

## 論文内容要旨

氏 名	太田 和惟	提出年	平成 27 年
学位論文の 題 目	Divisibility of Kato's Euler system and its applications to Mazur and Tate's refined conjecture of BSD type (加藤のオイラー系の可除性とメイザー・テイトの BSD 型精密化予想への応用)		

## 論文目次

- 1 Introduction
  - 1.1 Background
  - 1.2 The Mazur-Tate refined conjecture of BSD type
  - 1.3 The main result
  - 1.4 A result on a construction of rational points
  - 1.5 Organization
  - 1.6 Notation
- 2 Preliminaries on elliptic curves
  - 2.1 Elliptic curves
  - 2.2 The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture
- 3 The Mazur-Tate refined conjecture of BSD type
  - 3.1 Modular symbols
  - 3.2 Mazur-Tate elements
  - 3.3 The refined conjecture
- 4 Divisibility of Euler systems for elliptic curves
  - 4.1 Darmon-Kolyvagin derivatives
  - 4.2 Euler systems and their local behavior at primes not dividing  $p$
  - 4.3 The theorem on divisibility of Euler systems
  - 4.4 Local behavior of derivatives of Euler systems at  $p$
  - 4.5 Rational points from derivatives of Euler system
- 5 Proof of main result
  - 5.1 Preliminaries on group rings
  - 5.2 Local study of Mazur-Tate elements
  - 5.3 Application of the  $p$ -parity conjecture
  - 5.4 The order of vanishing and leading coefficients of Mazur-Tate elements

## 論文要旨

本博士論文では、Mazur-Tate によって定式化された BSD 型精密化予想に対し、数多くの場合に証明を与える。BSD 型精密化予想とは、楕円曲線の  $L$  関数と数論的な不変量との不思議な関係を Mazur-Tate 元という群環の元を用いて記述する予想である。現代整数論において、代数多様体などに付随するゼータ関数、あるいは  $L$  関数の整数点での特殊値とその多様体に付随する数論的不変量との不思議な関係を調べる、というのは中心的な課題の一つであり、BSD 予想の他には代数体の Dedekind ゼータ関数に対する類数公式などがよく知られている。今日では、Beilinson, Bloch, Bloch-Kato らにより、非常に一般的な状況で、ゼータ関数の特殊値と数論的不変量との間の関係が予想されている。BSD 予想は、有理数体  $\mathbb{Q}$  上の楕円曲線  $E$  の有理点全体の集合  $E(\mathbb{Q})$  (これは、Mordell-Weil の定理により有限生成アーベル群となる)の階数が、 $E$  の Hasse-Weil  $L$  関数の  $s=1$  での零点の位数と一致することを主張する予想であるが、一方、BSD 型精密化予想は Mazur-Tate 元の群環的な性質と階数を結びつける予想である。以下で、この精密化予想について説明する。

まず、Mazur-Tate 元について簡単に思い出す。自然数  $S$  に対し、 $1$  の原始  $S$  乗根を  $\mathbb{Q}$  に添加した体を  $\mathbb{Q}(S)$  とおき、 $G(S)$  をその  $\mathbb{Q}$  上のガロワ群とおくと、Mazur-Tate 元  $\theta(S)$  は次のような性質を満たす  $\mathbb{Q}[G(S)]$  の元である: 「任意の  $G(S)$  の指標による特殊化が、その指標でひねった  $L$  関数の特殊値の代数部分と本質的に一致する」。さらに、 $\theta(S)$  の係数の分母は、 $S$  を動かした時有限であることが知られており、素数  $p$  に対し、 $\theta(p^n)$  の  $n$  に関するある種の極限をとることで  $L$  関数の  $p$  進類似である、 $p$  進  $L$  関数を構成できる。このことから、Mazur-Tate 元は  $p$  進  $L$  関数の精密化と見なせる。予想の主張を述べるために、 $\mathbb{Q}$  の部分環  $R$  を  $\theta(S)$  の係数を全て含むようにとる。Mazur-Tate の精密化予想 (の一部) は、 $E(\mathbb{Q})$  の階数を  $r$  とおいたとき、Mazur-Tate 元  $\theta(S)$  が  $R[G(S)]$  の augmentation ideal  $I$  の  $r$  乗に含まれることを主張する。 $S$  を  $p^n$  として  $n$  に関して極限を取ると、この予想は本質的に  $p$  進 BSD 予想の半分の不等式である。しかし、 $p$  進 BSD 予想とは違い、 $S$  や  $R$  の取り方によって、 $\theta(S)$  が  $I$  の  $r+1$  乗に含まれるということが起こりうることに注意する (Remark 1.2.2 参照)。

本博士論文の主定理 (Theorem 1.3.1) は、 $E$  が虚数乗法をもたないとき、“例外的な素数”が  $R$  で可逆になるように  $R$  をとり、非常に多くの square-free な  $S$  に対し、精密化予想が成立することを示す。例えば、 $E(\mathbb{Q})$  が非自明なトーション元を持つときは、上の“例外的な素数”は有限個となる。また、 $S$  としては良超特異素点の square-free な積をとることができ、 $S$  には無限個の選び方があることに注意する (正確な主張は本文 小節 1.3.1 参照。記号が多少違うことに注意)。

Mazur-Tate 予想に関連する結果としては、Kato の  $p$  進 BSD 予想の結果の他、Tan と Kurihara の結果がある。Tan は  $\mathbb{Q}$  だけでなく  $\mathbb{Q}(S)$  の部分体に対しても (full) BSD 予想を仮定することで、精密化予想を示している。Kurihara は、 $p$  を良通常素点とし、Selmer 群の構造に関する  $\mu = 0$  予想などの仮定の下、 $R$  を  $p$  進整数環  $\mathbb{Z}_p$  に係数拡大すると、 $\theta(S)$  が  $I$  の  $r$  乗に含まれることを示している。しかし、 $R[G(S)]$  の中で  $\theta(S)$  が  $I$  の  $r$  乗に含まれる

ことを示すには、 $R$  で可逆でない全ての素数に対して、 $\mu = 0$  予想を仮定する必要がある。本論文では、BSD 予想も  $\mu = 0$  予想 も仮定しないということに注意する。

以下、本博士論文の構成について述べる。

第 2 章では、必要となる楕円曲線の基本事項を復習する。その後、有理数体上の楕円曲線に対する弱 BSD 予想と共に、 $L$  関数の主要項を Tate-Shafarevich 群の位数などで記述する full BSD 予想の主張を述べる。

第 3 章では、Modular symbol について簡単に復習した後、それを用いて Mazur-Tate 元を定義し性質を調べる。上で述べた精密化予想の他にも、Mazur-Tate は Mazur-Tate 元  $\theta(S)$  と  $E(\mathbb{Q}(S))$  の  $G(S)$ -加群としての振る舞いとの関係に関する予想を定式化しており、これらの主張もこの章で述べる。この章の最後で、精密化予想の、Mazur-Tate 元の主要項に関する予想について述べる。

第 4 章では、Darmon-Kolyvagin derivative という微分を導入し、(楕円曲線の)オイラー系の Darmon-Kolyvagin derivative がどれくらい  $p$  べきで割れるかという可除性を調べる。Darmon-Kolyvagin derivative は Darmon が、階数に関する精密化予想の Heegner 点類似を多くの場合に証明した際に用いた概念である。この章では、Darmon の議論を加藤のオイラー系に適用できるよう修正する。この章で証明する Theorem 4.3.10 が、オイラー系の微分がどれくらい  $p$  べきで割れるかを示す定理で、主定理の証明で本質的な役割を果たす。また、Theorem 4.3.10 の別の応用として、オイラー系のある微分が  $p$  で割れない時、その微分が modulo  $p$  では 楕円曲線の  $\mathbb{Q}$  有理点からくることを示す (Theorem 4.5.2)。

第 5 章で主定理を証明する。まず、Kurihara, Kobayashi, Otsuki らのアイデアを元に、Mazur-Tate 元と加藤のオイラー系を結びつける。それを用いて、Mazur-Tate 元のテイラー展開の類似を考えると、微分係数にオイラー系の Darmon-Kolyvagin derivative が現れる。このことと、4 章で得られた オイラー系の微分の可除性を用いると、群環の議論により、Mazur-Tate 元が augmentation ideal  $I$  のべきに含まれることが示される。しかしながら、Darmon の議論の応用だけでは、 $I$  の  $r(p) - 1$  乗に含まれるということまでしか示せない。こ

こで、 $r(p)$  は Selmer 群の  $\mathbb{Z}_p$ -corank。これは、Heegner 点と 加藤のオイラー系の局所的な振る舞いの違いによるもので、Darmon の場合には現れなかった難点である。これを克服するために、本博士論文では Nekovar や Dokchitser らによって示された  $p$  偶奇予想を応用し最終的に Mazur-Tate 元が  $I$  の  $r(p)$  乗に含まれることを示す。また、やはり 4 章で得る微分の可除性のもう一つの応用として、Mazur-Tate 元の主要項が  $p$  で割れないならば Tate-Shafarevich 群の位数も  $p$  で割れないということを示す (Theorem 5.4.2)。

## 論文審査の結果の要旨

Birch and Swinnerton-Dyer予想(以下BSD予想と略す)は、数体上定義された楕円曲線の数論的不変量とHasse-Weil  $L$ -関数の $s=1$ での振る舞いを結びつけるものである。この予想は整数論における普遍的な現象を表すものとして、様々な一般化、変種、精密化が試みられてきた。本博士論文で扱われるMazur-Tate予想もBSD予想の変種であり、楕円曲線の $p$ 進BSD予想を精密化するものである。BSD予想はその変種を合わせても、現在証明されていることは非常に少ないが、最良のものの一つは加藤和也氏による $p$ 進BSD予想の半分を示す不等式である。本博士論文の主要結果は、Mazur-Tate予想における加藤の不等式に相当するものを比較的一般的な設定のもとで証明するものである。以下で内容をより詳しく述べる。

$E$ を有理数体上定義された楕円曲線で、Mordell-Weil階数を $r$ とする。 $E$ の部分ゼータ関数の特殊値を係数として、円分体の群環の中にMazur-Tate元と呼ばれる元が構成される。Mazur-Tate予想は階数予想と先頭項予想の2つに分かれるが、階数予想はMazur-Tate元がこの群環のaugmentationイデアルの $r$ 乗に入るというものである。本論文の主結果は、比較的ゆるやかな条件のもとで、この階数予想を証明するものである。そして条件が満たされる楕円曲線の一般的クラスも与えられている。また先頭項予想に関してもある種の根拠を与えられている。これまでもMazur-Tate予想に関する結果はあったが、何かの大予想を仮定した上でのものであり、このような確定的な一般的結果はなかった。証明は加藤のEuler系、DarmonによるHeegner点のMazur-Tate型予想に関する議論、栗原-小林-大槻による加藤Euler系とMazur-Tate元を結びつける議論、近年証明されたparity予想などを組み合わせる非常に高度なものである。特にparity予想を使うアイデアはオリジナリティーが高い。

以上のことから、本論文は国際的にも学術的価値が極めて高く、太田氏が将来にわたり自立的研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識の高さを有することを保証するものである。したがって太田和惟氏提出の博士論文は、博士(理学)の学位論文として合格と認める。