論　文　内　容　要　旨

氏　　名	瓜屋　航太	提出年	平成 26 年
学位論文の 題　　　目	Asymptotic behavior and critical regularity of solutions to systems of nonlinear Schrödinger equations with mass resonance (質量共鳴をもつ非線形 Schrödinger 方程式系の解の挙動と正則性)		

論　文　目　次

論 文 要 旨

Schrödinger 方程式はその主表象から分散型方程式に分類され，特に，線型ポテンシャルをもたない問題を自由 Schrödinger 方程式と呼ぶ．方程式の解自身の非線型相互作用が加わった問題は非線型 Schrödinger 方程式と呼ばれ，その解は方程式の線型部分がもつ分散性と非線型項の相互作用のバランスにより，様々な振る舞いを呈する．非線型偏微分方程式論の基本的な問題として，初期値問題の時間局所適切性，時間大域解の存在とその時間無限大での漸近挙動などが考えられる．ここで，初期値問題が適切であるとは，解が存在し，それが一意であり，初期値の変化に対して解が連続的に依存することである．自由 Schrödinger 方程式の基本解は分散効果を司る振動項を含み，ここではそれを基本振動と呼ぶ．一方，非線型問題に対して，その基本振動が非線形相互作用により増幅・減衰されることで，基本振動とのつり合いに応じて方程式の線型部分と非線型項の間で共鳴現象が起こる．2 次元ユークリッド空間上で，2 次のゲージ不変性をもつ単独非線型 Schrödinger 方程式の解の時間無限大での漸近挙動を考察した場合，非線型項の影響を無視することができず，このような共鳴現象が解の挙動に影響を及ぼすことが知られている．

本博士論文では，非線型光学の分野で，第 2 高調波の発生や Raman 増幅現象を記述する 2 次の非線型項を持つ連立非線型 Schrödinger 方程式系を考察する．この系は 2 光波またはその一般化と考えられる 3 光波の相互作用を記述する，それぞれ 2 成分または 3 成分の系で，ゲージ不変性，チャージ保存則，エネルギー保存則が成立する特殊な非線型項をもつ．2 成分系に対して，各成分の線型部分の係数をそれぞれ $1/m_1$, $1/m_2$ としたとき，(i) $2m_1 \neq m_2$ かつ $m_1 \neq m_2$, (ii) $m_1 = m_2$, または (iii) $2m_1 = m_2$ のそれぞれの場合に応じて解の時間無限大での漸近挙動は異なる (Hayashi-Li-Naumkin (2012))．単独方程式の共鳴現象に対比して述べれば，これら特殊な係数の仮定の下で各成分のもつ基本振動が非線型項のもつ振動とつり合う現象が起こる．量子力学では，これらの係数が粒子の質量を表す定数であることから，これは質量共鳴現象と呼ばれる．本論文では，質量共鳴をもつ非線型 Schrödinger 方程式系に対し，時間無限大での与えられた漸近挙動を満たす解の存在を示す終値問題，及び，初期値問題の非適切性に関して考察する．単独方程式の場合には，解の漸近挙動や初期値問題の適切性は各方程式の非線型項に応じて議論されてきた．ここで考える 2 成分系の場合，質量共鳴現象により線型部分の係数の関係に応じてそれらの現象が 1 つの系の中に現れる．2 成分系に対する擬等角変換を用いて，時間無限大での解の漸近挙動と初期値問題の非適切性の関係に対する示唆が得られる．ここでは，その示唆を下に数学的に厳密な正当化を行う．以下，本論文の各章の概略を述べる．

第 2 章では，自由 Schrödinger 方程式の解の基本性質，本論文を通して用いる基本的な不等式，非適切性を示す際に用いるモジュレーション空間の定義および，その性質を述べる．また，第 4 章での 3 成分の系に対する結果を述べる上で重要となる Jacobi の楕円関数を導入する．

第 3 章では，空間変数が 2 次元で 2 成分からなる非線型 Schrödinger 方程式系の解の時間無限大での漸近挙動を考察する．2 次のゲージ不変性をもつ単独の非線型 Schrödinger 方程式は 2

次元で考察した場合，解の時間無限大での漸近挙動は自由解で近似することができず，散乱データにより与えられる位相関数の修正が現れることが知られている（Ozawa (1991)）．2 成分系の漸近挙動は上記の係数 m_1，m_2 に対して，(i)のとき，自由解に漸近する解が存在し，(ii)の場合，一般的に解は自由解に漸近せず，特別な仮定の下で自由解に漸近する．(iii)のときは質量共鳴が起こり，修正自由解に漸近する解が存在する（Hayashi-Li-Naumkin(2012)）．本章では，(iii)の場合に上記の修正漸近自由解とは本質的に異なる挙動の解が存在することを示す．質量共鳴条件の下，ここで考える 2 成分をもつ連立非線型 Schrödinger 方程式系の解の漸近挙動は 1 階の常微分方程式系の解を用いて近似することができる．1 階の常微分方程式系から，形式的に 2 本の独立なリッカチ型方程式を導出することができ，それらの特解として，双曲線関数が現れる．双曲線関数の性質から，一方の成分のチャージが時間無限大で 0 に収束し，他方が全てのチャージを得る解の存在が従う．双曲線関数を用いた解析により，類似の現象が起こることが空間 3 次元で微分型の 2 次の非線形項をもつ非線形波動方程式の系に対して示されている（Katayama-Matoba-Sunagawa (2015)）．

第 4 章では，第 3 章で構成した 2 成分系の解の漸近挙動を含む形で，3 成分系の解の漸近挙動を考察する．第 1 成分と第 2 成分が等しい場合，3 成分系は 2 成分系と見なすことができる．ここでは，第 3 章で構成した解の第 1 成分のもつチャージが時間無限大で 0 に収束し，解の第 2 成分が全てのチャージを得る 2 成分からなる非線型 Schrödinger 方程式系の解の漸近挙動に関する考察を進展させる．すなわち，全てのチャージが解の第 2 成分に偏る現象は極限的な場合であると考え，各成分間のチャージの遷移が周期的に起こる場合を考察する．2 成分系の場合に行ったものと同様の解析を 3 成分系に適用することにより，解の挙動を近似する常微分方程式系を導出することができる．その常微分方程式系の特解として Jacobi の楕円関数が現れる．Jacobi の楕円関数は母数から決まる周期をもつことから，周期的にチャージの遷移が起こる漸近系を解の存在を示すことができる，一方，母数が 1 の場合は Jacobi の楕円関数は双曲線関数と一致するため，3 成分系の解の漸近挙動は 3 章で述べた 2 成分系の解の漸近挙動に一致する．したがって，解の時間無限大での漸近挙動の観点から，2 成分系の解は 3 成分系の解が縮退したものと見做せる．

第 5 章では，空間 2 次元において 2 成分の非線型 Schrödinger 方程式系の初期値問題の非適切性と質量共鳴現象の関係を考察する． 2 成分系は尺度変換に関する不変性をもち，その尺度変換により不変となる関数空間は Sobolev 空間の正則性を通して一意的に決まり，尺度臨界空間と呼ばれる．空間 2 次元で 2 次の非線型性をもつ場合には，尺度臨界空間は微分階数が -1 の Sobolev 空間となる．本論文で扱う 2 成分の非線形 Schrödinger 方程式系は空間変数 4 次元で質量共鳴条件の下，解の時間無限大での挙動を時刻 0 近傍の挙動に対応させる擬等角変換で不変となる．その他の場合では方程式系は擬等角変換で不変とならないが，擬等角変換を用いない解析により，第 3 章において解の漸近挙動を考察した際に現れた 3 つの分散係数の条件(i)~(iii)の下で非適切性が成立する臨界正則性に違いが現れることを示す．非適切性を示す際には，解の連続依存性が適切性の臨界となる関数空間において破綻することを証明する．係数 m_1，m_2 が非共鳴な場合(i)，(ii)においては，解の漸近展開を用いて解の初期値連続依存性が破綻することを示す．(i)の場合には尺度臨界空間において非適切性が成立する．(ii)の場合には Appendix で述べる非線型項が解の絶対値の 2 乗で与えられる単独の非線型 Schrödinger 方程式の結果から，尺度臨界空間よりも狭い Besov 空間において解の初期値連続依存性の破綻を示す．いずれの場合も非適切性を示す初期値の列を適切に構成することが重要となる．(iii)の質量共鳴が起こる場合には，2 成分系は Galilei

変換によって不変となるため，定在波解の存在と合わせて，微分指数が負の Sobolev 空間における解写像の一様連続性の破綻を示す.

論文審査の結果の要旨

非線形 Schrödinger 方程式の解の挙動を表す枠組みとして，時間無限遠での漸近挙動を与えて解を見いだす，あるいは時間無限遠での挙動を観測するいわゆる非線形散乱理論がある．時間無限遠での状態函数を与えその函数に自由 Schrödinger 方程式の解として漸近する非線形問題の枠組みを終端値問題と呼ぶ．非線形項がべき構造を持つ場合に非線形問題 Schrödinger 方程式の解が散乱するか否かはそのべき指数と空間変数の空間次元のあいだの臨界指数が決定的な役割を果たすことが知られ，散乱するか否かの臨界を Ozawa 臨界指数と呼ぶ．臨界指数の場合一般に解は散乱せず,終端値問題を解くには非線形の位相修正を要する．2 次元 Euclid 空間において二次の単項非線形方程式は臨界指数に相当するが，未知関数が一つである単独の非線形 Schrödinger 方程式では 2 次単項式非線形干渉に対して解は散乱し，またゲージ不変非線形項ならば修正散乱が得られることが知られている．他方初期値問題の適切性はエネルギークラス(L2-空間)で古くから知られており，とくに Hamilton 構造を保つ場合は Ozawa 臨界を持つ初期値問題は大域的に適切であることが知られている．しかし考える空間をエネルギークラスより拡大するとスケール変換に付随する不変空間を限界として初期値問題の適切性が破綻することが予想される.

このような背景の元で，本学位論文では，空間 2 次元の上で 2 次の単項式を持つ 2 成分および 3 成分の連立非線形 Schrödinger 方程式を考え，その係数(質量定数)による終端値問題の挙動を研究し従来に知られない挙動を示した．さらに初期値問題の適切性と質量定数の相互の関連をの関係を元に研究した．この問題は非線型光学における Raman 増幅現象における簡素化モデルであり，量子力学の類推から質量係数に相当するパラメータを含み，系の挙動がこれらパラメータ(2 成分系ならば質量係数は m_1，m_2 の二つ)の関係により，同一の問題であっても終端値問題の挙動が異なることが知られていた．非共鳴状態である m_1:m_2 の係数比が 1:1 にも 1:2 にも等しくない場合には，終端値問題の解は散乱し，1:2 の共鳴状態の場合には修正散乱を生じる．また 1:1 の場合には一般に散乱しないことが知られている． 本学位論文の 3 章では， 終端値条件の振幅と位相に対する一定の制限の元，質量係数が 1:2 の場合にこれら知られている終端値問題の挙動と異なる第一成分が消散し，第二成分がすべての L2 エネルギーを持ち去る挙動を持つ終端値問題の解の存在を証明した．さらにその自然な拡張である三成分問題においては，解が振動しながら消散する場合と振動し続ける挙動の分類を終端値条件に対するパラメータで分類した．その証明は問題の持つ主要非線形干渉における主要振動成分を取り出し，主要項を支配する常微分方程式系からその特解に解の漸近形を帰着されることが本質的である．この系は Riccati 型の連立系であって特解として Jacobi の楕円函数を許容するがそれが終端漸近形となるような終端値問題の非散乱解を Sobolev 空間において構成した．証明には線型部分が支配する主要振動成分とそれに関連する，Schrödinger 方程式の基本解に対する Dollard 型分解(いわゆる MDFM 分解)を有効に用いて，基本振動成分を分離することにより示される.

続いて 5 章において初期値問題の適切性の臨界空間を質量係数に応じて同定した．2 成分の初期値問題に対して，非共鳴状態においてはスケール臨界限界まで拡大可能で，それより拡大すると系が非

適切となること，また 1:1 の共鳴状況では予想される臨界空間より大きい空間で実補間空間の枠組みで初期値が不連続となる強い意味での非適切性を，また 1:2 の共鳴状態の場合には一般により広い設定で最良となる L2 より拡大できないことを示した．この結果は時間無限遠での解の漸近挙動に対応し，時刻零近傍での漸近挙動を示していて，空間 4 次元の場合に成立する擬等角不変性が陰に関連し，質量共鳴による同一の系の解の挙動が，時刻無限遠と時刻零近傍で類似の分類を示すことをしました点で有意義と認められる．

以上のように申請者の提出した成果は自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，瓜屋航太提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める．