論　文　内　容　要　旨

氏　　名	井澤　昇平	提出年	平成２６年
学位論文の 題　　　目	Matrix Product Decomposition of Algebras （代数系の行列積分解）		

論　文　目　次

本博士論文は代数系の一般論を取り扱う。本論文で言う代数系とは一つの集合とその集合上の演算の集合の対のことである。

代数系の一般論の研究の流れは次の二つに大別することができると思われる。

・集合を固定し、そこに入る演算の構造にどのようなものがあるかを調べること。

・演算の個数および項数（引数の数）を固定し、それに該当する代数系のクラス全体にどのようなものがあるかを調べること。

前者の典型的な研究は与えられた集合上の「合成に閉じた」演算の集合の分類であろう。空集合や一点集合上の合成に閉じた集合は自明なものしかなく、二点集合上の合成に閉じた集合は 1941 年にポストによりその分類が完成された。三個以上の元を持つ集合上の閉じた演算集合の分類は未だなされていない。

本論文に関係する後者の研究例としては代数系の圏の（代数的な）記述の探求が挙げられる。

演算の個数と項数が固定されると、演算と可換なものとして代数系同士の間の写像が準同型であることが定式化される。代数系のクラスに対してそれに属する代数系を対象、その間の写像を射とする圏が考えられる。適当な条件をみたす代数系のクラス二つに対し、それらの圏が圏同値になるための条件の代数系のクラスの、演算の言葉による特徴付けがマケンジーにより知られている。

次に本博士論文の核となる、カーンス導入された理論の枠組みを説明しよう。

本論文は台集合を固定する研究の流れと演算の個数・項数を固定する流れの中間ないし橋渡しを担うような位置に該当する。

与えられた代数系とそのべき等演算に対し、べき等演算による像を台集合とし、もとの代数系の演算で記述される写像の全体を演算とする代数系をべき等縮約という。べき等縮約の族に対し、その直積集合にもとの代数系の演算で記述される演算を全て導入した代数系を、べき等縮約たちの行列積という。

環上の加群の場合、上記構成は係数環をべき等元が生成する環に取り直すこと、行列積は係数環を適当な行列のなす環に取り直すことに相当する。

べき等演算による縮約の族が与えられると、もとの代数系が生成する代数系のクラスから、縮約の族の行列積と呼ばれる代数系の生成するクラスへの自然な関手が定まる。その関手が圏同値になる条件はもとの代数系の演算の言葉により特徴付けられ、特に有限代数系の場合には圏同値になる“最小の”縮約の族が同型を除いて一意に定まることがカーンス・ベーリッシュにより知られている。

本博士論文の最初の主結果は与えられた二つの代数系に対し、それぞれの生成する代数系のクラス

が圏同値になることが、それらの最小の縮約の行列積が同型になることと同値になるというものである。

この結果に基づくと有限代数系は次の段階を経ることで記述することができることがわかる：

(1) “既約な”有限代数系の族を与える。

(2) その族の“行列積”を構成する。

(3) 行列積を圏同値で変形する。

このような枠組みの定式化の後、本論文では(2)の考察を行なっている。べき等縮約の行列積ははじめに与えられた代数系の演算を用いて記述されるため、べき等縮約の構造のみでなく“入れ物”である代数系の構造にも依存する。そのため既約代数系の族に対してその“行列積”は一意とは限らず、また存在するかどうかも定かではない。

二つ目の主定理は与えられた既約代数系の族に対して、それらの行列積が存在する必要十分条件が「全ての既約代数系たちが共通の真のべき等縮約を持つこと」で与えられるというものである。

またその結果を示したのと同様の技巧により、どんな自然数に対しても、それより多くの行列積構造が存在するような既約代数系の族を構成している。

次いで(3)に関連する注意事項を述べている。既約代数系と圏同値な代数系は必ずそれをべき等縮約として含む。代数系の“最小な”べき等縮約の族の行列積は、感覚的には“因子の既約な部分”のみを取り出して構成したものであり、一見すると圏同値類の中では最小のもののようにも思える。

そうであれば標準代数系は圏同値類における最も扱いやすい代表系としての役割を果たすのであるが、実際には標準代数系は最小ではない。最小縮約族の真のべき等縮約として、もとの代数系と同型なものを含むような代数系の例をいくつか構成することでそのことを示した。

また、圏同値の特徴付けの応用として、与えられた“有限生成”代数系が圏同値であることを判定する新しいアルゴリズムを与えた。

また、有限とは限らない代数系において、「台集合が一つの集合ではなく複数の集合からなる族の場合の代数系（多ソート代数系）」と、通常の台集合が一つの代数系との類似性を考察している。より具体的には多ソート代数系に対し、各ソートの台集合たちの直積を台集合とする一ソート代数系を対応させることを考える。

まず始めに多ソートの等式クラスから一ソートの等式クラスが作れるための条件を等式クラスの演算の言葉による特徴付けを与えた。

本論文の三つ目の主定理は、そのようにして得られる一ソート等式クラスは、もとの多ソートクラスの構造に対応する行列積分解を持ち、さらに行列積分解を持つ一ソート等式クラスからは多ソート等式クラスを構成できる、というものである。これらの構成により多ソート等式クラスと行列積分解を持つ一ソート等式クラスとは一対一対応がつくことが分かる。

加えてこの構成により対応する一ソートと多ソートの等式クラスは互いに圏同値であり、両者の代数的構造は非常に似ていることが分かる。

最後にそのことの応用として、一ソート等式クラスに関するいくつかの定理に対し、多ソート等式クラスに関する定理に容易に一般化できることを紹介している。

参考文献

1. Denecke, K., Luders, O.: Categorical equivalence of varieties and invariant relations, Algebra Universalis 46, 105-118 (2001)
2. Kearnes, K.A.: Tame Congruence Theory is a localization theory. Lecture Notes from ``A Course in Tame Congruence Theory" Workshop, Budapest, 2001.
3. Lau, D.: Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
4. McKenzie, R.: An algebraic version of categorical equivalence for varieties and more general algebraic categories. Logic and algebra (Pontignano, 1994), 211-243, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 180, Dekker, New York, 1996.

論文審査の結果の要旨

本博士論文の目的は，K.A.Kearnesにより導入された行列積の概念らを用いて，二つの代数系のクラスの圏同値性をあわらすこと，および，多ソート代数系を新たに導入し，
それを一ソート代数系と比較することである．

ここでいう代数系は，ある台集合上で規定された演算の集合として特徴付けられる．実際に，演算の個数と項数が固定されると，演算と可換なものとして代数系同士の間の写像が準同型であることが定式化される．よって，代数系のクラスに対してそれに属する代数系を対象，その間の写像を射とする圏が考えられる．このとき，例えば，適当な条件をみたす代数系のクラス二つに対し，それらの圏が圏同値になるための条件の代数系のクラスの，演算の言葉による特徴付けがマケンジーにより知られていた．

本論文では，Kearnesにより導入されたアイデアをもとに，有限代数系に対し，ある意味で「最小」な縮約による行列積を essential part と名付け，それが同型であることが
圏同値をもたらすための必要十分条件となることを示した．この結果に基づくと有限代数系を(1)「既約」な有限代数系の族を与え，(2)その族の「行列積」を構成し，(3)圏同値で変形する，ことで特定できる．一方で，その応用として「有限生成」代数系が圏同値であることを判定する新しいアルゴリズムを与えている．

また本博士論文における最も重要な成果は，与えられた既約代数系の族に対して，それらの行列積が存在することと「全ての既約代数系たちが共通の真のべき等縮約を持つこと」が同値であることを示したことである．さらに同様の手法を用いて，どんな自然数に対しても，それより多くの行列積構造が存在するような既約代数系の族を構成している．

最後に本論文のもう一つの特徴である多ソート代数系の研究について述べる．有限とは限らない代数系において，複数の数学的構造を同時に扱う代数系として多ソート代数系を導入している．古典論理学の世界では一階述語論理に対して，複数の種類の数学的対象を扱う形式論理として高階述語論理が考えられている．このとき，高階述語論理はその意味論の与え方によって一階述語論理に対応させることができる．同じようなアイデアに基づき，本論文では多ソート代数系と通常の代数系との関係

を調べた．具体的には，まず始めに多ソートの等式クラスから一ソートの等式クラスが作れるための条件を等式クラスの演算の言葉による特徴付けを与えた．そして，そのようにして得られる一ソート等式クラスは，もとの多ソートクラスの構造に対応する行列積分解を持ち，さらに行列積分解を持つ一ソート等式クラスからは多ソート等式クラスを構成できることを明らかにした．これらの構成により多ソート等式クラスと行列積分解を持つ一ソート等式クラスとは一対一対応がつく．さらに，この構成により対応する一ソートと多ソートの等式クラスは互いに圏同値であり，両者の代数的構造は非常に似ていることがわかる．

以上のことは彼が自立して研究活動を行うに必要な高度の研能力と学識を有することを示している．したがって，井澤昇平君提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める．