（別紙様式５）

論　文　内　容　要　旨

(NO.　1)

氏　　名	長 谷 川　　翔 一	提出年	平成 28 年
学位論文の 題　　　目	Structure of solutions to a semilinear elliptic equation on the hyperbolic space (双曲空間におけるある半線形楕円型方程式の解構造)		

論　文　目　次

二階半線形楕円型方程式は，Lane-Emden 方程式が天体物理学において星の密度分布を表すように，様々な物理現象を記述する数理モデルに現れる．定数係数楕円型方程式についてはその詳細な数学的解析がなされている一方，物理現象を考える場が非一様であるときに現れる変数係数楕円型方程式については解析の進展は十分とは言えない．実際，一般の変数係数二階楕円型方程式において，変数係数の強い特異性により楕円型方程式の解の構造を詳細に調べることが困難となる場合がある．そのため，変数係数に何らかの特性を付す必要があると考えられる．変数係数に幾何学的特性を付す方法の一つとして，楕円型方程式を扱う場を Riemann 多様体とすることが挙げられる．本博士論文では，この方法により幾何学的特性を付した変数係数半線形楕円型方程式の解の構造を考察する．特に，Riemann 多様体として，非コンパクトな Riemann 多様体の代表例と言える双曲空間を採用する．2000 年以降に双曲空間における種々の偏微分方程式に関する研究が盛んに行われているが，この研究動向の中で，本博士論文はある半線形楕円型方程式の解の構造を明示したものとして位置づけることができる．また，双曲空間において楕円型方程式を扱うことは，特異性をもつ変数係数楕円型方程式を解析することと同値であり，本研究はその解析に一つの手法を与えるものである．

本博士論文で扱う双曲空間上の半線形楕円型方程式および研究の背景について述べる．Lane-Emden 方程式に代表される冪乗型非線形項をもつ楕円型方程式においては，冪乗項の冪の大きさによって解構造を特徴付ける研究が数多く行われている．例えば，ユークリッド空間における Lane-Emden 方程式では，正値解が存在するか否かが Sobolev 指数を境に分類されることから，Sobolev 指数は正値解の存在に関して臨界であると理解される．また，非自明安定解の存在に関する臨界指数も Joseph-Lundgren 指数として知られている．一方，双曲空間上の Lane-Emden 方程式については，解の正値性，安定性，いずれに関しても臨界指数が存在しないことが G. Mancini, K. Sandeep (2008) と E. Berchio, A. Ferrero, G. Grillo (2014) によって証明された．しかしながら，臨界指数は非線形項に付す変数係数，所謂，重みに依存するという既知の事実から，双曲空間上の Lane-Emden 方程式に適切な重みを付せば，解の正値性や安定性に関する臨界指数が得られると期待できる．以上の考察の下，本博士論文では，双曲空間の計量に由来する重みを非線形項に付した Lane-Emden 方程式（以下，この方程式を (H) と記す）を研究対象として選定する．

本博士論文の構成を述べる．第 1 章では，研究の背景，動機と本博士論文において扱う方程式 (H) の紹介及び主結果を説明する．第 2 章以降の内容は以下の通りである:

第 2 章：安定性に関する解の構造
第 3 章：動径対称解の符号と漸近挙動による分類

第 2 章では，最初に方程式 (H) の非自明安定解の存在に関する臨界指数の候補を決定する．具体的には，非線形項の冪として現れる指数がある値より小さいならば (H) の非自明安定解は存在しない，という Liouville 型の定理を証明し，この指数の閾値を臨界指数の候補とする．解析手法は，上記の安定性の概念を与えた A. Farina (2007) において用いられた手法であり，より一般の楕円型方程式に対して Liouville 型の定理を示す際にも適用され得るものである．この手法の長所の一つは解の動径対称性を必要としないことであり，実際，(H) についても解の安定性以外の仮定を課すことなく Liouville 型の定理を示すことができる．次に，上で与えた指数が (H) の解の安定性に関する臨界指数であるこ

とを示す．すなわち，その指数よりも非線形項に現れる冪乗の指数が大きいならば非自明安定解が存在することを証明する．証明の鍵は，層構造をなす動径対称解の族を構成することである．実際，そのような族を構成できれば標準的な議論により，その族は安定解からなることを証明できる．層構造をなすことを示すために，重みに依存するスケール変換を施した二つの動径対称解の差がみたす方程式を導出する．この方程式を介して，双曲空間の計量から定まるある正値関数と二つの動径対称解の差について Sturm-Liouville の比較原理を適用することができ，二つの動径対称解が交わらないことを証明することができる．ここで，原点での値が十分小さい動径対称解は安定であることが示されたが，原点での値が大きい場合にはその限りではない．実際，指数が Joseph-Lundgren 指数より小さい場合に原点での値が十分大きい動径対称解は不安定となることを示すことができる．この結果は，(H) の動径対称解にスケーリングに基づく変数係数を施し，原点での値をパラメータとする関数列を構成すると，その関数列の極限がユークリッド空間における Hénon 方程式の動径対称解となることから従う．

第 3 章では，方程式 (H) の動径対称解の符号に着目し，非線形項の冪乗に現れる指数による動径対称解の構造の変化を明らかにする．双曲空間における Lane-Emden 方程式では解の正値性に関する臨界指数は存在しないが，符号変化解の存在に関しては Sobolev 指数が臨界指数となることが知られている．一方，第 2 章による考察から方程式 (H) の解の構造は Lane-Emden 方程式のそれとは大きく異なると予想される．実際に，第 3 章では，(H) の正値動径対称解の存在に関する臨界指数，および (H) の符号変化する動径対称解の存在に関する臨界指数の存在を証明する．特に，動径対称解の正値性に関する臨界指数の存在は，Lane-Emden 方程式と方程式 (H) の動径対称解の構造が全く異なることを明示するものである．(H) について得られるこれらの臨界指数の存在は，(H) に対応する Pohozaev 恒等式に関連した特別な関数を構成することで得られる．実際，(H) の非線形項の冪乗に現れる指数を動かしたときに，構成した関数の単調性は臨界指数を境に変化しており，この事実から動径対称解の符号に関する臨界指数を決定することができる．さらに，第 3 章では，方程式 (H) の動径対称解を零点の個数と無限遠方での漸近挙動に関して分類する．具体的には，解は限りなく多くの零点をもつか否か，もたないならば解の無限遠方での減衰は空間の計量から定まる標準的な減衰と一致するかそれより遅いか，という 3 タイプに (H) の動径対称解を分類する．ここで，解の減衰が標準的な減衰より速い動径対称解は存在しないことを示すことができるため，任意の動径対称解はいずれかのタイプへと分類される．なお，(H) は Lane-Emden 方程式も含み得るため，第 3 章における結果は双曲空間上の Lane-Emden 方程式についても新しい事実を与えるものである．実際，有限個の零点をもち標準的な減衰よりも速く減衰する動径対称解の存在を Lane-Emden 方程式に関して証明することができる．この解の存在は E. Yanagida, S. Yotsutani (1993) において提示された手法を用いて示すことができる．すなわち，原点での値をパラメータとする動径対称解の族を構成し，Prüfer 変換を介することによって，無限遠方での減衰率を指定した解の族と滑らかに繋ぎ合わせ，目的の動径対称解を構成する．

別　紙

論文審査の結果の要旨

楕円型方程式の解の安定性や対称性，動径対称解の零点数や無限遠方における減衰率による分類など，楕円型方程式の解構造に関する研究は今なお多くの研究者の興味を惹きつけている分野の一つである．定数係数の場合には，半線形楕円型方程式の典型例である Lane-Emden 方程式や種々の Hénon 型方程式について詳細な結果が既に得られている．一方，変数係数の場合，一般には同等の詳細な結果を得ることは困難であるため，変数係数に適当な制限を課す必要がある．その一つの方法は，楕円型方程式を考える場を Riemann 多様体とすることにより，幾何的特性をもつ変数係数楕円型方程式を考察することである．長谷川翔一は Riemann 多様体として，非コンパクトな Riemann 多様体の典型例である双曲空間を設定し，ある半線形楕円型方程式の解構造の解明に取り組んだ．

双曲空間における Lane-Emden 方程式の解構造に関する先駆的な研究成果をユークリッド空間の場合と比較すると，解構造の豊富さが失われていることがわかる．臨界指数は非線形項に付す変数係数，所謂，重みに依存するという事実から，長谷川は本博士論文において，双曲空間における Lane-Emden 方程式に適切な重みを付すことによって解構造の豊富さを回復することができるか，という問題を設定し解構造に関する解析を行った．

長谷川が得た結果は，双曲空間における Lane-Emden 方程式に適切な重みを付すとき，ユークリッド空間の場合と同等の豊富な解構造をもつ，というものである．特筆すべきは，変数係数楕円型方程式の解構造を上記のように詳細に取り出し得るためにはどのような重みを付すべきか，ということに対して新たな知見を与えたことである．ユークリッド空間における Lane-Emden 方程式では重みとして測地距離の冪を採用する，という理解が一般的であった．それに対して長谷川は，体積要素の冪を重みとして採用するという着想を得て，上記の結果を得るに至った．実際，双曲空間における Lane-Emden 方程式に測地距離の冪を重みとして付した研究結果も存在するが，長谷川の結果のような詳細な解構造を取り出すには至っていない．長谷川が与えた重みに関する知見は，楕円型方程式をより一般の Riemann 多様体において考察する上で重要な示唆を与えるものであると言える．

以上のように本博士論文は，自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している．したがって，長谷川翔一提出の博士論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める．