論　文　内　容　要　旨

氏　　名	十鳥　健太	提出年	平成２７年
学位論文の 題　　　目	Calabi's conjecture of the Kähler-Ricci soliton type (ケーラー・リッチ・ソリトン型のカラビ予想)		

論　文　目　次

論　文　要　旨

本論文では Kähler 幾何における Calabi 予想のある種の一般化である Kähler-Ricci soliton 型の Calabi 予想について、予想の主張に出てくる正則ベクトル場が（１）零点を持つ場合と（２）零点を持たない場合に分けて考察し、（１）の場合の予想に対する完全な解答を与え、また（２）場合にこの予想が解を持つための十分条件を与えた。

M をコンパクト Kähler 多様体とする。Kähler 幾何における Calabi 予想とは S. T. Yau (1978) によって証明された次の定理である：

Calabi 予想：Kähler 類を固定したときに $2\pi c_1(M)$ に属する任意の実 (1, 1)-形式 Ω に対して、与えられた Kähler 類に属する Kähler 形式 ω で $\mathrm{Ric}(\omega) = \Omega$ を満たすものが一意的に存在する。

ここで $c_1(M)$ は M の第一 Chern 類であり、$\mathrm{Ric}(\omega)$ は ω の Ricci 形式である。Yau はこの定理を、対応する複素 Monge-Ampère 方程式を continuity method で解くことによって証明した。また H. D. Cao (1985) は normalized Kähler-Ricci flow に対応する幾何的な flow を使ったこの定理の再証明を与えた。この Calabi 予想は Kähler-Einstein 計量と密接に関係している。例えば、M がコンパクト Calabi-Yau 多様体のとき M 上に Ricci-flat Kähler 計量が存在することがこの定理から従う。

Kähler-Einstein 計量には様々な一般化が存在するが、Kähler-Ricci soliton はその一つである。Kähler 形式 ω は、ある正則ベクトル場 X が存在して $\mathrm{Ric}(\omega) - \omega = L_X\omega$ を満たす時に Kähler-Ricci soliton と呼ばれる。ここで L_X は X に沿った Lie 微分である。Kähler-Ricci soliton は Kähler-Ricci flow の時間無限大での挙動と深く関係しており、様々な研究がなされている。例えば、G. Tian と X. H. Zhu (2002) は Kähler-Einstein の存在への障害の一つである二木不変量を一般化して Kähler-Ricci soliton の存在への障害を導入した。彼らはその一般化した障害を調べることで Kähler-Ricci soliton に対応する正則ベクトル場がアプリオリに定まることを示し、更に S. Bando と T. Mabuchi (1987) による M が Fano 多様体の場合の Kähler-Einstein 計量の一意性定理に対応する Kähler-Ricci soliton の一意性定理を証明した。

X. H. Zhu (2000) は Kähler-Ricci soliton の研究を動機付けとして Kähler-Ricci soliton に対応した Calabi 予想の一般化である次の問題を考えた：

Kähler-Ricci soliton 型の Calabi 予想：Kähler 類を固定したときに $2\pi c_1(M)$ に属する任意の実(1,1)-形式 Ω および M 上の正則ベクトル場 X に対して、与えられた Kähler 類に属する Kähler 形式 ω で $\mathrm{Ric}(\omega) - \Omega = L_X\omega$ を満たすものが一意的に存在するか？

$X = 0$ の場合が元々の Calabi 予想である。また Kähler-Ricci soliton ω は $\Omega = \omega$ の場合の解であることが定義から分かる。Zhu はこの問題に対し、M が Fano 多様体で Ω が正定値の場合に Kähler-Ricci soliton 型の Calabi 予想の一意的な解 ω が存在する為の必要十分条件を与えた。特に彼は解の存在を Yau と同様に continuity method を使って証明した。

本論文の主目的の一つは Zhu の定理における M が Fano 多様体で Ω が正定値であるという仮定を外して、正則ベクトル場が零点を持つ場合にこの予想の一意的な解 ω が存在するための必要十分条件を与えることである。特に Fano 多様体上の任意の正則ベクトル場は零点を持つこ

とから、我々の結果は Zhu の定理を系として含むものである。我々の証明は Cao による Calabi 予想の証明と同様の、幾何的な flow を使った証明である。つまり、ある種の放物型 Monge-Ampère 方程式の時間大域解が存在し、時間無限大で求める解 ω に収束することを証明する。時間大域解の存在を示すのに必要なアプリオリ評価は

A) 体積比の評価 (Subsection 3.3.1)

B) C^2 評価 (Subsection 3.3.2)

C) C^3 評価 (Subsection 3.3.3)

の 3 ステップで示されるが、正則ベクトル場 X が零点を持つという条件は最初のステップ (A) で使われている。具体的には X が零点を持つならば X のポテンシャルの C^0 ノルムが、Kähler 計量のとり方によらず一様に評価できるという事実を使っている。

更に我々は正則ベクトル場が零点を持たない場合の上記の予想についても考察し、その場合に解が存在するための十分条件を得た。より正確に言うと、正則ベクトル場 X が零点を持たない場合に X の実部及び虚部がそれぞれ周期的ならば Kähler-Ricci soliton 型 Calabi 予想における一意的な解 ω が存在するということを証明した。

正則ベクトル場が零点を持つ場合の証明から、次の補題が成り立てば解 ω の存在は導かれる：

補題：正則ベクトル場 X が零点を持たずかつ X の実部及び虚部がそれぞれ周期的ならば、X のポテンシャルの、 Kähler 計量のとり方によらない一様な C^0 評価が存在する。

我々はまず M が コンパクト Riemann 面で正則ベクトル場 X が零点を持たない場合、つまり M が複素 1 次元トーラスの場合について考察し、トーラスの場合は X の周期性に関する仮定なしに補題が成り立つことを示した。M の次元が 2 以上の場合には X の実部及び虚部がそれぞれ周期的であるという仮定から、M に複素 1 次元トーラスを葉とする葉層構造が定まることが分かる。したがって、先に述べたトーラスの場合の結果から上記の補題が示される。

論文審査の結果の要旨

n 次元ケーラー多様体 (M, ω) のリッチ形式 Ric(ω) は M の第一陳類に属する。Calabi 予想は逆に M の第一陳類に属する実 d-閉 (1,1)-形式 Ωはあるケーラー計量 ω のリッチ形式となるかを問う。Ric(ω) − Ω = 0。 Calabi 予想は S.-T. Yau によって、任意のケーラー多様体に対して肯定的に解かれたが、Fano 多様体に関するアインシュタイン計量の存在に関してはその障害が知られており、アインシュタイン計量を拡張した概念としてケーラー・リッチ・ソリトンが導入された。 X を M 上の正則ベクトル場とし、Ric(ω) − ω が ω の X による Lie 微分と等しいとき、ω はケーラー・リッチ・ソリトンと呼ばれる。

Zhu はケーラー・リッチ・ソリトンと関連してケーラー・リッチ・ソリトン型のCalabi 予想を導入した。 即ち Ω を M の第一陳類に属する実 d-閉 (1,1)-形式、X を M 上の正則ベクトル場として、Ric(ω) − Ω がω の X による Lie 微分と等しくなる様ケーラー計量 ω をとれるか、という問題である。 Zhu は、M をFano 多様体、Ωが正定値の仮定の下で、ケーラー・リッチ・ソリトン型のCalabi 予想が解けるための必要十分条件を与えた。

Zhu の結果では、多様体 M および実 d-閉 (1,1)-形式 Ω に本来の Calabi 予想では無い仮定が付加されていたが、十鳥は仮定を大幅に緩和して正則ベクトル場 X が零点を持てば同様の結果が得られることを示した。 Fano 多様体上の正則ベクトル場は必ず零点を持つので、これは Zhu の結果を含む一般化となっている。 十鳥はまた、正則ベクトル場 X が零点を持たない場合も、ある種の周期性条件を仮定すれば、同じ結論が得られることも示している。

この結果は彼が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって、十鳥健太提出の博士論文は、博士(理学) の学位論文として合格と認める。