その間に共同研究をさらに発展させることができ，立て続けに３編の共著論文を書くことができました．そのときの成功体験のおかげで，その後 20 年に渡って共同研究を続けることができたのではないかと思います．数えてみると，彼との共著論文は既に 28 編もあります．私の論文の３分の１近くが彼との共著になるわけです．しかし上に挙げた最初の共著論文が一番良いです．もうこれ以上の共著論文を書くのは無理でしょう．彼とは毎年のようにお互い行き来してきましたし，学振の日本・ハンガリー共同研究を２度も実施しました．どうも腐れ縁のようでもあります．私は一人では積極的に論文を書きたいとは思わないので，彼からいろいろと言われなければ，これ程に論文を書くことはなかったでしょう．良い相棒に恵まれて幸運でした．

魔法の玉手箱

Petz 氏との最初の共著論文の経緯については既に話しました．そこでの１番のキーワードは梅垣の相対エントロピーでした．量子系の状態は密度行列で表されます．密度行列 A, B に対する梅垣相対エントロピーは

$$S(A\|B) := \mathrm{Tr}\, A(\log A - \log B)$$

(Tr はトレース) で与えられます．これとは別に，Belavkin-Staszewski は

$$S_{\mathrm{BS}}(A\|B) := \mathrm{Tr}\, A \log A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$$

と定義される別の相対エントロピーを提唱しました．$AB = BA$ なら $S(A\|B) = S_{\mathrm{BS}}(A\|B)$ ですが，$AB \neq BA$ のときは両者は一致しません．Petz 氏との共著論文で主定理の副産物として，不等式

$$S(A\|B) \le S_{\mathrm{BS}}(A\|B)$$

が成立することに気づきました．Petz 氏は $A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ を $(A \# B^{-1})^2$ に置き換えたら，上と逆向きの不等式

$$S(A\|B) \ge \mathrm{Tr}\, A \log (A \# B^{-1})^2$$

が成立するのではないかと予想しました．ここで $X \# Y$ は作用素幾何平均と呼ばれ，正数の幾何平均 $\sqrt{xy}$ を正作用素に拡張したものです．正数 x, y については，$\log x - \log y =$

$\log xy^{-1} = \log(\sqrt{xy^{-1}})^2$ ですから，上の不等式は当然等号で成立します．他方，量子物理との関連で有名な不等式として Golden-Thompson の不等式

$$\mathrm{Tr}\, e^{H+K} \le \mathrm{Tr}\, e^H e^K \quad (H, K \text{ はエルミート行列})$$

があります．$A = e^H$, $B = e^{-K}$ とおくと，$\mathrm{Tr}\, e^{\log A - \log B} \le \mathrm{Tr}\, AB^{-1} = \mathrm{Tr}\, A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ となりますので，上の２つの相対エントロピーの間の不等式と関係がありそうに思われました．さらに，Golden-Thompson を拡張した Araki-Lieb-Thirring の不等式

$$\mathrm{Tr}\, e^{H+K} \le \mathrm{Tr}\,(e^{pH/2}e^{pK}e^{pH/2})^{1/p}$$

が成立し，右辺は $p \searrow 0$ のとき単調減少して左辺に収束することが知られていました．そこで Petz 氏と私は Golden-Thompson と逆向きの不等式

$$(\#) \qquad \mathrm{Tr}\,(e^{pH} \# e^{pK})^{1/p} \le \mathrm{Tr}\, e^{(H+K)/2}$$

が成立することを予想し，非常に長い計算の結果これを証明しました．

Golden-Thompson と逆向きの不等式を証明した論文を安藤先生に送ったら，驚くべき不等式だと言って興味をもってもらいました．その後，詳しい経緯は忘れましたが，反対称テンソル積の手法を使うと，マジョリゼーションの形のもっと強い結果がもっと簡単に証明できるのではないかと安藤先生から言われました．マジョリゼーションとは２つの行列の固有値（スペクトル）の間の優劣関係を表し，トレース不等式だけでなく，行列のいろいろなノルム不等式を示すのに非常に有力な考え方です．反対称テンソル積の手法は Lieb-Thirring の不等式を拡張した Araki の論文でも使われた周知の方法でしたが，Petz 氏と私は (#) の証明にこれを使うことは思いつきませんでした．安藤先生と議論した結果この方法が上手く使えることが分かり，共著論文

- T. Ando and F. Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities, *Linear Algebra Appl.* **197/198** (1994), 113–131

として発表しました．この論文では (#) の左辺が $p \searrow 0$ のとき単調増加して右辺に収束することも示されました．結局，Petz 氏と私の (#) の証明は（もちろん正しい証明ではありますが）大いなる失敗作であることが分かったのでした．数学では，長くて難しいと思われていた証明でも，後からとても短い証明が見つかるということはしばしば起こります．上記論文で使った反対称テンソルの手法は非常に強力で，以後意識して使うようになりました．これが上手く使えると，あっという間に対数マジョリゼーションが証明できてノルム不等式が得られるので，私は密かに「魔法の玉手箱」と呼んでいます．安藤先生とは５編の共著論文を書いていますが，上の論文が最初のものです．安藤先生との共著の仕事はいつも刺激的で，教わることが多いと思います．

Applied mathematics is bad mathematics

数学の仕事に対する最高の褒め言葉は beautiful であるというのは数学者の常識です．この点では数学の美意識は美術や音楽などの芸術と似ているところがあります．工学系では powerful というのが一番の褒め言葉だろうと思います．文系の分野では excellent あたりでしょうか．数学では美意識が大事だと言うと，良し悪しの判断が非常に主観的なものと思われるかもしれませんが，そうではありません．私が美しいと思う数学は他の数学者にとっても同様に美しいものであるはずです．数学の世界は本来予定調和的にできており，良い数学は本来的に美しいものであるという普遍的な暗黙知があるように思われます．現実に数学をやっている者からすれば，まず大事なことは問題が面白いかどうかです．それが理論として完成して美しいと思えるなら最高なわけです．

表題に掲げた文は，作用素論の大家であった Paul R. Halmos (1916–2006) の論文（数学の論文ではなくて評論）のタイトルです．純粋数学と応用数学を比較して純粋数学の優位性を主張したもので，かなり物議を醸したようです．詳しい内容を説明する余裕はありませんが，Halmos は純粋数学はそれ自身で存在できるが，応用数学は純粋数学の土台なしには存在できないというようなことを主張しました．純粋数学 vs. 応用数学の問題は数学者にとってかなりやっかいな問題です．私の場合，若いときに応用数学者を目指したことがあるだけに頭が痛いところがあります．これについては，開き直って何も考えないことにするのが一番よい対処の仕方かもしれないと思います．数学は非常に純粋なものから非常に応用的なものまで連続的に変化するので，純粋と応用の２分法には無理があるし，優劣を議論すること自体無意味であるというのが大方の数学者の考えだと思います．例えば，Doron Zeilberger という人（組合せ論の分野で著名）などは，

People who believe that applied math is bad math are bad mathematicians

と言って，Halmos の主張のナンセンスぶりを論評しています．実際，普通の数学者は応用があるかどうかは数学の良し悪しの判断にあまり関係がないと思っています．応用があるかないかについて一般論で言えば，数学は数理を使うすべての学問において共通の言語であるし，数学と物理の共同関係を見れば，数学に応用があるのは当然すぎることだといえます．しかし，これはあくまで一般論であって，数学は応用を目指すべきで数学のための数学は駄目であるという最近耳にすることが多い主張に対しては，あまり説得力がないのも確かです．一昔前，著名な女流作家が「２次方程式などは社会へ出て何の役にも立たないので，中学の教科書から無くすべきだ」と言ったそうですが，こんな薄っぺらな学問観は問題外で，数学の応用とはこのような皮相的なレベルのことでないのは明らかなことです．しかし，女流作家の言い分はある意味では核心を衝いているとも言えます．問題の本質は，結局のところ，応用数学に面白みを感じる数学者が多くないということだと思います．このことが数学者の偏見あるいは食わず嫌いによるのかどうかは難しいところです．確実に言えることは，純粋数学であ

ろうと応用数学であろうと良いものは良いし，つまらないものはつまらないということです．偉大な純粋数学者でありかつ偉大な応用数学者である von Neumann, Norbert Wiener, Alan Turing などの仕事を思い浮かべてもらうとよいでしょう．ついでに一言すると，応用数学でいい仕事をするのは，純粋数学で仕事するよりもかなり難しいと私は思っています．応用という側面がプラスされるので，数学として優れていることは必要条件であっても十分条件ではないからです．

積分 vs. 最大値

このタイトルで何か数学の定理のようなことを話すつもりではありません．

岡潔 (1901–1978): 13,　角谷静夫 (1911–2004): 78,

Paul Erdős (1913–1996): 1595,　Fritz Kraus: 1,　Max Zorn (1906–1993): 8,

Andrew Wiles (1953–): 8,　Grigori Perelman (1966–): 11.

これは何人かの著名な数学者の生涯論文の数です．岡潔は言うまでもなく日本が生んだ最高の数学者ですが（これについては意見が分かれると思います．高木貞治が一番という人もいますし，関孝和が一番という人もいます），出版した珠玉の 13 編は第 1 論文，第 2 論文などと番号付けで呼ばれています．角谷静夫は東北大出身でアメリカに頭脳流失した数学者で，関数解析学の分野（私の専門分野です）で数々のすばらしい業績を残しました．例えば，von Neumann-Morgenstern が創始したゲームの理論では角谷の不動点定理が基本的な役割を果たしました．他方，ハンガリー生まれの Erdős は放浪の数学者と呼ばれるように，世界中を旅しながら，一週間に一編の論文を書くと言われたほどにたくさんの共著論文を書きました．（上の数字は MathSciNet によりますが，タイトルに Erdős の名前が入った Erdős 以外の著者の論文も含まれていますので，実際の論文数は 1500 くらいでしょう．）Erdős の論文数は驚嘆すべきものですが，論文の質でも非常にすばらしいものです（もちろん，1500 もの論文を書けば，駄作もたくさんあることは間違いないでしょうが）．1996 年に亡くなる少し前にブダペストの数学研究所で会ったことがありますが，話をする機会がなかったのが残念です．Zorn は「Zorn の補題」と呼ばれる定理でとても有名な数学者です．近代の抽象数学では選択公理と呼ばれる集合論の公理と同値な Zorn の補題は不可欠です．もっとも，Zorn の補題には Zorn 以前からいろいろなバージョンが出版されていて，Zorn の補題という名前が流布したのは一種のミステリーであるらしいです．後の方の 2 人は現在生きている数学者ですが，Wiles はフェルマー予想の解決で，Perelman はポアンカレ予想の解決で有名です．テレビでも取り上げられたようですが，Perelman はフィールズ賞もクレイ数学研究所のミレニアム懸賞問題の賞金 100 万ドルも拒否して，サンクトペテルブルグの田舎の母親も元に引っ込んでしまいました．私は詳しい事情を知りませんが，名誉のためでもなく，まして金のためでもない彼の生き方は称賛に値すると思います．振り返って，金儲けの上手な人が偉いという今の日本の風潮は嘆かわしいと思います．

上記の数学者の論文数を見ますと，Erdős は別格で角谷が平均的として，他は意外と少ないと思われるかもしれません．特に，Karel Löwner (Charles Loewner) の学生であった Kraus という人は，私がやっている数学でよく出てくる作用素凸関数に関する論文を 1936 年に１編だけ書いて消えてしまいました．Löwner は，Löwner の微分方程式や作用素単調関数などで非常に有名ですが，プラハで活躍した後ナチスに追われて第２次大戦が始まる前後にアメリカに移りました（アメリカに移ってからの名前が Charles Loewner です）．一方，弟子の Kraus は，聞いたところでは，学位論文を書いた後に戦争に行って行方知れずになったということです．しかしこの論文１編だけで，作用素論の分野では彼の名前は不滅となりました．数学の世界では，数学者の価値は一番優れた論文つまり最大値によって評価されるのであって，業績全部の積分で評価されるのではありません．ですから，数学で名前を残すにはものすごい論文を１編だけ書けばよいのであって，普通の論文を 100 編書いたところであまり評価されることはありません．私自身は 90 編以上の論文を書いていますが，つまらない論文を書きすぎたと忸怩たる思いがします．数学では

Ann. of Math.,　Acta Math.,　Invent. Math.,　J. Amer. Math. Soc.

などがトップランキングの雑誌です．私はこれらの雑誌に１編の論文もないし，実際一度も投稿したことがありません．数学者としてはこれらの雑誌から論文を出版したいものだと思いますが，今後も投稿することは絶対にないでしょう．そんなわけで，これらの雑誌に１編でも論文を持っている数学者にはそれだけで尊敬してしまうようです．

余談ですが，たくさんの共著論文を書いた Erdős については，Erdős 数というのが有名です．Erdős を起点にして共著者の関係で何回で結べるかというものです．つまり，Erdős 本人が 0, 彼の共著者が 1, 共著者の共著者が 2 という具合です．面白いことに Erdős 数は意外と小さくて，何編か共著論文を書いている数学者では 3 か 4 が多いようです．因みに私の Erdős 数が 3 ですし，情報研究科の数学教室では宗政さんが 2 で一番小さいです．Erdős 数は最近はやりのスモールワールドの好例で，これのグラフ構造を研究した論文もあるくらいです．

Publish or perish

韻を踏んだこの言葉を初めて聞いたのは安藤先生からだったと思います.「出版せよ．さもなくば滅びよ」と読めますが，誰が最初に言ったかは知りません．数学に限りませんが，学者である限りは論文を書き続けなければならないということなのでしょう．この言葉にはポジティブな面もありますが，むしろネガティブな意味で理解されることが多いようです．数学では上で述べた Erdős は例外中の例外であって，普通の人が１年で書くことができる論文の数は頑張ってもせいぜい５編くらいです．その点では文系の学問に似ているかもしれません．中には年に 10 編以上も論文を書く人もいますが，どうしても粗製濫造の弊害に陥りやすいです．こうなると論文を書いても学者と

しての評価は高まらないし，芳しくない評価が定着してしまいます．ですから，学者として志を高く掲げることは重要だと思います．しかし志が高すぎて大作主義になると論文を書くのは容易でなくなります．私は気が小さい人間なので，２年も論文を書かないとそのまま書けなくなってしまうのではないかという恐れをもってしまいます．そんな風ですから，１年に少なくとも１編は論文を書きたいという気持ちでずっと研究してきました．当然のことですが，良い論文はなかなか書けません．ブレークスルー論文となると滅多に書けるものではありません．（何をもってブレークスルー論文というのか私は知らないので曖昧なのですが）果たして自分にブレークスルー論文があるのだろうかと思ってしまいます．かなり手前味噌で選んだとしても，せいぜい４編くらいでしょう．40 年の数学人生ですから，私の場合 10 年に１編も書ければいいところなのでしょう．他にもまあ書いて良かったと言える論文は何編かはあります．どの論文もそれなりに感激して書いたはずですが，後から見ると大半が紙屑に思えて情けなくなります．最近は論文の別刷りは紙で貰うより，PDF ファイルで貰うことが多くなりました．こうなると紙屑というよりインターネットの屑という感じで哀れになります．自分の全部の論文を PDF にしたとして，安物の USB メモリー１本でおつりが来ます．これが自分の研究人生の全てというわけです．

　学者であるからには志を高くもって，多くの人に喜ばれて使ってもらえる論文を書きたいものだと思います．Publish or perish の言葉を戒めとして，できることなら紙屑の論文は書かないようにしたいと思います．多分一流の数学者はこのような心配とは無縁なのでしょうが，私のような数学者にはこれは言うに易く行うに難しいです．どうもこの問題は観念論だけでは済まないところがあるようです．公募や科研費の獲得という実利的な面があるからです．公募で業績評価をする場合，雑誌のランキングである程度は論文の質を評価できますが正確な判定は困難です．どうしても論文数が評価の基礎になってしまいます．情報科学研究科では毎年の個人評価で研究・教育などの業績評価を行っています．これは法人化の際の目玉政策の一つとして前々研究科長の佐々木公明先生が熱心に提案して実現したものです．工学系，数学系，文系の分野にまたがって論文業績を評価することはものすごく難しいことです．以前に北大であった話ですが，論文数で比較すると数学系が工学系より絶対に不利になるので，延べページ数を延べ著者数で割った値で比較することにしたら，数学系が逆にすごく有利になったそうです．数学では長い論文が多いし，単著か共著でも２人くらいが多いからです．こんな具合ですから，運営会議のメンバーの先生方は，分野の特徴も考慮して評価しなければならないわけで，大変苦労されていると思います．また今の世の中では，科研費の獲得のためには論文を書き続けなければならないという現実があります．昔の仕事でいくら名声があっても，最近５年の業績が必要だからです．私も科研費の申請と報告のせいで，１年に２，３編は論文を書かないといけないというプレッシャーを感じてしまいます．こんな調子だから碌な論文が書けないのだと思いますが，プレッ

シャーが無ければ多分もっと酷いかもしれません．昔安藤先生に「年に３編論文を書くつもりでも１編くらいしか書けないものだ．年に１編書けばよいと思っていたら一つも書けないですよ」と言われたのを思い出します．

セレンディピティ

この言葉を知ったのは 15 年以上前で，故中村正弘先生の著作でだったと思います．中村先生は大戦直後に仙台の作用素環スクールを立ち上げた人で，私の恩師梅垣先生の先生筋に当たります．大阪教育大で多くの作用素環・作用素論の研究者を育てられました．探偵小説作家「天城一」としても著名です．(中村先生は推理小説という言葉より探偵小説の方を好まれたようです.）探偵小説作家としては，プロの作家やマニアにだけ有名で大衆作家ではありませんでしたが，2007 年に亡くなる数年前にサイエンス社から出た「天城一の密室犯罪学教程」が別冊宝島の「このミステリーがすごい」でその年の３位になり，一躍ブレークしました．第５回本格ミステリ大賞の評論・研究部門も受賞されました．探偵小説作家として有終を飾ったことでご本人も満足されたと思います．とても博学で博覧強記の人で手紙魔でした．私もたくさんの手紙をいただきました．一言二言コメントすると，即座にその１０倍もの説明あるいは反論が返ってきて，自分の無知ぶりを窘められたものです．数学者であれだけの多才は珍しいと思います．本業の数学と余技の探偵小説以外に，和算研究で新説を打ち出したことでも有名です．随分昔に一度しかお会いできなかったのは残念なことでした．東京であった数学会の折りの現代数学史研究会の会合で「ワイマール文化と数学」の話題で講演に来られたときに，梅垣先生と何処かのホテルでちょっとだけお会いしたように記憶しています．因みに現代数学史研究会というのは，ユニタリ表現論で有名な杉浦光夫が主宰していた研究会で数学会の折りに講演会などを開催していましたが，最近はこの会の話は聞かないので自然消滅してしまったようです．

閑話休題，最近はセレンディピティという言葉をときどき見かけるようになりました．例えば,「ノーベル賞の仕事の多くはセレンディピティによるものだ」と何処かで見たように思います．恥ずかしいことですが，私はこの言葉の意味を最近まで誤解していました．学者の場合で言えば，一所懸命に研究すれば神様がご褒美に幸運を授けてくれるということ，いわゆる天啓を授かるという感じだと思っていました．果たして数学にこの意味でのセレンディピティはあるだろうか．もしあるなら，私の場合 40 年も数学をやっているのだから，一回くらいはセレンディピティが起こって大発見をするということがあってもおかしくないのだが，たまに証明のアイデアがはっと閃くことはあっても，天啓と呼べるものでは全然ありません．遅かれ早かれ思いつく程度のものだったという感じです．他の数学者の仕事ぶりを見ても，解ける必然でもって解く，証明すべくして証明するという風に見えます．数学ではたまたま運が良くて問題が解けたということはほとんどないようです．しかし最近になって，セレンディピティは「セレンディップの３人の王子」という童話に因んだ言葉で（セレンディップは

現在のスリランカのこと），本来は，探しているものとは別の価値あるものを見つける，あるいは失敗してもそこから新しいことを学び取る能力・才能を意味するのだと知りました．これの例として，ノーベル賞を受賞した田中耕一さんの仕事がよく引き合いに出されるようです．念のために言いますが，中村先生の著作はアインシュタインの相対性理論の歴史的背景に関するもので，セレンディピティを考察したものではありません．著作の中に2，3回出てきたこの言葉の意味を私が勝手に誤解してしまっただけなのです．この本来の意味でなら，数学でもセレンディピティはしょっちゅう起こっているような気がします．数学者の中には考えた問題がすべて上手く解けるという人もいるかもしれませんが，ほとんどの数学者は下手な鉄砲でも数打ちゃ当たる式ではないかと思います．私の場合でも，自分で思いついたり人から聞いたりした問題を次々と試してみますが，ほとんどの場合上手く行きません．成功するのはよくて10に一つくらいではないかと思います．実際のところ，問題が先にあってそれを解こうとしてもなかなか成功するものではありません．むしろ，新しくて有効な手法・技術を自分のものにした後から，それで解ける問題を探すというやり方で成功する方が私の場合多いようです．証明がかなりいい線まで行ったのに結局上手く行かなかった場合は失望感と未練が残ります．このような場合，できたところまでの弱い結果で論文を書いたり，定理を証明できる形に改竄したりということはよくやることです．これも消極的な感じではありますが，失敗から学ぶというセレンディピティの一種かもしれません．それから，失敗するにしろ成功するにしろ，一つの問題を考えたことから別の問題が派生してくるということは，数学では日常的に起こります．そんなわけで，セレンディピティの能力は数学では意外と重要なことかもしれないと思います．

長の付くものになってはならない

大学の仕事は研究・教育が中心ではありますが，当たり前のことに管理・運営の仕事なしには済みません．管理・運営の仕事と言ってもピンからキリまでありますが，まとめて雑用と呼ばれることが多いです．一般的に言って雑用は嫌われます．好んでやる人は滅多にいません．だから大学ではいろんな雑用が輪番制になっているのでしょう．もちろん，研究科長や副研究科長などの仕事は無茶苦茶大変で雑務と呼べるものではないし，使命感なしにはやれるものではありません．平成16年に国立大学法人化がスタートしました．それに先立つ平成14–15年に法人化に伴う情報科学研究科の組織・運営のあり方を検討するために法人化WGというものができました．当時の研究科長は猪岡先生で，法人化WGの委員長は丸岡先生でした．私は平成14年度にたまたまシステム専攻長を務めていましたので，その流れで法人化WGの委員の一人になりました．法人化後の研究科の全般にわたって検討する必要があり大変な仕事であったと思います．その中で例えば，研究科の運営は運営会議が中心になり，運営会議メンバーが各委員会の委員長を兼ねて運営の仕事は運営会議メンバーに集中させるという案や，毎月やっていた教授会を年5回に減らすことなどが検討されました．つまり運

営会議メンバー以外の教員の時間を確保して研究にできるだけ集中してもらうというわけです．私は運営の仕事が自分に振られるとは予想だにしなかったので，これはとても良い案だと思ったものです．ところが，法人化後の研究科長に決まった丸岡先生から，教務・入試担当で運営会議に入ってくれと言われたのには吃驚仰天しました．人間には領分というものがあります．私は子供の頃から人前に出るのが大の苦手でした．人前で話をするとなると，とても上がってしまい頭が空白になって言葉が出なくなってしまいます．これだけは年を重ねても治りません．ですから，私は先天的に司令官の器ではないと思っています．「参謀役としてならお役に立てると思いますが，運営会議のメンバーは無理です」と言って断りました．しかし丸岡先生は私が本心で断ったとは思ってくれなかったようで，結局２年間運営会議の仕事をする羽目になりました．多分，法人化 WG での議論の事情を詳しく知っている人が望ましいということであったのでしょう．法人化 WG に入ったのが運のつきというわけです．２年間運営の仕事と数学の研究を両立させようと頑張ってみましたが，結局どちらも上手く行かなかったようです．運営の仕事に集中すればもう少しましだったかもしれませんが，もともと能力的に無理だったと思います．数学をする時間が減ったのはかなりストレスになったようで，２年間気管支喘息と不眠症に苦しみました．その後気管支喘息は軽快しましたが，ステロイドの吸引剤は必需品になりました．外国出張のときは必ず持参します．この薬は本来予防薬で即効性はないのですが，発作が出そうなときに吸引すると気分が楽になって収まるようです．私の気管支喘息はどうも精神的な要素が強いようです．運営会議の仕事は楽しくはありませんでしたが，今となっては自分には珍しい経験をさせてもらったと思っています．

大学の先生には３種類のタイプがあると冗談半分に言われることがあります．

- 研究も雑用もできる
- 研究はできるが雑用はだめ
- 雑用はできるが研究はだめ

の３つのタイプです（正確には４タイプというべきかもしれませんが）．工学系では研究も雑用もできる人が圧倒的に多いように思います．実際そういう人でないと大学で生き残れないようです．数学では３つのタイプが共存しているように見えます．もちろん数学者でも一般的には研究能力と雑務能力には正の相関があるのは間違いないですが，逆の場合も結構あるようです．数学では，雑用が全くだめでも研究がすごく良ければ許してもらえるという事情があるように思います．ただ，世の中には上には上がいるもので，本当は研究と雑用の両方に大変有能であるにもかかわらず，雑用がだめな振りをする人もいるようです．雑用ができないという評判が定着すると，面倒な雑務が回ってこなくなるので研究に集中できてよいというわけです．私は自分の研究

にそれほど自信がないし，雑用がだめな振りをするなどという芸当はとても無理です．私は大学の先生の給料が高すぎると思ったことはありませんが，給料分だけの仕事を自分はしていないとずっと思ってきました．何となく負い目があるので，（いい子振るつもりはないのですが）雑務を頼まれれば自分にできることである限り何でも引き受けてしまうようです．仕事時間について言えば，私は寝て食べる時間と講義とセミナーなどの時間を除いた残りは数学をしています．一日の半分は数学を考えています．これをすべて労働だと思えばすごい労働時間になりますが，私には趣味か遊びでしかありません．一度もテレビを持ったことはないし，新聞も喫茶店でしか読まないし，他にすることがないから大学にいる以外は自宅か喫茶店で数学をして時間を潰している感じです．若い頃はたくさんの小説を読んだし映画もたくさん観たのですが，ある時から興味がなくなりました．村上春樹の初期の作品を読んで面白いと思わなくなった頃から小説を読まなくなったような気がしますから，多分 40 歳少し前からでしょう．そんなわけで，趣味の数学で給料をもらうのにずっと負い目を感じてきました．

雑用が多くて論文が書けないという話を聞くことがときどきあります．これは半分は本当で半分はウソであると思います．雑用が多いと言っても空いている時間はいくらでもあるので研究ができないわけはありません．だから雑用が多くて研究ができないというのは言い訳に過ぎないことが多いです．しかし数学は，ゆったりした時間の中で問題をぼんやり考えたり，ああでもないこうでもないと思索したりしないと良いアイデアが出てこない学問です．私の場合，証明のアイデアが思い浮かぶのは，寝入りばなか寝覚めてぼんやりしているときか，町を歩いているときが多いです．ときどき夢で証明ができることがありますが，起きてから試してみると必ず，不等号を逆向きにするなどのつまらない間違いをしています．数学では，自由な時間がたっぷりないと革新的な論文は書くことができないのは確かです．そうですから，数学の研究で名を成したいなら，何とか委員長などの雑務はできる限りしてはいけないのだと思います．でも給料を貰っている身分としては，そんな風にはなかなか行かないようです．

老人と数学

昔読んだ外山滋比古の「思考の整理学」という本に次のようなことが書いてあったのを憶えています．「研究者人生はグライダー飛行に似ている．グライダーはまず急上昇した後，ゆっくりと降下していく．飛行距離は最初にどれだけの高さまで上昇するかで決まる．研究者も 40 歳くらいまでは上昇過程にあるが，その後はしだいに降下過程に入る．」つまり，長い間一線で活躍するには，若いときにできるだけ高みに昇っておかなければならないということです．私の若い頃は博士に進学しても修了する前に助手になるのが当たり前でした．助手の間にじっくり勉強して，論文がたまったところで論文博士を取るのが普通でした．今の若い人達は課程博士を取らないと生き残れないし，学振 PD になるのに急いで論文を書かないといけません．数学の中身が高度に細分化されて，どの分野でも一線のレベルに達するまでの修行が長くなっているの

に大変なことだと思います．しかしそうであっても，40 までは勉強・修行の時代だと考えて数学の力を蓄えることが大事だと思います．私が学生の頃，ある先生から数学をずっとやりたいなら，自分の専門分野とは全く違う分野をもう一つマスターしておくのがよいと言われました．私がやっている数学は関数解析学と呼ばれる分野ですが，最近になって幾何（特に微分幾何）の分野をもっと勉強しておけばよかった思うことがしばしばあります．作用素論で幾何に関連した話題にも興味があるのですが，微分幾何の常識を知らないので困ることが多いのです．それとは別に，物理（特に量子力学）の勉強をもっとしておくべきだったと悔やまれます．物理学者が数学者に転向して（あるいは２足の草鞋を履いて）成功した例は多いですが，逆はほとんど知りません．その意味では物理は数学ほどには開かれた学問ではないようです．量子力学の本当の感覚を身につけたいと思いますが，年取ってからでは不可能だと感じます．

自分自身のことを言うと，数学を考える力は 40 代前半が一番あったことは間違いありません．40 代後半以降も数学の知識が増えたし，数学をやる要領が良くなったことでカバーできました．しかし 50 代後半になってからは，さすがに数学の新しいことが身につかなくなって，昔の遺産だけで商売するようになりました．情けないと思いますが，これが老化ということなのでしょう．退職後はできればまだ知らない数学を勉強してみたい気もしますが，頭と体力がついて行かないかもしれません．数学は金も設備も一切不要で，暇と紙と鉛筆（私の場合４色ボールペンを愛用しています）があればできるので，退職後の老人には打ってつけの学問だと思います．私の身近に知っているお年寄り（ちょっと失礼な言い方かもしれませんが）の数学者は皆さんとても元気がよいです．仙台には境先生と竹崎先生がお住みで，元気に数学の研究を続けておられます．境先生が 80 歳を過ぎてなおかくしゃくと研究されているのには驚嘆します．安藤先生，荒木先生，富山先生も皆さん現役を続けておられます．私も見習いたいが自信がありません．大体私はそんなに長生きできるとは思えませんし，数学の実力が諸先生方とは比べようもなく劣っています．それでも他には何の趣味もないので，死ぬまで好きな数学をやれたら本望です．最後に現在の心境を一言で述べるなら，ありきたりですが

少年易老学難成

でしょう．