論 文 内 容 要 旨

氏　　名	齋藤 洋介	提出年	平成 26 年
学位論文の 題　　目	Elliptic Ding-Iohara-Miki algebra and the free field realization (楕円 Ding-Iohara-Miki 代数とその自由場表示)		

論　文　目　次

Chapter 1：Introduction
Chapter 2：Boson calculus
Chapter 3：Elliptic Ding-Iohara-Miki algebra
Chapter 4：On the elliptic Calogero-Sutherland model
Chapter 5：Construction of commuting q-difference operators
Chapter 6：Perspectives
Chapter 7：Appendix：trigonometric case

要旨

本博士論文における主結果は，楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示を構成したこと，またこの自由場表示と楕円 Feigin-Odesskii 代数を用いることで，楕円 Ruijsenaars 作用素を含む可換な差分作用素の族を構成したことである．

2009 年に Feigin, Hashizume, Hoshino, Shiraishi, Yanagida は，Macdonald 作用素の自由場表示から Ding-Iohara-Miki 代数というある量子群が現れることを示し，またこの自由場表示と三角 Feigin-Odesskii 代数を用いることで，Macdonald 作用素と可換な差分作用素の族を構成した．彼らは楕円 Ruijsenaars 作用素と可換な差分作用素の族の楕円 Feigin-Odesskii 代数を用いた構成を試みていたが，いくつか問題が残ることを指摘していた．

そこで筆者は，小森，野海，白石らによって得られていた楕円 Ruijsenaars 作用素の kernel function に注目した．三角的な理論においてそうであったように，この関数が楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において用いるべきボソンの代数を決めていると考えた．実際にこの予想は正しく，楕円 Ruijsenaars 作用素の kernel function から始めることで，この差分作用素の自由場表示が得られた．このときいくつかのボソンの作用素が用いられるが，これらの満たす交換関係を調べるとある一連の関係式が得られることがわかる．これらの関係式は Ding-Iohara-Miki 代数の楕円化の関係式であることがわかる．この代数を楕円 Ding-Iohara-Miki 代数と呼ぶことにすると，楕円

 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において用いられるボソンの作用素は，楕円 Ding-

Iohara-Miki 代数の自由場表示を与える，と結論づけることができる．次に筆者は，以上で得られた自由場表示と楕円 Feigin-Odesskii 代数を共に使うことができるかを調べた．その結果，これら 2 つのものはうまく働き，楕円 Ruijsenaars 作用素を含む可換な q-差分作用素の族を構成することに成功した．これは先の Feigin, Hashizume, Hoshino, Shiraishi, Yanagida らの仕事の楕円関数的な場合への拡張を与えている．

第 1 章　第 1 章では本博士論文の背景と主結果をまとめている．また，トーラス上の共形場理論においては作用素トレースによって相関関数を定義する方法が用いられてきたが，この方法と筆者が用いた自由場表示が等価であることの概説を与えている．

第 2 章　第 2 章では，楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示において用いられるボソンの作用素の準備を行っている．ここで構成されるボソンの作用素が従来のものと異なっている点は，2 組のボソンの生成元を用いることで OPE（Operator Product Expansion）からテータ関数などの楕円関数的なものを復元できるようになっていることである．ここでいくつかのボソン作用素が定義されるが，これらが既に Ding-Iohara-Miki 代数として知られていたものの関係式の楕円版を満たすことが示される．

第 3 章　第 3 章では楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示と楕円 Ding-Iohara-Miki 代数が構成される．第 2 章で用意したボソンの作用素から楕円 Ruijsenaars 作用素が復元される．このことの証明は，ボソンの作用素の OPE の計算とテータ関数の積の部分分数分解による．ここで用いられているボソンの生成元は，楕円 Ruijsenaars 作用素の kernel function と呼ばれる関数の形から決まっている．その結果として，楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示からこの作用素の kernel function の満たす関数等式が得られる．以上で用いられてきたボソンの作用素の満たす関係式を調べることで，これらが Ding-Iohara-Miki 代数の関係式の楕円化を満たすことが確かめられるが，これは Ding-Iohara-Miki 代数の楕円化（楕円 Ding-Iohara-Miki 代数）が現れていることを示している．

第 4 章　第 4 章では，楕円 Ruijsenaars 模型の微分極限である楕円 Calogero-Sutherland 模型について述べている．2001 年に，Langmann は楕円 Calogero-Sutherland 模型のハミルトニアンの自由場表示を構成し，これを用いてこのハミルトニアンの kernel function の関数等式を得ていた．ここで，筆者が第 2 章，第 3 章において用いた自由場表示の方法と Langmann が用いた方法が本質的に同じものであると推測されたので，これを実際に確かめつつ Langmann の結果を再構成した．

第 5 章　第 5 章では楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示と楕円 Feigin-Odesskii 代数による可換な q-差分作用素の族の構成を行った．楕円 Feigin-Odesskii 代数は，1997 年に Feigin と Odesskii によって導入された多変数の楕円関数のなす代数である．2009 年に Feigin, Hashizume, Hoshino, Shiraishi, Yanagida は楕円 Feigin-Odesskii 代数の三角極限(三角 Feigin-Odesskii 代数)を導入し，この代数と Macdonald 作用素の自由場表示を用いて可換な q-差分作用素の族を構成していた．以上の話の楕円化，すなわち楕円 Feigin-Odesskii

代数を用いた楕円 Ruijsenaars 作用素と可換な q-差分作用素の族の構成を試みることは自然であり，そのためには楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示が必要である．先に述べた 2009 年の Feigin らの論文においては，quasi-Hopf twist という概念を用いた楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示の構成が試みられたが，これはいくつかの問題が生じたために完全には成功しなかった．そこで筆者は，楕円 Feigin-Odesskii 代数および第 3 章において構成した楕円 Ruijsenaars 作用素の自由場表示を用いることを考え，結果として楕円 Ruijsenaars 作用素と可換な q-差分作用素の族を構成することに成功した．

第 6 章　第 6 章では，今後の課題として Macdonald 対称関数の楕円化の研究，Ding-Iohara-Miki 代数の modular double のアイディアについて述べている．楕円 Ruijsenaars 模型の三角極限は Macdonald 多項式によって解くことができるので，楕円 Ruijsenaars 模型はある Macdonald 多項式の楕円化と関係していると自然に考えられる．ただ，楕円 Ruijsenaars 模型においては楕円関数的な関数が随所に現れるために，この模型は未だに解かれていない．第 4 章において論じた楕円 Calogero-Sutherland 模型は楕円 Ruijsenaars 模型の微分極限であり，この模型では楕円のモジュライパラメータに関する微分を伴った解を構成できることが知られている．このような解は，楕円 Calogero-Sutherland ハミルトニアンの kernel function の関数等式から容易に構成できる．このような状況が楕円 Ruijsenaars 模型においても成り立つと仮定すると，この模型のある解が楕円 Ruijsenaars 作用素の kernel function の関数等式から得られる可能性がある．

量子群の modular double とはある種の modular 性を備えた代数で，互いに可換な 2 つの量子群によって定義される．この理論では 2 重サイン関数が重要な役割を果たすことが知られている．筆者は，2 重サイン関数を用いて定義された kernel function から Ding-Iohara-Miki 代数の modular double の自由場表示が得られることを確認している．将来，楕円 Ding-Iohara-Miki 代数のレベル 0 表現の modular 変換などの例を通じて，Ding-Iohara-Mik 代数の modular doubl を楕円 Ding-Iohara-Miki 代数の立場から理解できる可能性がある．

第 7 章　第 7 章の Appendix では，Macdonald 対称関数についての基本的事実，2009 年の Feigin, Hashizume, Hoshino, Shiraishi, Yanagida らの結果の概要を与えている．

論文審査の結果の要旨

「楕円 Ding-Iohara-Miki　代数とその自由場表示」
(Elliptic Ding-Iohara-Miki algebra and the free field realization)

数理物理において、2 次元統計物理における可解な格子模型の対称性の研究から、アフィン量子群とよばれる代数系が 1980 年台に発見された。アフィン量子群は、2 次元共形場理論のゲージ対称性の q 差分類似とも考えられる無限次元ホップ代数であり、その拡張の一つとして Ding – Iohara – Miki （以下 DIM）代数がある。これはある対称性

をもつ構造関数で定義され、従来それが有理式であるものが知られていた。齋藤は、構造関数が楕円テータ関数で与えられる楕円 DIM 代数を新たに導入した。楕円 DIM 代数は、q, t, p という３つのパラメータを有し、p=0 の極限が従来の DIM 代数を与える。

先行研究としては、Feigin et al 2009 があり、彼らは弦理論に関連する対称性として従来の DIM 代数を研究し、その表現を無限変数の微分代数（ハイゼンベルグ代数）を用いて与えた（ボゾンによる自由場表示）。これは同時にマクドナルドの可積分系を、表現空間と関数空間のテンソル積において実現するものであった。一方、マクドナルド系の楕円関数版としてルイセナースの可積分系が知られていたが、対応する構造については理論の拡張可能性として研究が待たれる課題であった。

これに対し、齋藤は、従来の倍である 2 種類のボソン（生成元が倍のハイゼンベルク代数とその表現）を導入することで、ルイセナースの可積分系の自由場表示にまず成功した。これは、彼が「楕円化の処方」と呼ぶところの、楕円関数的拡張のための正しい交換関係を三角関数版のそれから推測する方法を見出したことによる。そして彼は、ルイセナース作用素のこの実現にともなって DIM 代数の楕円関数版が期待通り現れることを確認し、楕円 DIM 代数の定義を与えることに成功した。これらの定式化においては、楕円モジュラスのパラメータ p を形式的に扱う代数的手法が用いられ、無限和の困難が回避されている。更に、ルイセナース作用素が q,t をともに逆元に取り替えた時の作用素とも可換であること、およびこれらを含む無限個の保存量についても、自由場表示を通して実現し確認された。

本論文で示された以上の研究は、数理物理における未知の領域を切り拓きつつあるものである。自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示しており、したがって、齋藤洋介提出の論文は、博士（理学）の学位論文として合格と認める。