氏名・(本籍)	清水　悟（しみず　さとる）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第　1043　号
学位授与年月日	昭和63年3月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 （博士課程）数学専攻
学位論文題目	Automorphisms and equivalence of bounded Reinhardt domains not containing the origin （原点を含まない有界ラインハルト領域の自己同型と同値性）
論文審査委員	（主査） 教授　黒田　正　　教授　佐武一郎 教授　堀田良之

論文目次

論文内容要旨

本論文の目的は，群論的方法により，有界ラインハルト領域に関する正則同値問題に解答を与え，さらに原点を含まないある種の有界ラインハルト領域の正則自己同型を決定することである。

リーマンの写像定理は，複素平面の中の境界点を2点以上もつ単連結な領域がつねに単位円板と正則的に同値であることを主張する。C^2の中の球と多重円板が正則的に同値でないというポアンカレの定理は，リーマンの写像定理が高次元において成立しないことを示しており，高次元の複素有界領域の自己同型や同値性の研究の端緒となった。現在までに，多くの興味ある方法が複素有界領域の幾何学の研究のために開発されている。例えば，もし与えられた領域が強擬凸で滑らかな境界をもつならば，フェファーマンの定理（1974）によりその自己同型や同値性の研究は，境界に付随したある微分幾何学的不変量の研究に帰着される。田中（1967），チャーンとモーザー（1975）はそのような不変量がいかに計算されるかを示している。また群論的方法の基礎は，複素有界領域Dの正則自己同型全体のなす群Aut(D)がコンパクト－開位相に関してリー群の構造をもつというアンリ・カルタンの定理（1935）により確立された。この方向における著しい結果のひとつとして，任意の等質有界領域がジーゲル領域として実現され，その実現の仕方はアフィン変換による同値性までこめれば一意的であるというジンディキン，ピアテッキィーシャピロそしてヴィンバーグの定理（1963）がある。カウプ，松島そして落合（1970）は階別リー環の理論を用いて一般ジーゲル領域の理論を展開し，より一般な立場からジーゲル領域の同値性などを論じた。本論文における方法はカルタン以来のこの流れに基づく。

さて，有界ラインハルト領域の自己同型や同値性の研究の歴史的経過を述べておきたい。C^nの中のラインハルト領域とは，C^nの中の各座標軸に沿った回転により不変な領域である。1次元の有界ラインハルト領域は，円板，穴あき円板あるいは円環と一致する。これらの自己同型や同値性は古典的によく知られている。高次元の原点を含む場合の研究はラインハルト(1921)に始まる。トゥルレン(1931)は2次元の原点を含む領域を分類することに成功し，とくにトゥルレン領域と呼ばれる重要な型の領域を発見した。トゥルレン領域はその後成木（1968）により高次元へと一般化される。彼は群論的見地からそのような領域の無限小自己同型や同値性を考察し，また伊勢（1974）は成木の結果の幾何学的解釈を与えた。成木の扱った領域は原点を含む場合の研究における基本的モデルとなっている。一般の原点を含む有界ラインハルト領域に関する正則同値問題は，それらの自己同型の決定とあわせて，砂田（1978）により，成木のアイデアに基づいて解決された。他方，高次元の原点を含まない場合には，ベッドフォード(1980)，バレット（1984）らの研究がある。彼らのアプローチは解析的であり，手法上扱う領域にある種の境界条件が伴っている。

C^nの中のラインハルト領域を定義するためには，C^nにおける座標の存在，つまり複素ベクト

ル空間と見なされたC^nの Q-構造の存在が必要である。その意味でラインハルト領域は自然に代数的構造を付与されている。我々の議論，結果は，ラインハルト領域の代数的構造がラインハルト領域のもつ大域的な解析的性質を統制するという現象の一例を与えている。

以下順を追って本論文の内容を述べることにする。

第1節　準　備

この節では，記号，用語，後で必要とする有界領域に関する基礎的な結果を集める。

第2節　ラインハルト領域に関する基礎概念

$T=(U(1))^n$と書く。ここで$U(1)$は1次のユニタリー群，すなわち絶対値が1の複素数がなす乗法群を表す。もしDがC^nの中のラインハルト領域ならば，群TはDに，座標成分ごとの積により，正則変換群として作用する。Tより誘導されるAut(D) の部分群をT(D) で表そう。さて，T(D)-軌道の次元の最小値をtとおく。tは0からnの間の整数値をとるラインハルト領域Dに付随した基本的不変量である。例えば，Dが原点を含むのは$t=0$のときに限り，Dが$(C^*)^n$に含まれるのは$t=n$のときに限る。

次の概念は我々の研究において非常に重要である。定義：$(C^*)^n$の代数的自己同型とは，その成分がローラン単項式で与えられる$(C^*)^n$の正則自己同型である。

C^nの中の2つのラインハルト領域DとD′の間の双正則写像$\varphi : D \to D'$を考えよう。φがTのD, D′への作用に関して同変であるための必要十分条件はφが$(C^*)^n$の代数的自己同型より誘導されることであるということが示される。ラインハルト領域の間のT-作用に関して同変な双正則写像は，ラインハルト領域のカテゴリーにおける自然な射と考えられるので，つぎの定義を導入する。

定義：C^nの中の2つのラインハルト領域は，それらの間に$(C^*)^n$の代数的自己同型より誘導される双正則写像があるとき代数的に同値であると呼ばれる。

この節では，他にラインハルト領域とチューブ領域との対応，ラインハルト領域の対数像，ラインハルト領域上の正則関数のローラン展開とその2，3の帰結などを論ずる。とくに，ラインハルト領域上の正則関数がローラン展開をもつという事実は，ラインハルト領域の解析的構造と代数的構造を結びつける役割を果たすという意味で重要である。

第3節　2つの命題

前節の研究に引続いてラインハルト領域に関する2つの基礎的な結果を証明する。最初の結果は2つのラインハルト領域の間の双正則写像が$(C^*)^n$の代数的自己同型より誘導されるための判定条件を与えるものであり，第2の結果は有界ラインハルト領域の線型自己同型のなす群の構造に関するものである。

第4節　ラインハルト領域の同値性

第2節の考察より，ラインハルト領域に関する正則同値問題とは，ラインハルト領域の正則的同値性と代数的同値性との関係を調べる問題であると定式化するのが自然であろう。もし2つのラインハルト領域が代数的に同値ならば正則的に同値であることは定義から明らかであるから，逆の成立が問題となる。次の定理は有界ラインハルト領域に関する正則同値問題に解答を与える。

定理1　もしC^nの中の2つの有界ラインハルト領域が正則的に同値ならば，それらは代数的に同値である。

上の定理を領域が原点を含む場合に適用すればよく知られた砂田の結果を得る。さて定理1を証明するためにはつぎの命題を証明すれば十分である。

命題2　もしφ：$D \to D'$がC^nの中の2つの有界ラインハルト領域DとD′の間の双正則写像ならば，φはAut(D′)の単位元を含む連結成分G(D′)に属するD′の正則自己同型と$(C^*)^n$の代数的自己同型との合成として表せる。

系　もしDがC^nの中の有界ラインハルト領域ならば，Aut(D)はG(D)・Aut_{alg}(D)と一致する。ここでAut_{alg}(D)は$(C^*)^n$の代数的自己同型より誘導されるDの正則自己同型全体のなす群を表す。

命題2はT(D), T(D′)の群論的特徴づけとリー群論における共役性定理を用いて示される。命題2の系の見地から，有界ラインハルト領域Dの正則自己同型の決定においては，G(D)に属する正則自己同型の具体的記述が主たる関心事となる。

第5節　ラインハルト領域上の正則ベクトル場

Dを$(C^*)^n$の中のラインハルト領域とし，H(D)によりD上の正則ベクトル場全体のなす複素リー環を表す。T(D)に対応するH(D)の可換部分環をt(D)とする。この節では，H(D)のt(D)を含む有限次元の実部分環の構造を調べる。結果は次節において，t=nなるn次元の有界ラインハルト領域の正則自己同型を決定するために使われる。

第6節　t=nなるn次元ラインハルト領域の自己同型

t=nなるn次元の有界ラインハルト領域，すなわち$(C^*)^n$の中の有界ラインハルト領域の正則自己同型の研究においては，研究の対象にその対数像の凸包が直線を含まない領域まで含めることがより自然である。この節の目的はつぎの定理を証明することである。

定理2　もしDが$(C^*)^n$の中のラインハルト領域でその対数像の凸包が直線を含まないならば，G(D)はT(D)と一致する。

定理2の証明は背理法で行い，議論を1次元の場合に帰着させるという方法をとる。

第7節　$t=1$ なる2次元ラインハルト領域の自己同型

本論文の残りは，C^2の中の $t=1$ なる有界ラインハルト領域Dの正則自己同型の決定に費やされる。この節ではG(D) -軌道の様子に着目してG(D) の構造を調べ次節の準備とする。

第8節　$t=1$ なる2次元ラインハルト領域の自己同型（続き）

C^nの中の有界領域Dにたいして，G(D)-軌道の次元の最小値をhとおく。hは双正則不変量であることに注意する。

定理3　もしDがC^2の中の $t=1$ なる有界ラインハルト領域ならば，hの値は1または3に等しい。

$h=1$ のとき，つぎの主張が成り立つ。

定理4　もしDがC^2の中の $t=1$ かつ $h=1$ なる有界ラインハルト領域ならば，G(D) はT(D) と一致する。

$h=3$ のときを考えよう。C^2の中の $t=1$ かつ $h=3$ なる有界ラインハルト領域はかなり限られたものになる。実際，定理5において，そのような領域は3つの型 i)からiii)に分類され，おのおのの型の領域Dに対してG(D) の構造も完全に決定される。 i)の型の領域はトゥルレン領域から内部をくり抜いて得られるものであり，iii)の型の領域は穴あき球あるいは球殻と一致する。ii)の型の領域が原点を含まない場合に特有の領域で，例えば超越的な正則自己同型をもつ。

論文審査の結果の要旨

一次元複素ユークリッド空間で少くとも二つの境界点をもつ単連結領域はつねに単位円板に正則的に同値である。この事実はリーマンの写像定理そのものにほかならない。然しながらこの定理の高次元の場合へのそのままの形での拡張は不可能であることも周知の事実であって，高次元複素ユークリッド空間における有界領域の正則自己同型や有界領域の間の正則同値性を調べることが問題とされてきた。

本論文においては，高次元複素ユークリッド空間におかれた，原点を含まない有界ラインハルト領域を主たる研究対象としつつ，有界ラインハルト領域の正則同値性および正則自己同型が，それに自然に附与されている代数的構造の解析によって詳しく調べられている。

まずn次元複素ユークリッド空間から原点を除いてえられる領域C^{*n}の正則自己同型であってかつその各成分がローラン単項式で与えられるものをC^{*n}の代数的自己同型ということにし，n次元複素ユークリッド空間内の二つのラインハルト領域が代数的同値であることを，それら二つの領域間にC^{*n}の代数的自己同型から誘導される双正則写像が存在することと定義する。このような定義のもとで，リー群論における共役性定理を用いることによって，n次元複素ユークリッド空間内の二つの有界ラインハルト領域が正則的に同値となるためには，それらの領域が代数的に同値であることが必要にしてかつ十分であるという事実が証明される。この結果は原点を含む場合における砂田の定理の拡張に当っており，また解析的手段によるベッドフォード，バレット等の結果を完全に含んでいる。

ついで二次元ラインハルト領域の自己同型が論ぜられ，二次元ラインハルト領域の完全な分類がえられており，その結果として超越的正則自己同型をもつ原点をふくまない二次元ラインハルト領域の存在が示されている。この結果は甚だ興味深いものであって，極めて注目すべき事実であろう。

また参考論文では，二次元等質ケーラー多様体，チューブ領域および等質凸領域についての興味ある結果がえられている。

以上本論文においてえられている諸結果は高次元複素解析の研究に重要な寄与をしたものであり，理学博士の学位論文として合格である。