論 文 内 容 要 旨

氏　　名	小松　尭	提出年	平成 27 年
学位論文の 題　　目	Discrete-time quantum walks on the d-dimensional integer lattices (d 次元整数格子上の離散時間量子ウォーク)		

論　文　目　次

1. Introduction
2. Discrete-time quantum walks on the one-dimensional integer lattice
3. Discrete-time quantum walks on the d-dimensional integer lattice
4. Discrete-time quantum walks on the square lattice
    4.1. Background
    4.2. Method
    4.3. Proof of Theorem A
    4.4. Positive-operator-valued measure (POVM)
        4.4.1. Another expression of Theorem A in the POVM
5. Alternate quantum walks
    5.1. Definition of alternate quantum walks
    5.2. Relationships between our quantum walks and alternate quantum walks (Theorem B)
    5.3. Alternate quantum walks on the triangular lattice (Theorem C)
6. Localization of discrete-time quantum walks on the integer lattice
    6.1. The general form of the Grover walk (Theorem D)
    6.2. Two-step of the general form of the Grover walk (Theorem E)

Bibliography

論文内容要旨

本学位論文では，d 次元整数格子上の離散時間量子ウォークの極限分布及び局在化現象について論じる．離散時間量子ウォークは，あるヒルベルト空間上のユニタリー作用素の時間発展として与えられ，スピン（状態）をもった粒子の動きを記述しているものとなっている．1 次元整数格子上の離散時間量子ウォークの推移確率の長時間挙動は，古典ランダムウォークのものとはかなり異なることが知られている．本論文では，T. Tate（arXiv:1411.4215, 2014）によって導入された枠組み，すなわち周期的なユニタリー推移作用素の時間発展を量子ウォークとして定義する．第 2 章で，離散時間量子ウォークの概念を説明し，N. Konno (J. Math. Soc. Japan, 2005) によって示された 1 次元整数格子上の極限分布を紹介する．また，エルミート関数の漸近挙動の類似性に着目することにより，T. Sunada-T. Tate (J. Funct. Anal., 2012) らによって量子ウォークの局所漸近公式が得られていることを紹介する．第 3 章では，周

期的なユニタリー推移作用素を定義し，諸性質を与える．

本学位論文は，5 つの結果から構成されており，大きくわけて 3 つのトピックに分けられる．これを，それぞれ，第 4 章，第 5 章，第 6 章で紹介する．

Ⅰ．時間無限大での推移確率の極限分布を決定すること：

離散時間量子ウォークの研究における最も基本的かつ重要な問題は，推移確率の時間無限大での極限分布を導出することにある．1次元整数格子上の極限分布が古典ランダムウォークの極限分布とは異なることから，高次元量子ウォークの推移確率の長時間挙動に興味がもたれている．第4章では，正方格子上のあるユニタリー行列（コイン行列）で定義される量子ウォークの極限分布を導出する．2004年にG. Grimmett-S. Janson-P. F. Scudo (Phys. Rev. E, 2004) らによって提案された手法に倣い，以下の定理を得る．

定理 *A*.（正方格子上のある離散時間量子ウォークの極限分布）
ある 4 次ユニタリー行列で与えられる正方格子上の離散時間量子ウォークの極限分布を具体的に導出した．

特に，定理 A で導出した極限分布の密度関数は 1 次元整数格子上の量子ウォーク(Hadamard ウォーク)の密度関数の一般化となっていることが示される．

さらに，定理 A を量子情報の観点から考察する．すなわち，量子情報理論の分野で使われる正作用素値測度（Positive-operator-valued measure）を用い，定理 A の別表現を得る．

Ⅱ．Alternate 量子ウォークと定理 *A* の関係：

第5章では，第4章で議論した定理Aの離散時間量子ウォークと2011年にC. Di Franco-M. Mc Gettrick-Th. Busch (Phys. Rev. A, 2011) らによって提案されたモデルとの関係性を明らかにする．さらに，三角格子上のAlternate量子ウォークについて考察する．

定理*B*.（Alternate量子ウォークと定理Aの関係）
適切な初期状態の設定のもとで，定理Aにおける離散時間量子ウォークの偶数時間の挙動を4次元複素ベクトル空間の2次元部分空間に射影したものはAlternate量子ウォークの挙動と一致する．

定理*C*.（三角格子上のAlternate量子ウォークと6状態の離散時間量子ウォークの関係）
あるユニタリー行列で定義される三角格子上の6状態の離散時間量子ウォークを考える．このとき，適切な初期状態の設定のもとで，三角格子上の6状態の離散時間量子ウォークの3n時間の挙動を6次元複素ベクトル空間の2次元部分空間に射影したものは三角格子上のAlternate量子ウォークの挙動と一致する．

Ⅲ．局在化現象：

量子ウォークの長時間挙動として，通常の古典ランダムウォークでは見られない局在化と言われる現象がある．この現象は，T. D. Mackay et al. (J. Phys. A: Math. Gen., 2002) らにより，正方格子上の Grover ウォークのシミュレーションにおいて発見された．局在化現象が起こるかどうかを調べるときに d 次元トーラス T^d 上の行列値関数の固有値を調べることが重要となる．

第 6 章では，$A^2=I$ を満たすユニタリー行列 A に付随した周期的なユニタリー推移作用素の局在化に関

する一般的な考察をする. Grover 行列はこの特別な場合となっている. 周期的なユニタリー推移作用素は, 1回で移動する点の集合（ステップ集合) Sと D次元複素ベクトル空間上のスペクトル分解 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in S}$により与えられる. ステップ集合 Sに原点に関して対称性をもつ（$\alpha\in S\Rightarrow -\alpha\in S$) 条件を課す. この仮定の下で以下を得る.

定理*D.* (一般型Groverウォークの局在化)
ユニタリー行列Aの固有値1の任意の固有ベクトル ϕに対して, $|P_\alpha\phi|^2=|P_{-\alpha}\phi|^2$を満たすとき, Aに付随した周期的なユニタリー推移作用素で与えられる離散時間量子ウォークはある点で局在化をもつ.

定理Dにより, 標準的なモデルであるd次元整数格子上の内部自由度$2d$のGroverウォークで局在化が起こることが分かる. さらに, この定理はGroverウォークの場合の一般化になっており, 高次元整数格子や内部自由度が高いモデルに対しても局在化現象をもつかどうか調べることができる.

次に, ステップ集合Sに原点に関する対称性の条件を仮定しない場合を考察する. $A^2=I$を満たすユニタリー行列Aに付随した周期的なユニタリー推移作用素H_1を考える. このときのステップ集合をSとする. また, 周期的なユニタリー推移作用素H_2を与える. H_2はH_1と同じステップ集合で与えられ, 移動する方向がH_1とは逆方向で定義されているものとする.

定理*E.* (一般型Groverウォークの2つの積の局在化)
行列Aの固有値1の固有空間の次元が固有値−1の固有空間の次元より真に小さいとき, 周期的なユニタリー推移作用素の2つの積$H_2\cdot H_1$で与えられる離散時間量子ウォークはある点で局在化をもつ.

定理Eよりステップ集合Sに対称性の仮定をすることなく局在化が起こる離散時間量子ウォークのモデルを構成することができる.

論文審査の結果の要旨

本論文の目的は、d 次元整数格子上の離散時間量子ウォークの長時間挙動の研究である。量子ウォークは、通常のランダムウォークの量子版として導入された。ランダムウォークが空間上を動く粒子の存在確率を問題するに対し、量子ウォークは空間と状態の両方を観測する。１次元整数格子上の量子ウォークの長時間極限分布は、ランダムウォークの長時間極限分布とは大きく異なっていることが、今野氏等（J.Math.Soc.Japan, 2005）により知られている。特に、局在化と呼ばれる特異な現象がしばしば観測され興味を持たれている。

本論文では、楯辰哉氏により導入された枠組み、すなわち周期的なユニタリー推移作用素の時間発展をｄ次元整数格子上の量子ウォークと定義し、局在化がどのような条件下で起こるかについて考察を与えている。

結果は大きく分けると３つである。一つ目は、正方格子上のある具体的に構成した量子ウォークの極限分布を具体的に求めたことである。これは、１次元整数格子上の量子ウォークの一般化となっている。また、量子情報理論における正作用素値測度を用いた表現を与えている。二つ目は、構成した量子ウォークと、C.DiFranco-M.McGettrick-Th.Busch(Phys.Rev.A,2011)で提案された Alternate 量子ウォークの関係について考察を与えている。また同様に、三角格子上の Alternate 量子ウォークと６状態量子ウォークの関係を明らかにし、計算が難しい６状態量子ウォークの分析への手がかりとした。三つ目は、楯氏との共同研究に基づく局在化現象に関する考察である。局在化が知られている Grover ウォークを拡張したあるクラスの量子ウォークに対して、局在化を持つための条件を明らかにし、局在化現象を持つ例を具体的に構成した。

いくつかの興味深い性質をもつ具体的な例を独力で構成し、極限分布を求めることに成功したこと、またそれを手がかりに局在化現象への理解を深め、特に、局在化の有無を決定する条件をみいだしたことは博士論文に相応しい研究成果である。また、今後の研究の方向性を見出したことにより、将来展望に期待を持てる。

以上は、自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。したがって，小松　尭提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。