論　文　内　容　要　旨

氏　　名	千頭　昇	提出年	平成　26 年
学位論文の 題　　　目	Well-posedness in the critical space for the compressible Navier-Stokes equations and related problems (圧縮性 Navier-Stokes 方程式と関連する問題の臨界空間に おける適切性)		

論　文　目　次

流体力学の基礎方程式は流体密度，流体運動量，エネルギーに関する各保存則から構成される．熱流束密度が温度勾配に比例するという Fourier の法則を仮定した状況においては，圧縮性粘性 Newton 流体は，圧縮性 Navier-Stokes 系に支配される．以下で圧力が密度のみに依存するという条件の下で，密度と流速のみを未知函数とする単純化された系を考える．これはバロトロピック圧縮性粘性流体を記述する簡略化モデルである（以下（BCNS）と呼ぶ）．この方程式系(BCNS）に初期値を与え，Euclid 空間における初期値問題の Hadamard の意味での適切性を考える．Hadamard の意味での適切性とは，与えられた初期値に対し適当な空間における 1.）解が時間局所的に存在し，2.）その解が一意的であり，3.）初期値に対して解写像が連続的に依存することである．この時，問題（BCNS）は時間局所適切であるという．

問題（BCNS）は，圧力項を無視すれば特定の尺度変換により不変となる．方程式を不変に保つ尺度変換でノルム不変となる函数空間を尺度臨界空間と呼び，Fujita-Kato による非圧縮性 Navier-Stokes 系の研究以来，臨界空間で方程式の適切性を示すことは指導的原理として知られている．問題（BCNS）における密度の保存則を表す“連続の式”は双曲型偏微分方程式に分類され密度関数の時空有界性を得ることが強解の適切性のために必須となる．臨界空間として斉次 Sobolev 空間（ s 次分数階微分が p 乗可積分となる函数全体の空間）を考えると，非線形項の評価に必須である 2 つの函数の積の評価が閉じず，さらに有界性を保証する Sobolev の臨界埋め込みが破綻するといった本質的困難が発生する．Danchin は Besov 空間（Sobolev 空間の実補間空間）を用い，(BCNS）の時間局所的な解の存在と一意性を示した．臨界斉次 Besov 空間

は有界な函数に埋め込めるため，函数同士の積について閉じた Banach 環となる．これらの結果を受け，本博士論文においては，圧縮性粘性流体の n 次元 Euclid 空間における初期値問題の適切性について，未知関数の初期条件の仮定をどこまで弱められるかという問題と，ポテンシャルなどの外力は解にどのような定量的・定性的影響を及ぼすか，という 2 つの問題を中心に考察を行った．特に密度によって定まる自己誘導ポテンシャルによる外力が運動量保存則に作用している状況を考え，その初期値問題の適切性を臨界型 Besov 空間において考察した．また，熱力学的量を系の時間発展に含めた圧縮性粘性流についても尺度臨界空間における時間局所的適切性を考察した．本論文での成果は，流速が空間無限遠方で 0 に減衰し，密度に関しては空間遠方で正定数に近付き Euclid 空間全域で真空にならないという状況を想定している．

第 1 章においては，圧縮性粘性流体に関する既知の結果の外観を述べ，以降の章における主定理を紹介した．第 2 章においては以降の章において重要となる解析的道具を述べた．

第 3 章では，バロトロピック条件下の圧縮性粘性流体の方程式系に対して一般に適用できる爆発判定条件を考察した．バロトロピック条件下の圧縮性 Navier-Stokes 系は様々な流体力学的状態を近似するモデルであるが，特に，流体の密度に依存する湯川型のポテンシャル力が作用している問題を考える（以下，（NSY）と呼ぶ）．これは核物理学における量子流体の運動の近似モデルとして Ducomet (2001) によって導入された．湯川型ポテンシャルは Fourier 像の空間で表象が斉次性を持たない Bessel ポテンシャルで表されるので，特に非斉次 Besov 空間が解空間の選択として適切である．本章では 2 次元以上の Euclid 空間において湯川型ポテンシャル付きの圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題を尺度臨界型の非斉次 Besov 空間において考察し，密度函数が狭義正値でありかつ無限遠方で定数に近づくという仮定の下で，解の時間局所存在と一意性を示した．さらに，(NSY) の時間局所解が，いつ時間大域的に延長できるかという解の接続問題を考察した．調和解析的手法により非斉次 Besov 空間における Littlewood-Paley 射影作用素と移流項との交換子評価を改良し，臨界型対数 Sobolev 不等式を組み合わせることで，運動方程式に対するエネルギー型の先験的評価を精密化し，流速の微分に関する爆発判定条件のノルム位相を斉次 Besov 空間としては最も広い臨界クラスまで弱めた．これは，非圧縮性 Euler 方程式に対するいわゆる Beale-Kato-Majda 型の爆発判定法の精密化に対応するものであり，(NSY) のみならず(BCNS)にも適用可能である．

第 4 章では，バロトロピック条件の下，密度に依存する Coulomb ポテンシャルによる外力を流体の運動量の釣り合いに含めた，圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 系(以下，(NSP) と記す)の初期値問題を考察した．(NSP) は半導体モデルの電荷の移動や，重力支配下の星間気体物質の流体力学的運動等の近似モデルとしてよく知られている．特異的な Coulomb ポテンシャルを運動量の釣り合いに含めることは方程式の尺度不変性を低周波領域において崩すため解の正則性に影響を与え，（BCNS）の臨界空間だけでは解を得ることが困難である．既存の結果における時間大域解の解空間は (BCNS) の臨界空間に，ポテンシャルの影響を補うために初期値の小ささと付加的な正則性を課したものである．本章では時間局所的には初期値の小ささを仮定せず，臨界型の Besov 空間のクラスを広くとることができることを示した．その際，流速の特性曲線を用いた Lagrange 座標系による定式化で適切性の問題を考察し，尺度臨界型 Besov 空間におけ

る（NSP）の時間局所解の存在と一意性，解写像の初期値に対する連続依存性を得た．この結果は，既存の結果に含まれない 2 次元 Euclid 空間の場合も含む．さらに，時間局所的には流体の特性曲線が 1 階連続的微分可能な微分同相写像であることから，特性曲線の逆写像を用いて元の Euler 座標系の解に変換することができ，これにより Euler 座標系における問題（NSP）の解の存在と一意性も示せる．証明の中核をなすのは解の低周波領域と高周波領域に対して異なる正則性を課す混合型 Besov 空間の適用である．このような空間における流速場の放物型先験評価を導出する際に，高周波領域に対しては正則性が 2 階増加する通常の放物型正則性を得るが，低周波領域に対しては正則性の増加を 1 階に留めることで，積の評価が許す限界指数まで解空間を拡張した．

第 5 章においては，圧力に対する状態方程式として，第 3，4 章のバロトロピック条件に替わり，密度と温度両方に依存する圧力項に拡張し，初期値問題の臨界 Besov 空間における適切性を考察した．このような仮定の下では，圧縮性流体を表す系は，密度と流速場のほか，熱力学的量（温度もしくはエネルギー）を表す未知関数を持つ圧縮性 Navier-Stokes-Fourier 系（以下，(CNSF）とする）となる．熱力学的動態を系の時間発展に含めた（CNSF）にもバロトロピック粘性流体と同様に尺度不変性があり，対応する臨界空間が自然に考えられる．これに対しては，Euler 座標における限定的な臨界 Besov 空間における時間局所的適切性の結果が知られている．Euler 座標で考察する場合，臨界指数を持つ Besov 空間における解の存在を示すには，先験評価による近似解の一様有界性を示し，弱コンパクト性を用いて Schauder 型の不動点定理を適用する．しかし，解の一意性を示す際には二つの解の差の評価を行う必要が生じるため，積の評価の限界により一意性の成立する関数空間は存在のそれより弱いクラスしか選べない．二つの解の差の評価を弱いクラスで行う必要があるのは，連続の式が双曲型方程式であるため，差の式を作る際に生じる密度に関する可微分性の損失を回復できないことに起因する．この困難を回避するため，流体の“質点系”に対応する Lagrange 座標系を用いて，密度に対する方程式を線型化する手法により，適切性の成立する関数空間を広げた．証明において本質的な点は系の定式化にある．既存の結果では熱力学的量として，温度や古典的なエネルギーを用いていたが，Lagrange 座標系に書き直した上，従来用いられていない新しいエネルギー量を定義することで既存の物理量を用いては不可避だった技法的な種々の難点を克服することができ，Lagrange 座標系においてはより広いクラスの臨界空間における適切性が成り立つ．

論文審査の結果の要旨

気体や流体など連続体の動力学を記述する基礎方程式は，質量保存則（連続の式）と運動量のつり合いに加えてエネルギー保存則や場の量による力の変動を加えた基本方程式系である圧縮性 Navier-Stokes 方程式系で与えられる．密度が時空変数に依存しない問題，いわゆる非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題に対しては 1960 年代にさかのぼる Fujita-Kato の原理により，問題が保つスケール変換不変性に基づき，その変換で不変な函数空間で考えることにより，強解の時間局所存在と小さい解の時間大域存在と適切性が自然に得られるという著しい性質が知られている．こうした空間を臨界空間と呼ぶが，より一般のモデルである圧縮性の各種の問題では，こうしたスケール変換が直接

観察できないため，長く臨界空間における可解性の議論は困難であった．R.Danchin はこの問題を実補間空間の端点空間を導入して初めて示したが，関連する様々な流体力学的設定を付加したモデルにおいては，多くが未解決のまま残されていた．

本博士論文おいては，これら未解決問題のうち 3 つのモデルに対して重要な知見が提示されている．本文第３章において中性子流体に対する Yukawa 力を想定して導出された圧縮性 Navier-Stokes-Yukawa 方程式系に対して非斉次実補間空間の端点空間と低周波と高周波の構造を巧みに用いた手法でその時間局所強解の存在と一意性を証明した．この問題は運動量のつり合いに密度から定まる Yukawa 型ポテンシャル力が作用する問題であって，ポテンシャルの相互作用を考慮しても圧縮性 Navier-Stokes 系の臨界可解性が安定に導かれることを示したものである．

さらに第４章においては，３章で考察した自己誘導ポテンシャルを持つ等温条件下での圧縮性 Navier-Stokes 方程式に Poisson 方程式によるポテンシャルを考慮した問題を考え，Lagrange 座標系に変換する手法で，想定される臨界と考えられるクラスでの時間局所可解性と一意性を証明した．この問題は低周波領域のスケール構造と高周波領域でのそれが異なり，臨界性の相互干渉が問題を複雑にする要因となるが，精密な周波数解析と非線形干渉の評価と端点最大正則性を巧みに組み合わせ証明を得ている．

第三の問題として質量保存則と運動量保存則に加えてエネルギー保存則を含むいわゆる圧縮性問題の全システムに対して，臨界空間での強解の存在と一意性を，予想される実補間臨界空間のすべての指数に対して証明した．ここでは従来空間多次元ではあまり用いられなかった Lagrange 座標系を導入し，双曲型の困難を持つ質量保存側の問題を時間定常問題に帰着する方法で双曲型方程式独特の困難を回避している．この方法はこうした利点の反面，流速と温度の方程式が準線型放物型方程式に変換され，より取り扱いが困難になることが難点であった．本論文５章において,その困難を克服するための変数係数端点 L1 最大正則性を導出し，さらに新しいエネルギー量を定義することにより，この部分を解決し，予想される臨界ぎりぎりの可解性と一意性を示した．これより広いクラスでの可解性は反例が知られており，得られた結果は Fujita-Kato 原理で得られると想定される成果の最終形であり，この結果により圧縮性粘性流体の Fujita-Kato 理論は完成されたといえる．

以上に述べたように本学位論文に含まれた内容は，いずれも卓越しており，申請者が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している．

したがって，千頭 昇提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める．