

任意断面のせん断遅れを考慮できる梁要素*

A beam element for shear lag analysis of beams with arbitrary cross section

斉木 功¹, 西井大樹², 山本剛大³

Isao SAIKI, Daiki NISHII and Takeki YAMAMOTO

¹ 東北大学大学院工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

² 川田工業株式会社鋼構造事業部 (〒114-8562 東京都北区滝野川 1-3-11)

³ 東北大学大学院工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

In wide box girder bridges or multi-girder bridges with wide girder spacing, the bending strain on the flange or slab is not uniform in the direction perpendicular to the bridge axis due to the shear lag effect. For the analysis of shear lag, an analytical method with the assumption of displacement distribution due to shear lag has been proposed, then it has been developed into the method in which displacement is expressed by series expansion. Authors have proposed semi-analytical approach to solve the shear lag problem with the help of the homogenized beam theory. In this paper, we propose a beam element that can take into account the distribution of shear lag displacement from numerical analysis of the homogenized beam. A simple box girder and a continuous box girder are analyzed by the present element and these results show agreement with the analytical solution and ordinary three-dimensional finite element analysis.

Key Words: Shear lag, Periodic Boundary Condition, Homogenized Beam, Beam Element

1. はじめに

橋梁等の鋼構造物で用いられる箱形断面梁のような薄肉構造では、断面の変形によって初等梁理論によるたわみや応力の解析精度が低下することが知られている。特に、支間に比べて幅が大きくなる梁では、曲げによるフランジの応力がウェブから離れるにつれ小さくなる、いわゆるせん断遅れが問題となる。

せん断遅れの先駆的な研究は、Reissner⁽¹⁾ によりなされた。Reissner は極めて薄いフランジを有する箱形断面の梁を対象とし、フランジにおける軸方向変位の幅方向の分布を放物線と仮定し、その大きさを自由度として追加した支配方程式を定式化している。その後、せん断遅れ変位分布の高精度化の試みがなされており、例えば Chang and Yun⁽²⁾ はその近似に 4 次関数を用いてより高精度化し、断面高さの変化する桁に対するせん断遅れ解析を行った。また Song and Scordelis⁽³⁾ は調和解析によるせん断遅れ解析を提案している。さらに、Evans and Ahmad⁽⁴⁾ は調和解析による合成箱桁のせん断遅れ解析を有限要素解析と比較してその精度の検証

を行っている。

一方、近年では、梁要素にそり等の変形モードを組み込んだ一般化要素によるせん断遅れの数値解析⁽⁵⁾ も報告されている。同様のアプローチとして、Luo et al.⁽⁶⁾ や Zhou⁽⁷⁾ は Reissner の手法で導入したせん断遅れの程度を表す自由度を他の変位とともにそのまま離散化する数値解析を提案している。これらの拡張した梁要素に基づく方法では、通常の梁理論にせん断遅れを表す自由度を加えるだけなので計算コストに優れるが、Reissner と同様にせん断遅れに起因するフランジの橋軸方向変位分布を仮定する必要がある、適用範囲や精度は断面形状と仮定する変位分布に依存する。

一方、著者らは周期境界条件を用いた梁の均質化法により、梁の代表体積要素に曲げモーメントやせん断力を独立に作用させることのできる数値要素試験を提案している^(8, 9)。さらにこの方法を援用して、前述のせん断遅れ解析の鍵となる橋軸方向変位の橋軸直角方向分布を、せん断変形を与えた代表体積要素のフランジ等の変位によって数値的に求め、それを解析的手法に組み込むせん断遅れの半解析的手法を構築した^(10, 11)。この方法によれば、代表体積要素の数値解析を行うことで、複雑な形状の断面に対しても精度の良いせん断遅れ変形が得られる。そこで本論文では、この方法と組み合わせることのできる梁要素を提案することを目的とした。

* 原稿受付 2018 年 03 月 19 日, 改訂 2018 年 08 月 26 日, 発行 2018 年 09 月 27 日. ©2018 年 日本計算工学会.

Manuscript received, March 19, 2018; final revision, August 26, 2018; published, September 27, 2018. Copyright ©2018 by the Japan Society for Computational Engineering and Science.

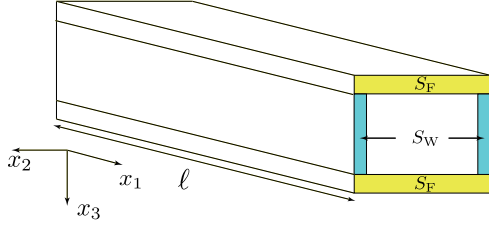


Fig.1 Cross section of a beam and its subdomains.

2. せん断遅れの半解析的手法

この章では、本論文で用いる均質化梁を利用したせん断遅れの半解析的手法を、著者らの既発表の文献^(10, 11)を要約することにより概説する。

2.1 問題と変位場の設定

Fig.1に示すような長さ l の長さ方向に一樣な任意形状断面の梁を解析対象とする。解析対象の梁軸方向領域 L 、断面において主に曲げを受けせん断遅れを考慮するフランジ領域 S_F とそれ以外のウェブ領域 S_W を定義する¹。梁軸方向を x_1 、梁軸直角水平方向を x_2 、鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する。このとき、 x_2, x_3 の原点は断面に曲げのみが作用したときの中立軸の位置とする。

ここで、せん断遅れを考慮する領域が非常に薄い場合、せん断遅れによる橋軸方向の変位の鉛直方向分布は無視することができる。これを利用して、Reissner⁽¹⁾や著者ら⁽¹⁰⁾では、 S_F における軸方向の変位 u_1 を曲げによる変位とせん断遅れによる変位の和として

$$u_1 = h \left(-\frac{du_3(x_1)}{dx_1} + f_1(x_2)g(x_1) \right) \quad (1)$$

と表した。ここで、 h はフランジ領域図心の x_3 軸座標値、 u_3 は梁のたわみ、 $f_1(x_2)$ はせん断遅れの梁橋軸直角方向分布形状を表す無次元関数、 $g(x_1)$ は長さの次元を持つせん断遅れ変位であり x_1 の関数である。せん断遅れの変位の分布形状を表す f_1 は、Reissner⁽¹⁾は箱形断面のフランジでは2次関数を仮定しており、その後より高次の関数も用いられている⁽²⁾。

著者ら⁽¹¹⁾は、フランジが薄いとはみなせない梁においてせん断遅れによる梁軸方向変位の分布を断面内の2方向の関数 $f(x_2, x_3)$ と再定義することを提案している。この f は任意の断面形に対して精度の良い仮定をすることはできない。そこで、非均質梁の代表体積要素²に周期境界条件のもとで一樣せん断変形を与えることで数値的に f を求めておく。また、Timoshenko

¹せん断遅れを考慮しなければならない薄肉断面においては、ウェブ領域でのせん断遅れ変位は無視できる程度なので、すべてをフランジ領域としても結果に与える影響はわずかであるが、せん断遅れ変位 f の物理的意味を明確にするために S_F と S_W を定義した。

²ここでは、長さ方向に均質な梁を扱っているので、任意の長さを有する梁の一部分を代表体積要素とする。

梁としての面外せん断ひずみ $\tilde{\gamma}$ も考慮すると、せん断遅れの変位分布関数 $f(x_2, x_3)$ を用いて、 S_F における軸方向の変位 u_1 が

$$u_1 = x_3\theta + f(x_2, x_3)g(x_1) \quad (2)$$

と表すことができる。ここに、 θ は断面の回転角で

$$\theta := \tilde{\gamma} - \frac{du_3}{dx_1} \quad (3)$$

と定義した。本論文においても、梁の変位場として上式を用いることとする。

2.2 支配方程式の定式化

曲げを受ける梁の全ポテンシャルエネルギー Π を

$$\Pi := \Pi_F + \Pi_W + \Pi_Q - \Pi_{\text{ext}} \quad (4)$$

と表す。ここに、 Π_F は $S_F \times L$ の曲げおよび面内せん断によるひずみエネルギー

$$\Pi_F := \frac{1}{2} \int_L \int_{S_F} (E\epsilon^2 + G\gamma_{12}^2) dS dx_1 \quad (5)$$

Π_W は $S_W \times L$ の曲げひずみエネルギー

$$\Pi_W := \frac{(EI)_W}{2} \int_L \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{dx_1} - \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 \quad (6)$$

Π_Q は梁の面外せん断ひずみエネルギー

$$\Pi_Q := \frac{1}{2} \int_L G\kappa A \tilde{\gamma}^2 dx_1 \quad (7)$$

であり、 $\Pi_{\text{ext}} := \int_L q(x_1) u_3 dx_1$ は分布荷重の外力ポテンシャルである。ここで、Young係数を E 、せん断弾性係数を G 、単位長さあたりの鉛直方向外力を $q(x_1)$ 、軸ひずみを ϵ 、 x_1 - x_2 面内せん断ひずみを γ_{12} 、梁の面外せん断ひずみを $\tilde{\gamma}$ 、せん断補正係数を κ 、梁の断面積を A とし、 $(EI)_W$ はウェブ領域 S_W の曲げ剛性に相当するように

$$(EI)_W := \int_{S_F} E(x_3)^2 dS \quad (8)$$

と定義した。軸ひずみ ϵ および x_1 - x_2 面内せん断ひずみ γ_{12} は、式(2)より

$$\epsilon = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = x_3 \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{dx_1} - \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} \right) + f \frac{dg}{dx_1} \quad (9)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} g \quad (10)$$

と表される。

梁の境界値問題は全ポテンシャルエネルギーを停留させる問題となる。詳細な式展開は文献⁽¹¹⁾に譲り、結果のみを示すと、 Π の $u_3, \tilde{\gamma}, g$ に関する変分がそれぞれゼロになることから

$$-(EI)\phi - R_1 \frac{dg}{dx_1} + M = 0 \quad (11)$$

$$G\kappa A \tilde{\gamma} - \frac{dM}{dx_1} = 0 \quad (12)$$

$$-R_1 \frac{d\phi}{dx_1} - R_2 \frac{d^2 g}{dx_1^2} + R_3 g = 0 \quad (13)$$

を得る．ここで M は断面に作用する曲げモーメント， (EI) は断面全体の曲げ剛性， ϕ は曲率， R_i ($i = 1, 2, 3$) はせん断遅れに関するパラメタであり，それぞれ

$$(EI) := \int_{S_F \cup S_W} E (x_3)^2 dS \quad (14)$$

$$\phi := \frac{d\theta}{dx_1} \quad (15)$$

$$R_1 := \int_{S_F} E x_3 f dS, \quad R_2 := \int_{S_F} E f^2 dS \quad (16)$$

$$R_3 := \int_{S_F} G \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 dS$$

と定義した． R_i ($i = 1, 2, 3$) は 2.1 節に記述した梁の代表体積要素の解析により数値的に求めた f を数値積分することにより得られる^(10, 11)．

3. せん断遅れを組み込んだ梁要素の定式化

Iwakuma et al.⁽¹²⁾ の 2 節点 Timoshenko 梁要素に，せん断遅れの自由度を組み込んだ梁要素を定式化する．要素長を ℓ ，両端の節点を節点 1，節点 2 とし，節点 1 で $x_1 = 0$ ，節点 2 で $x_1 = \ell$ となる局所座標系 x_1 を定義する．以後，梁のたわみを w ，たわみ角を $\vartheta = \frac{dw}{dx_1}$ ，節点 i ($i = 1, 2$) におけるたわみを w_i^e ，たわみ角を ϑ_i^e ，断面の回転角を θ_i^e と表す．Iwakuma et al.⁽¹²⁾ の Timoshenko 梁要素では，梁の面外せん断ひずみ $\tilde{\gamma}(x_1)$ は要素内で一定としており，要素内の面外せん断ひずみを

$$\tilde{\gamma}(x_1) := \tilde{\gamma}^e = \text{constant} \quad (17)$$

と表す．ここで，たわみ角と断面の回転角の関係より，節点でのたわみ角 ϑ_i^e ($i = 1, 2$) は

$$\vartheta_i^e = \theta_i^e - \tilde{\gamma}^e \quad (18)$$

と表される．

要素内任意点におけるたわみは 3 次の内挿関数 $\psi_i(x_1)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) を用いて

$$w(x_1) = \psi_1(x_1) w_1^e + \psi_2(x_1) \vartheta_1^e + \psi_3(x_1) w_2^e + \psi_4(x_1) \vartheta_2^e \\ = \psi_1(x_1) w_1^e + \psi_2(x_1) \theta_1^e + \psi_3(x_1) w_2^e \\ + \psi_4(x_1) \theta_2^e + (-\psi_2(x_1) - \psi_4(x_1)) \tilde{\gamma}^e \quad (19)$$

と離散化する．ここに，内挿関数は

$$\psi_1 = 1 - \frac{3(x_1)^2}{\ell^2} + \frac{2(x_1)^3}{\ell^3}, \quad \psi_2 = -x_1 + \frac{2(x_1)^2}{\ell} - \frac{(x_1)^3}{\ell^2} \\ \psi_3 = \frac{3(x_1)^2}{\ell^2} - \frac{2(x_1)^3}{\ell^3}, \quad \psi_4 = \frac{(x_1)^2}{\ell} - \frac{(x_1)^3}{\ell^2} \quad (20)$$

とした．

節点 1, 2 におけるせん断遅れ変位 g をそれぞれ g_1^e , g_2^e と表す．要素内任意点におけるせん断遅れ変位は 1 次の内挿関数 $\phi_i(x_1)$ ($i = 1, 2$) を用いて

$$g(x_1) = \phi_1(x_1) g_1^e + \phi_2(x_1) g_2^e \quad (21)$$

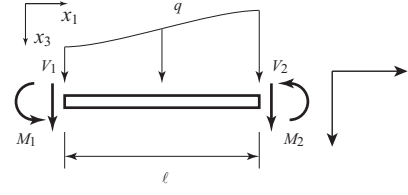


Fig. 2 Definitions of external loads applied to a beam element.

と離散化する．ここに，内挿関数は

$$\phi_1(x_1) = 1 - \frac{x_1}{\ell}, \quad \phi_2(x_1) = \frac{x_1}{\ell} \quad (22)$$

とした．

Fig.2 に示すように節点 i に作用する外力を V_i ，モーメント外力を M_i とする．また，要素に作用する分布外力を $q(x_1)$ とする．

要素剛性方程式を定式化するために，1 要素の全ポテンシャルエネルギー $(\Pi)^e$ を，式 (4) により定義する．ただし，外力ポテンシャルは Fig.2 を参照して

$$\Pi_{\text{ext}} := \int_L q(x_1) w dx_1 \\ + V_1 w(0) + V_2 w(\ell) + M_1 \theta(0) + M_2 \theta(\ell) \quad (23)$$

とする．要素の全ポテンシャルエネルギーに式 (2) で定義した変位場を代入する．式 (9), (10) を考慮すると，要素の全ポテンシャルエネルギーは

$$(\Pi)^e = \frac{1}{2} \int_L \left\{ (EI) \left(\frac{d\theta}{dx_1} \right)^2 + 2R_1 \frac{d\theta}{dx_1} \frac{dg}{dx_1} \right. \\ \left. + R_2 \left(\frac{dg}{dx_1} \right)^2 + G\kappa A \tilde{\gamma}^2 + R_3 g^2 \right\} dx_1 \\ - \Pi_{\text{ext}} \quad (24)$$

と表せる．つり合い状態では全ポテンシャル $(\Pi)^e$ の変分がゼロになることから

$$\int_L \left\{ EI \frac{d\theta}{dx_1} \frac{d\delta\theta}{dx_1} + R_1 \frac{dg}{dx_1} \frac{d\delta\theta}{dx_1} + G\kappa A \tilde{\gamma} \delta\tilde{\gamma} - q \delta u_3 \right. \\ \left. + R_1 \frac{d\theta}{dx_1} \frac{d\delta g}{dx_1} + R_2 \frac{dg}{dx_1} \frac{d\delta g}{dx_1} + R_3 g \delta g \right\} dx_1 \\ - V_1 \delta u_3(0) - V_2 \delta u_3(\ell) + M_1 \delta\theta(0) + M_2 \delta\theta(\ell) = 0 \quad (25)$$

を得る．

式 (19), (21) で定義した内挿関数を用いて式 (25) を離散化すると，要素剛性方程式

$$\mathbf{K}_0 \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ g_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \\ g_2^e \\ \tilde{\gamma}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q\ell}{2} + V_1 \\ -\frac{q\ell^2}{12} + M_1 \\ 0 \\ \frac{q\ell}{2} + V_2 \\ \frac{q\ell^2}{12} + M_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

を得る．ここに，要素剛性行列 \mathbf{K}_0 は

$$\mathbf{K}_0 := \begin{bmatrix} (\mathbf{k}_0)_1 & (\mathbf{k}_0)_2 & (\mathbf{k}_0)_4 \\ (\mathbf{k}_0)_2^T & (\mathbf{k}_0)_3 & (\mathbf{k}_0)_5 \\ (\mathbf{k}_0)_4^T & (\mathbf{k}_0)_5^T & G\kappa A\ell + \frac{12EI}{\ell} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$(\mathbf{k}_0)_1 := \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ \frac{4EI}{\ell} & \frac{R_1}{\ell} & \\ \text{symm.} & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{3} & \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$(\mathbf{k}_0)_2 := \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{R_1}{\ell} \\ 0 & -\frac{R_1}{\ell} & -\frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{6} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$(\mathbf{k}_0)_3 := \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ \frac{4EI}{\ell} & \frac{R_1}{\ell} & \\ \text{symm.} & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{3} & \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$(\mathbf{k}_0)_4 := \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{k}_0)_5 := \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{\ell^2} \\ -\frac{6EI}{\ell} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

である．

式(26)の7行目を書き下すと

$$\begin{aligned} \frac{12EI}{\ell^2} w_1^e - \frac{6EI}{\ell} \theta_1^e - \frac{12EI}{\ell^2} w_2^e \\ - \frac{6EI}{\ell} \theta_2^e + \left(G\kappa A\ell + \frac{12EI}{\ell} \right) \gamma^e = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

となるので，これを γ^e について解いて，式(26)の1~6行目に代入し静的縮約すると，1節点あたり3自由度の要素剛性方程式として

$$\mathbf{K} \begin{Bmatrix} w_1^e \\ \theta_1^e \\ g_1^e \\ w_2^e \\ \theta_2^e \\ g_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q\ell}{2} + V_1 \\ -\frac{q\ell^2}{12} + M_1 \\ 0 \\ \frac{q\ell}{2} + V_2 \\ \frac{q\ell^2}{12} + M_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

を得る．要素剛性行列 \mathbf{K} は

$$\mathbf{K} := \begin{bmatrix} (\mathbf{k})_1 & (\mathbf{k})_2 \\ (\mathbf{k})_2^T & (\mathbf{k})_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$(\mathbf{k})_1 := \begin{bmatrix} \frac{6}{\ell^2\alpha} & -\frac{3}{\ell\alpha} & 0 \\ \frac{2}{\alpha} \left(1 + \frac{3EI}{\ell^2 G\kappa A} \right) & \frac{R_1}{\ell} & \\ \text{symm.} & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{3} & \end{bmatrix} \quad (35)$$

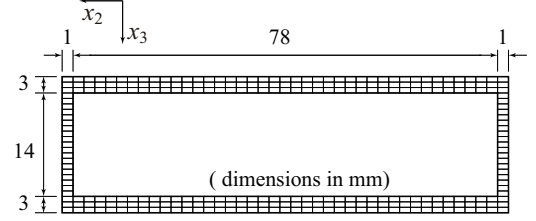


Fig. 3 The box cross section of the beam.

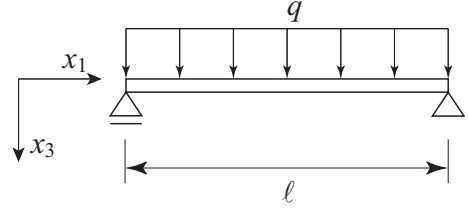


Fig. 4 The load and support conditions of the beam.

$$(\mathbf{k})_2 := \begin{bmatrix} -\frac{6}{\ell^2\alpha} & -\frac{3}{\ell\alpha} & 0 \\ \frac{3}{\ell\alpha} & \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{6EI}{\ell^2 G\kappa A} \right) & -\frac{R_1}{\ell} \\ 0 & -\frac{R_1}{\ell} & -\frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{6} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$(\mathbf{k})_3 := \begin{bmatrix} \frac{6}{\ell^2\alpha} & \frac{3}{\ell\alpha} & 0 \\ \frac{2}{\alpha} \left(1 + \frac{3EI}{\ell^2 G\kappa A} \right) & \frac{R_1}{\ell} & \\ \text{symm.} & \frac{R_2}{\ell} + \frac{R_3\ell}{3} & \end{bmatrix} \quad (37)$$

である．ここに， α は

$$\alpha := \frac{\ell}{2EI} + \frac{6}{\ell G\kappa A} \quad (38)$$

と定義した．

4. 提案要素の検証

3章で定式化したせん断遅れを組み込んだ梁要素による解を2章で示した支配方程式(11)~(13)の解析解と比較することで，提案要素の検証を行う．

Fig.3に示した箱形断面の梁がFig.4のように単純支持されて鉛直下向きの等分布荷重を受けるモデルを解析する．断面を構成する材料のYoung係数およびPoisson比は $E = 1.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0$ とした． x_1 の原点を支点間の中央に設定して支間長を $\ell = 500 \text{ mm}$ ，鉛直等分布荷重 $q = 1.0 \text{ N/mm}$ とする．支配方程式(11)~(13)に基づくこのモデルの解析解は著者らが文献(11)で報告しており， ϕ , u_3 , g の解析解を付録Aに示した．

提案梁要素の要素数は10, 50, 250と変化させて解析を行った．ここで用いるせん断遅れパラメタ R_1 , R_2 , R_3 は著者らの文献(11)で提案した方法によって数値的に求め，解析解・提案要素解とも同じ値を用いた．なお，せん断遅れパラメタを算出する際の代表体積要素

Table 1 The properties of the box beam.

axial stiffness EA	$5.080 \times 10^5 \text{ N}$
bending stiffness EI	$3.550 \times 10^7 \text{ Nmm}^2$
shear stiffness GkA	$1.263 \times 10^4 \text{ N}$
shear lag parameter R_1	$2.420 \times 10^6 \text{ Nmm}$
shear lag parameter R_2	$2.089 \times 10^5 \text{ N}$
shear lag parameter R_3	$1.695 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$

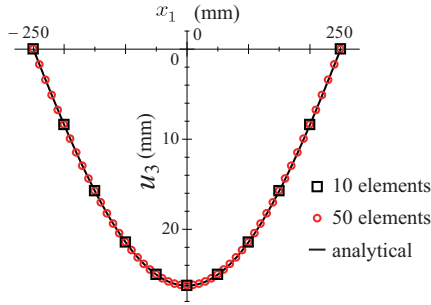


Fig. 5 The deflection distribution along the length by the present beam element.

断面の要素分割は、要素サイズが $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ とした³。Fig.3 の断面の曲げ剛性やせん断遅れパラメタの値を Table 1 にまとめた。

解析解と 10 要素, 50 要素の提案梁要素によって求めた u_3, g の軸方向分布をそれぞれ Fig.5, 6 に示した。どの図においても本解析による結果は解析解と定性的に一致していることが確認できる。

提案梁要素による解 β_p と解析解 β_a との差の L^2 ノルムを解析解の L^2 ノルムで無次元化した値

$$\sqrt{\frac{\int_L (\beta_p - \beta_a)^2 dx_1}{\int_L (\beta_a)^2 dx_1}} \quad (39)$$

を L^2 ノルム相対誤差として定義する。要素分割数と、

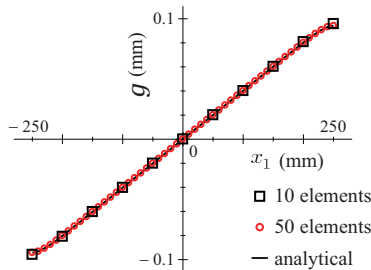


Fig.6 The shear lag displacement distribution along the length by the present beam element.

³この要素分割は f やせん断遅れパラメタの精度に影響をおよぼすが、ここでは本解析と解析解ともに同じせん断遅れパラメタを用いたことから、要素分割は本章での精度検証に影響をおよぼさない。

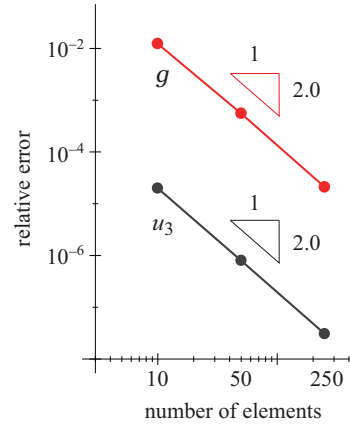


Fig.7 The relative error of the result by the present beam element to the analytical solution.

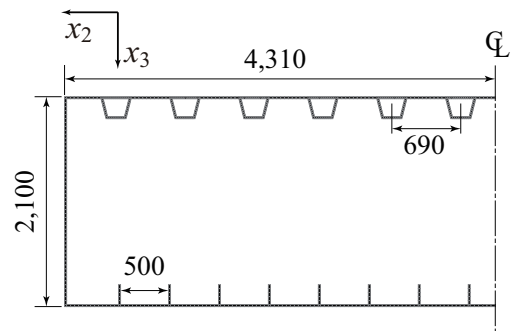


Fig. 8 The cross section of the stiffened girder. (dimensions in mm)

たわみ ($\beta = u_3$) およびせん断遅れ変位 ($\beta = g$) の L^2 ノルム相対誤差の関係を Fig.7 に示す。せん断遅れ変位 g の相対誤差は、たわみ u_3 の相対誤差に比べ 2 桁程度大きく精度がよくない。式 (2) に示すように、軸方向変位が u_3 の導関数と g の和として定義されていることから、 g の精度は u_3 の導関数の精度で抑えられているために精度の差が生じていると考えられる。一方、たわみおよびせん断遅れ変位の L^2 ノルム相対誤差の傾きはともに -2.0 であった。以上より、非常に単純な問題ではあるが、提案要素が解析解に収束することが確認された。

5. 幅広補剛桁のせん断遅れ解析

本論文で提案したせん断遅れを組み込んだ梁要素の実用性を検証するために、アーチ橋や斜張橋等で用いられるような鋼床版を有する幅広の補剛桁を対象とした解析を行った。解析対象は幅 8.62m, 桁高 2.1m の単室箱桁とし、その断面図を Fig.8 に示す。ただし、 x_1 - x_3 面で対称なため、半分の $x_2 > 0$ の領域のみ示す。床版部には台形の閉リブを用い、下フランジは平鋼の補剛材を配置した。これらの補剛材の詳細を Fig.9 に示す。断面は、近年建設されている気仙沼大島大橋（中路アーチ橋）⁽¹³⁾ の補剛桁を参考に、形状を単純化し、

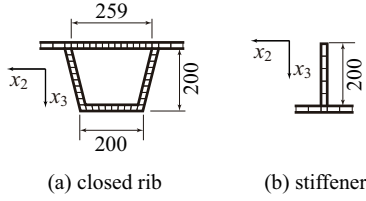


Fig. 9 The detail of the stiffeners. (dimensions in mm)

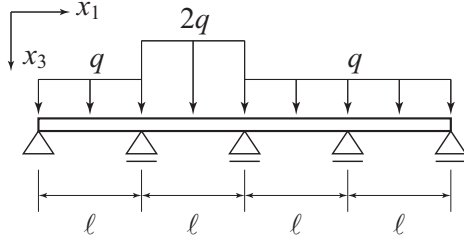


Fig. 10 The four-span continuous beam subjected to distributed load.

板厚は上下フランジ，ウェブ，補剛材すべて 20mm とした．鋼床版側の閉リブは中心間距離 690mm で計 12 個，下フランジの補剛材は中心間距離 500mm で計 16 個配置した．

実際の長大橋では，補剛桁は 10~15m 程度の間隔で吊材に支持されている．ここでは吊材間隔を $\ell = 15\text{m}$ とし，吊材による支持点をヒンジ支点としてモデル化し，4 径間分を解析領域 L とした．解析対象の梁モデルの境界条件を Fig.10 に示す．図中にあるように，左から第 1，第 3，第 4 径間に q ，第 2 径間に $2q$ の分布荷重を作用させた．図中 x_1 軸を橋軸， x_3 軸方向を鉛直方向，紙面に垂直な x_2 軸方向を橋軸直角水平方向と呼ぶこととする．

この断面の代表体積要素を 8 節点 6 面体要素で作成した．要素分割に関しては，板厚方向 1 要素，橋軸直角水平方向 40mm，橋軸方向 40mm，鉛直方向 39mm 程度を基本とし，閉リブは 20mm 程度，平鋼補剛材は 40mm となっている．橋軸方向は一様なため，代表体積要素の軸方向は 1 要素とし，総要素数は 1,054，節点数は 4,168 となった．

この代表体積要素に，非均質梁の平均物性評価法⁽⁸⁾を適用し，一様せん断変形を与えた⁴ときの変形を Fig.11 に示す．図は三面図であり，コンターは橋軸方向変位の分布を表す．補剛材はあるものの，基本的には箱形断面なので，橋軸直角水平方向にはよく知られた放物線に近い変位の分布となっている．前述のせん断遅れパラメータを，この解析によって得られた橋軸方向変位分布から，文献⁽¹¹⁾で提案した方法で数値積分により求めた．同様に，代表体積要素に一様曲率を与

⁴詳細は文献⁽⁸⁾に譲るが，左右の両断面の対応する節点にせん断変形に相当する鉛直方向相対変位を与え，かつ，代表体積要素全体が剛体回転しないように平均回転がゼロになるような多点拘束条件を与えている．

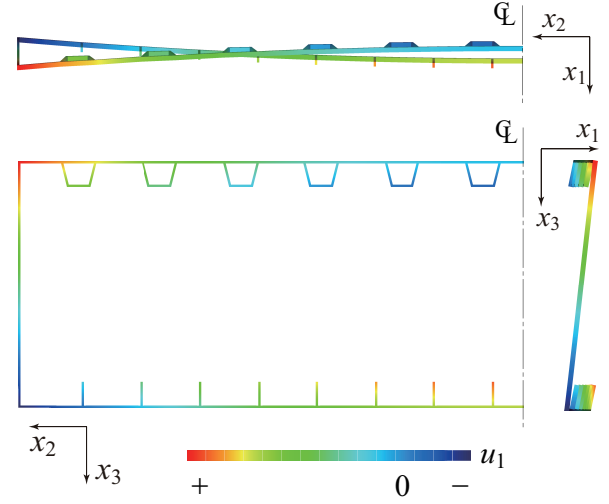


Fig. 11 The orthographic view of the out-of-plane shear deformation of the representative volume element with color-coded longitudinal displacement.

Table 2 The properties of the stiffened girder.

axial stiffness EA	$1.258 \times 10^{11} \text{ N}$
bending stiffness EI	$1.127 \times 10^{11} \text{ Nm}^2$
shear stiffness GkA	$7.776 \times 10^8 \text{ N}$
shear lag parameter R_1	$6.477 \times 10^{10} \text{ Nm}$
shear lag parameter R_2	$4.706 \times 10^{10} \text{ N}$
shear lag parameter R_3	$1.958 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

えて曲げ剛性 (EI) を数値的に求めた．これらの断面の諸量を Table 2 にまとめた．これらのパラメータを用いて，本提案要素により解析を行った．なお，要素分割は後述する参照解の橋軸方向分割数と同じ 1,500 要素とした．

参照解とするため，この代表体積要素を橋軸方向に 1,500 並べ， $15\text{m} \times 4 = 60\text{m}$ の 4 径間梁のモデルを作成した．ただし， x_1 - x_3 面に関する対称性を考慮し，半解析のモデルとした．この有限要素モデルによる解を，以後，ソリッド要素解と呼ぶこととする．有限要素モデルの断面の分割は，前述の代表体積要素と同じとし，軸方向の分割数は提案梁要素による本解析と同じとした．このモデルの要素数は 790,500，節点数は 1,567,044 である．支点は，支点上の断面を構成するすべての節点の鉛直方向変位を拘束することで表現した．分布荷重は，フランジ上に載荷すると梁理論で想定していない橋軸回りの曲げがフランジに生じることから，ウェブに相当する領域の節点に単位橋軸方向長さ当たりの荷重が梁と同じになるように載荷した．さらに，本論文で想定している曲げ・面外せん断・せん断遅れ変形以外の断面変形を拘束するため，すべての節点で橋軸直角水平方向変位を拘束した．

参照解の変形と曲げ応力分布を Fig.12 に示す．曲げ応力は荷重の大きい第 2 径間の両支点の負曲げおよび

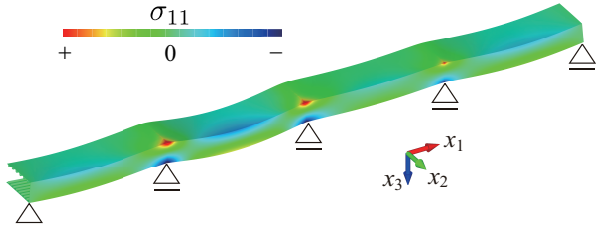


Fig. 12 The deformation and bending stress distribution of the reference solution of the four-span continuous beam.

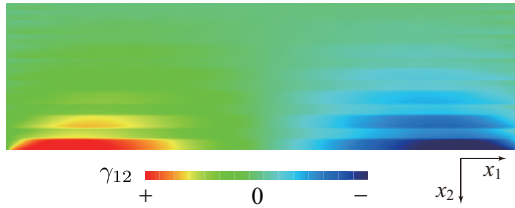


Fig. 13 The shear strain distribution on the upper flange of the second span.

支間中央付近の正曲げで比較的大きくなっている．さらに，せん断遅れ変形のため，橋軸直角水平方向ではウェブ付近で曲げ応力が大きくなっている．Fig.13には第2径間上フランジ上面の面内せん断ひずみ γ_{12} の分布を示す．両支点付近かつウェブ付近で面内せん断ひずみが大きくなっており，せん断遅れ変形が確認できる．また，補剛材により面内せん断ひずみの分布が複雑になっていることも確認できる．

Fig.14に提案要素とソリッド要素によるたわみの橋軸方向分布を示す．ただし，橋軸方向位置は支間長 ℓ で無次元化した \bar{x} で，たわみは後述する Bernoulli-Euler 梁によるたわみの最大値で無次元化したたわみ \bar{w} で示している．ソリッド要素解は，中立面に最も近いウェブの外側の節点の鉛直方向変位である．図中の実線の present は本論文で提案するせん断遅れを考慮した Timoshenko 梁要素，Timoshenko はせん断遅れを考慮しない従来の Timoshenko 梁要素，Ber.-Euler は面外せ

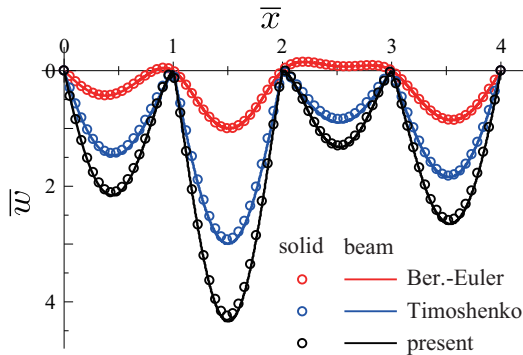


Fig. 14 The deflection distribution along the length of the four-span continuous beam.

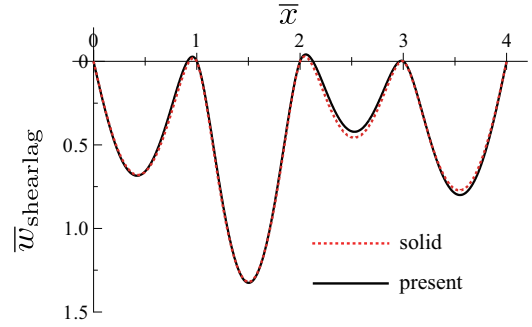


Fig. 15 The deflection distribution along the length caused by shear lag.

ん断を考慮しない Bernoulli-Euler 梁要素による解である．また，対応するソリッド要素による解は○マークで示している．ソリッド要素による Timoshenko はせん断遅れ変形を拘束するために，材料を直交異方性弾性とし， x_1 - x_2 面内のせん断剛性 G_{12} を 10^4 倍にしたモデルによる解である．ソリッド要素による Ber.-Euler はせん断遅れ変形と面外せん断変形を拘束するために，材料を直交異方性弾性とし， x_1 - x_2 面内のせん断剛性 G_{12} と x_1 - x_3 面内のせん断剛性 G_{13} をともに 10^4 倍にしたモデルによる解である．ソリッド要素による Bernoulli-Euler 梁および Timoshenko 梁は，ソリッド要素による変形のうち，曲げ・面外せん断・せん断遅れのそれぞれによる変形を明確に分離するために解析を行った．

本解析モデルは高さスパン比が 0.14 程度と小さいことから，面外せん断変形によるたわみが曲げによるたわみに比較して同程度かやや大きいくらいであることが，Ber.-Euler と Timoshenko の比較から確認できる．さらに，幅スパン比も 0.57 程度と比較的大きいため，せん断遅れによるたわみも，曲げによるたわみと同程度であることが Timoshenko と present の比較から確認できる．ソリッド要素と本解析の比較から，本解析の解はソリッド要素解と定性的に一致していることが確認できる．

たわみのうちせん断遅れ変形によるたわみの橋軸方向分布を Fig.15 に示す．ただし，ここでも Bernoulli-Euler 梁によるたわみの最大値で無次元化したたわみ $\bar{w}_{\text{shearlag}}$ で示している．せん断遅れ変形によるたわみは，present によるたわみと Timoshenko によるたわみの差で定義した．黒い実線が本提案要素によるせん断遅れたわみで，赤い破線がソリッド要素によるせん断遅れたわみである．図から，本提案要素によるせん断遅れたわみはソリッド要素によるせん断遅れたわみと定性的に一致していることが確認できる．ソリッド要素を基準とした本解析によるせん断遅れによるたわみの最大値の相対差は 4.1×10^{-4} であった．また，前節と同様の L^2 ノルム相対誤差を計算すると 3.6×10^{-2} となった．

次に，せん断遅れによる橋軸方向変位の橋軸方向分布を Fig.16 に示す．せん断遅れによる橋軸方向変位は，

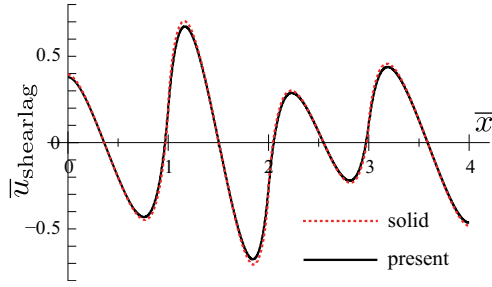


Fig. 16 The shear lag displacement distribution along the length.

断面の回転による橋軸方向変位の最大値で無次元化した $\bar{u}_{\text{shearlag}}$ で示している．図中の黒実線は提案要素による解であり，下フランジ下面の橋軸直角水平方向中心における橋軸方向変位と下フランジ下面のウェブ外側位置における橋軸方向変位の差，換言すると下フランジ下面の橋軸直角水平方向中心 (x_2, x_3) における $f(x_2, x_3)g(x_1)$ である．赤い破線で示すソリッド要素による解は，下フランジ下面の橋軸直角水平方向中心の節点の橋軸方向変位と下フランジ下面のウェブ外側位置の節点の橋軸方向変位の差である．図から，せん断遅れによる橋軸方向変位は回転による変位と同程度の大きさであることが確認できる．これは，たわみで見たように，本解析モデルの幅スパン比が比較的大きいためである．ソリッド要素解を基準とした本解析によるせん断遅れによる橋軸方向変位の最大値の相対差は 4.3×10^{-2} であった．また， L^2 ノルム相対誤差を計算すると 5.2×10^{-2} となった．

6. おわりに

著者らの提案したせん断遅れ解析を組み込んだ梁要素を提案した．この方法では，せん断遅れの変位関数を均質化梁の代表体積要素の数値解析により数値的に求めるため，任意形状の断面に適用可能である．さらに，せん断遅れに関するパラメタは，代表体積要素から得られたせん断遅れの変位関数により数値積分で求められる．その後のせん断遅れを考慮した梁としての解析では，せん断遅れの大きさを表すスカラー g を1つ追加するだけなので，梁要素に追加する自由度も1節点当たり1つとこれまでに提案されている要素に比べて単純である．

提案した梁要素を解析解が存在する単純支持梁の問題に適用し，解析解への収束を確認した．さらに，長大橋の補剛桁を想定したリブを有する複雑な形状の箱断面の4径間連続梁の解析を行い，その結果をソリッド要素による参照解と比較し，提案するせん断遅れ解析とそのための梁要素を組み合わせた際の精度の確認を行った．その結果，参照解のフランジは複雑な変形性状を示したが，提案する梁要素はせん断遅れによるたわみで最大値で0.04%， L^2 ノルムで3.6%の相対差とよい一致を示した．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 15K14017 の助成を受けたものです．

付録 A. せん断遅れを考慮した梁の境界値問題の解析解

単純支持における境界条件を考慮すると，支配方程式 (11)~(13) は解析的に解くことができる．せん断力に関する支配方程式 (12) は単独でせん断ひずみ γ について解くことができ， γ が求まれば曲率 ϕ とせん断遅れ変位 g の連立微分方程式となり，この解は著者らの文献⁽¹⁰⁾ に示されている．結果のみを示すと，曲率は

$$\phi = -\frac{q(n-1)}{k^2(EI)} \left\{ \frac{\cosh(kx_1)}{\cosh(k\ell/2)} - 1 \right\} + \frac{q\ell^2}{(EI)} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (40)$$

である．右辺第2項は通常の Bernoulli-Euler 梁における曲率であり，第1項がせん断遅れの影響を表している．同様に，たわみの解析解は

$$u_3 = \frac{q(n-1)}{k^2(EI)} \left\{ \frac{\cosh(kx_1)}{k^2 \cosh(k\ell/2)} - \frac{x_1^2}{2} - \frac{1}{k^2} + \frac{\ell^2}{8} \right\} + \frac{q\ell^4}{(EI)} \left\{ \frac{1}{24} \left(\frac{x_1}{\ell} \right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{x_1}{\ell} \right)^2 + \frac{5}{384} \right\} + \frac{q}{2G\kappa A} \left(\frac{\ell^2}{4} - x_1^2 \right) \quad (41)$$

となる．ここでも，第2項は Bernoulli-Euler 梁におけるたわみであり，第1項がせん断遅れの影響を表している．また，第3項は面外せん断変形によるたわみである．同様にせん断遅れ変位 g の解析解は

$$g = -\frac{q}{R_1 R_3} \left\{ \left(\frac{R_1^2}{(EI)} - R_2 \right) \frac{(n-1) \cosh(kx_1)}{k \cosh(k\ell/2)} + \frac{R_1^2}{(EI)} x_1 \right\} \quad (42)$$

である．

参考文献

- (1) Reissner, E., Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268-278, 1946.
- (2) Chang, S.T. and Yun, D., Shear lag effect in box girder with varying depth, *J. Struc. Eng.*, Vol.114, pp.2280-2292, 1988.
- (3) Song, Q. and Scordelis, A.C., Shear-lag analysis of T-, I-, and box beams, *J. Struc. Eng.*, Vol.116, pp.1290-1305, 1990.
- (4) Evans, H.R. and Ahmad, M.K.H., Shear lag in composite box girders of complex cross-sections, *J. Construct. Steel Research*, Vol.24, pp.183-204, 1993.
- (5) Prokić, A., New finite element for analysis of shear lag, *Comput. Struct.*, Vol.80, pp.1011-1024, 2002.

- (6) Luo, Q.Z., Li, Q.S. and Tang, J., Shear lag in box girder bridges, *J. Bridge Eng.*, ASCE, Vol.7, pp.308-313, 2002.
- (7) Zhou, S.-J., Finite beam element considering shear-lag effect in box girder, *J. Eng. Mech.*, ASCE, Vol.136, pp.1115-1122, 2010.
- (8) 齊木 功, 鍵 一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫, 非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.15, pp.161-169, 2012.
- (9) Saiki, I., Yari, K., Yamada, M., Setogawa, A. and Iwakuma, T., Homogenization of composite beams with periodic microstructures, *13th East Asia-Pacific Conf. on Struct. Eng. Construction*, F-6-4, 2013.
- (10) 齊木 功, 西井大樹, 岩熊哲夫, 任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法, 土木学会論文集 A2, Vol.71, No.2, pp.I.11-I.18, 2015.
- (11) 齊木 功, 西井大樹, 岩熊哲夫, 任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化, 土木学会論文集 A2, Vol.72, No.2, pp.I.53-I.62, 2016.
- (12) Iwakuma, T., Ai, M. and Nishino, F., On derivation of Timoshenko beam stiffness equation, *Proc. JSCE*, No.312, pp.119-128, 1981.
- (13) 早坂俊広, 渡邊英彦, 吉岡 勉, 徳橋亮治, 松浦雅史, 前原正典, 気仙沼大島大橋の設計・解析, 橋梁と基礎, Vol.52, No.2, pp.7-12, 2018.