量子群の普遍 R 行列の積公式について

On the product formula of the universal R matrix for quantum groups

寺崎 敏志

目次

0　序

0.1　はじめに

量子群はリー代数 $\mathfrak{g}$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ をパラメーター $q \in \mathbb{C}^\times$ で変形したホップ代数 (定義 2.9) $U_q(\mathfrak{g})$ である. 数理物理学の可解格子模型において重要なヤン・バクスター方程式の解を扱うために 1985 年に神保, Drinfel'd によって独立に発見された ([神保-2], [Dri]). 最も簡単な量子群の例を挙げよう.

定義 0.1 (定義 2.17)**.** q を $0, \pm 1$ でない複素数とする. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を文字 $X^+,\ X^-,\ K,\ K^{-1}$ を生成元として

$$\begin{aligned}
&KK^{-1} = K^{-1}K = 1 \ (K \text{ は可逆}),\\
&KX^{\pm} = q^{\pm 2}X^{\pm}K,\\
&[X^+, X^-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}
\end{aligned}$$

を基本関係式にもつ代数として定義する. ここで $[X, Y] = XY - YX$ である.

これは $\mathfrak{sl}_2$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ を変形したものである. 一般に $\mathfrak{g}$ が 一般化されたカルタン行列に付随するカッツ・ムーディリー代数 (定義 2.31) のとき, $U_q(\mathfrak{g})$ が定義できる (定義 2.41).

定義 0.2 (定義 2.21)**.** q を $0,\ \pm 1$ でない複素数の元とする. $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ は以下で定まる代数である.

$$\begin{aligned}
\text{生成元：}\quad & X_i^+,\ X_i^-,\ K_i,\ K_i^{-1} \quad (i = 0, 1),\ c,\ d\\
\text{基本関係式：}\quad & K_0K_1 = K_1K_0 = q^c, \quad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1 \quad (i = 0, 1),\\
& [c, U_q(\widehat{sl}_2)] = 0, \quad [d, X_i^{\pm}] = \pm\delta_{i,0}X_i^{\pm}, \quad (i = 0, 1)\\
& K_iX_i^{\pm} = q^{\pm 2}X_i^{\pm}K_i, \quad (i = 0, 1), \quad K_iX_j^{\pm} = q^{\mp 2}X_j^{\pm}K_i, \quad (i, j = 0, 1,\ i \neq j)\\
& \left[X_i^+, X_j^-\right] = \delta_{i,j}\frac{K_i - K_j^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (i, j = 0, 1,\ i \neq j),\\
& [X_i^{\pm}, [X_i^{\pm}, [X_i^{\pm}, X_j^{\pm}]_{q^2}]_{q^0}]_{q^{-2}} = 0 \quad (i, j = 0, 1,\ i \neq j).
\end{aligned}$$

ここで $[X, Y]_q = XY - qYX$ である.

定義 0.3 (定義 4.2)**.** H をホップ代数. $\Delta : H \to H \otimes H$ を H の余積とする (定義 2.4). ホップ代数 H に対して次の条件を満たす可逆な $\mathcal{R} \in H\widehat{\otimes}H$ が存在するとき H と $\mathcal{R}$ の組 $(H, \mathcal{R})$ を準三角ホップ代数, $\mathcal{R}$ を H の普遍 R 行列（universal R matrix）とよぶ.

$$\tau\Delta(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1} \quad (a \in H), \quad (\Delta \otimes \mathrm{id})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \quad (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}.$$

ここで, $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. また $\mathcal{R} = \sum_i a_i \otimes b_i$ のとき $\mathcal{R}_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$, $\mathcal{R}_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $\mathcal{R}_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$ とおく.

上で述べた $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ および $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ はホップ代数の構造を入れることができ, さらに準三角ホップ代数になる. その普遍 R 行列は量子群と自分自身のテンソル積の無限和を許したある完備化 $U_q\widehat{\otimes}U_q$ の元である.

命題 0.4 (命題 4.3)**.** $(H, \mathcal{R})$ が準三角ホップ代数ならば, 次のヤン・バクスター方程式を満たす.

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \in H\widehat{\otimes}H\widehat{\otimes}H \tag{0.1}$$

普遍 R 行列は適切なテンソル積表現によって表現空間におけるヤン・バクスター方程式の解を与える. 例えば, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の 2 次元表現の二つのテンソル積による普遍 R 行列の像は氷の結晶模型におけるヤン・バクスター方程式の三角関数解を与える (命題 3.4). このことから, 普遍 R 行列の具体的な表示を与えることは重要である.

本修士論文では $\mathfrak{g}$ が $\mathbb{C}$ 上の単純リー代数の場合, および $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 型の場合の量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ における普遍 R 行列の積公式を紹介した (定理 6.17, 定理 7.2) . さらに $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 型の量子群の普遍 R 行列の積公式の応用として, 次の非可換代数上の恒等式の証明に成功した.

定理 0.5 (定理 7.5)**.** $y_1,\ y_0$ を $y_1y_0 = q^4y_0y_1$ が成り立つ文字とする.

$$\mathbf{E}(x) = (-qx\,;\,q^2)_\infty^{-1} = \prod_{m=0}^{\infty}(1+q^{2m+1}x)^{-1} \quad (|q|<1)$$

とおく. $i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $y_{ij} = q^{-2ij}y_0^iy_1^j$ とおく. このとき, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(y_1)\mathbf{E}(y_0) &= \prod_{n\geq 0}^{\rightarrow}\mathbf{E}(y_{n+1,n}) \times \mathbf{E}(q^{-1}y_{1,1})\mathbf{E}(qy_{1,1}) \times \prod_{n\geq 0}^{\leftarrow}\mathbf{E}(y_{n,n+1}) \\ &= (\mathbf{E}(y_0)\mathbf{E}(y_{2,1})\mathbf{E}(y_{3,2})\mathbf{E}(y_{4,3})\mathbf{E}(y_{5,4})\cdots) \\ &\qquad\qquad \times \mathbf{E}(-q^{-1}y_{1,1})^{-1}\mathbf{E}(-qy_{1,1})^{-1} \times (\cdots\mathbf{E}(y_{4,5})\mathbf{E}(y_{3,4})\mathbf{E}(y_{2,3})\mathbf{E}(y_{1,2})\mathbf{E}(y_1)).\end{aligned} \tag{0.2}$$

この定理は [DGS], [KS] における考察で得られた壁越え公式 (Wall Crossing Formula) と一致する.

0.2 構成

本修士論文の構成は以下のとおりである.

- 1 章では, 理論の展開で必要になるパラメーター q を持つ数, 関数の定義とその性質について述べる. 特に q-指数関数 (定義 1.5) は普遍 R 行列を記述するのに重要である.
- 2 章ではホップ代数の基本的な定義を与え, 量子群にホップ代数の構造を導入することについて議論する.
- 3 章ではヤン・バクスター方程式の由来を氷の結晶模型を題材にとりあげた. 準三角ホップ代数 $(H,\mathcal{R})$ が表現空間におけるヤン・バクスター方程式の解を与える仕組みを対称群の群環における類似物を用いて説明する.
- 4 章では表現空間における普遍 R 行列の像の性質を述べ, その性質から三角関数解の構成を行った.
- 5 章では [谷崎] を参考に有限次元ホップ代数 H の普遍 R 行列を量子二重構成法を用いて構成した. 最後にこの論法を形式的に $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の場合に適用した.
- 6 章では 5 章の手法を A, D, E 型の $\mathbb{C}$ 上の単純リー代数 $\mathfrak{g}$ 型の量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の場合にも適用し, 普遍 R 行列の積公式を与えた.
- 7 章では $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 型の量子群の普遍 R 行列の積公式を紹介し, その応用例として定理 7.5 を証明した. また普遍 R 行列の適当な表現の像を計算することで 4 章における三角関数解を与えた.

謝辞. 長谷川浩司先生からは毎週のセミナーをはじめとし本修士論文の執筆に至るまで懇切丁寧な指導をいただいた. 黒木玄先生からは普遍 R 行列の積公式の応用として壁越え公式の証明を試みるアイデアを提案していただいた. 私の粗削りな数式の計算を洗練した形に直す方法を示し, 見通しの良い道筋が見えやすく提案していただいた. セミナーは午後から夜にかけて行われたが, 齋藤洋介さんには数時間にわたる数式の計算をする私の発表を辛抱強く聞いていただいた. 数学資料室の職員の澤田石裕子さん, 吉村尚子さんには文献の入手に便宜をはかっていただいたほか, 資料室を研究の場, 執筆の作業の場として笑顔が絶えない快適な場所に整えていただいた. 最後に多くの学友, 大学職員, 数学教室をはじめ理学研究科の方々そして家族の非可算な手厚い精神的な支援にお礼を申し上げる.

1　q-整数, パラメーター q を持つ関数たち

本修士論文の理論を展開するためにパラメーター q を持つ数, 関数を扱う. そのためにいくつか準備を行う. これらは $q \to 1$ にするとよく知られている数, 関数になる.

1.1　q-整数

定義 1.1 (q-整数)**.** 文字 t に対して $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ の元を次で定める:

$$[n]_t = \frac{t^n - t^{-n}}{t - t^{-1}} \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{1.1}$$

$$[n]_t! = [n]_t[n-1]_t \cdots [1]_t \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad [0]_t! = 1, \tag{1.2}$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_t = \frac{[m]_t!}{[n]_t![m-n]_t!} \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ 0 \leq n \leq m). \tag{1.3}$$

パラメーター $q \in \mathbb{C}$ に対して $t = q$ を代入したものも $[n]_q$, $[n]!_q$, $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q$ と表記する. $q \to 1$ とすることで $[n]_q \ \to n$ になることから $[n]_q$ を q-整数, また $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q$ を q-二項係数とよぶ. しばしば $[n]_q$ を $[n]$ と略記することがある. 二項定理に相当する次のことがなりたつ.

命題 1.2 (二項定理の量子版)**.** $x_2x_1 = q^2x_1x_2$ を満たす文字 x_1, x_2 を持つ代数系で

$$(x_1 + x_2)^N = \sum_{k=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(N-k)} x_1^k x_2^{N-k} \quad (N = 1, 2, \cdots) \tag{1.4}$$

が成り立つ.

証明. $N = 1$ のときは明らか. $N - 1$ で正しいとして N の場合で示す.

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2)^N &= (x_1 + x_2)(x_1 + x_2)^{N-1} \\
&= (x_1 + x_2) \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} N-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(N-1-k)} x_1^k x_2^{N-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} N-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(N-1-k)} x_1^{k+1} x_2^{N-(k+1)} + \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} N-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(N+1-k)} x_1^k x_2^{N-k} \\
&= x_1^N + x_2^N + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\begin{bmatrix} N-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{(k-1)(N-k)} + \begin{bmatrix} N-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(N+1-k} \right) x_1^k x_2^{N-k}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} N-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{(k-1)(N-k)} + \begin{bmatrix} N-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(N+1-k)} \\
=&\frac{[N-1]_q!}{[k]_q![N-k]_q!} \left([k]q^{-(N-k)} + [N-k]q^k \right) q^{k(N-k)} \\
=&\frac{[N]_q!}{[k]_q![N-k]_q!} q^{k(N-k)}
\end{aligned}$$

によって

$$
\begin{aligned}
(x_1+x_2)^N &= x_1^N + x_2^N + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\begin{bmatrix} N-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{(k-1)(N-k)} + \begin{bmatrix} N-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(N+1-k)}\right) x_1^k x_2^{N-k} \\
&= x_1^N + x_2^N + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{[N]!}{[k]![N-k]!} q^{k(N-k)} x_1^k x_2^{N-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(N-k)} x_1^k x_2^{N-k}.
\end{aligned}
$$

□

補題 1.3. $m \geq 1$ のとき

$$
\sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q z^k = \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 + q^{m-1-2j} z\right). \tag{1.5}
$$

証明. m についての帰納法で示す. $m=1$ のときは明らか. $m-1$ で正しいとして m の場合で示す.

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{m-1} \left(1+q^{m-1-2j}z\right) &= (1+q^{-m+1}z) \prod_{j=0}^{m-2} \left(1+q^{m-2-2j}(qz)\right) \\
&= (1+q^{-m+1}z) \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^k z^k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^k z^k + \sum_{k=0}^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{-m+1+k} z^{k+1} \\
&= 1 + z^m + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{-m+k}\right) z^k \\
&= 1 + z^m + \sum_{k=1}^{m-1} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q z^k = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q z^k.
\end{aligned}
$$

□

命題 1.4.

$$
\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q q^{-(m-1)k} = \delta_{m,0}.
$$

証明. 上の補題 1.3 において, $z = -q^{-(m-1)}$ とおくことで $m \geq 1$ ならば

$$
\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q q^{-(m-1)k} = \prod_{j=0}^{m-1} (1 - q^{-2j}) = 0
$$

を得る. □

1.2 パラメーター q を持つ関数

定義 1.5 (q-指数関数)**.** q-指数関数 $\exp_q(\cdot)$ を次で定義する:

$$
\exp_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-n(n-1)/2}}{[n]_q!} x^n. \tag{1.6}
$$

これは普遍 R 行列を記述するのに基本的な関数になる.

命題 1.6.

$$(x;q)_\infty = \prod_{m=0}^{\infty}(1-q^m x) \tag{1.7}$$

と置く. このとき,

$$\exp_q(x) = (-q(q-q^{-1})x;q^2)_\infty^{-1} \tag{1.8}$$

が成立する. 特に

$$\mathbf{E}(x) = (-qx\ ;\ q^2)_\infty^{-1} \tag{1.9}$$

とおくと

$$\exp_q(x) = \mathbf{E}((q-q^{-1})x) \tag{1.10}$$

が成り立つ.

証明. $(x;q^2)_\infty^{-1}$ を

$$(x;q^2)_\infty^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \tag{1.11}$$

と級数に展開したとする. このとき

$$(q^2x;q^2)_\infty^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} A_n x^n \tag{1.12}$$

となる. 一方で

$$\begin{aligned}(q^2x;q^2)_\infty^{-1} &= \frac{1}{(1-q^2x)(1-q^4x)(1-q^6x)\cdots}\\ &= (1-x)(x;q^2)_\infty^{-1} = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n\\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})x^n. \end{aligned} \tag{1.13}$$

よって (1.12), (1.13) を比べることで, $n \geq 1$ ならば漸化式

$$q^2 A_n = A_n - A_{n-1}$$

が成立する. これを解くと

$$A_n = \frac{q^{-n(n-1)/2}}{[n]!_q}(-q(q-q^{-1}))^n \tag{1.14}$$

となる. したがって

$$(x;q^2)_\infty^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{-n(n-1)/2}}{[n]!_q}(-q(q-q^{-1})x)^n = \exp_q(-q(q-q^{-1})x).$$

□

命題 1.7. q-指数関数は可逆であり,

$$\exp_q(x)^{-1} = \exp_{q^{-1}}(-x) \tag{1.15}$$

がなりたつ.

証明. 命題 1.6 から q-指数関数は無限積の形でかける. よって q-指数関数は可逆である. (1.15) が成立することは

$$(x;q^2)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n \tag{1.16}$$

とおいたとき

$$B_n = (-1)^n \frac{q^{n(n-1)/2}}{[n]!_q} \tag{1.17}$$

を示せばよい. 証明は命題 1.6 の証明と同様である. □

命題 1.8. 文字 y について次が成り立つ.

$$\exp\left(-\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^n}{n(1-q^n)}\right) = (y\,;\,q)_\infty.$$

証明.

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n(1-q^n)} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} \sum_{m=0}^{\infty} q^{mn} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(yq^m)^n}{n} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \log(1-q^m y) = \log(y\,;\,q)_\infty.
\end{aligned}$$

□

命題 1.9 (q-指数関数の加法定理)**.** q-指数関数が定義できる代数系の上で $x_2x_1 = q^2x_1x_2$ を満たす x_1, x_2 に対して次が成り立つ.

$$\exp_q(x_1+x_2) = \exp_q(x_1)\exp_q(x_2). \tag{1.18}$$

証明. 1.2 を用いることで

$$\begin{aligned}
\exp_q(x_1+x_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-n(n-1)/2}}{[n]!_q}(x_1+x_2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-n(n-1)/2}}{[n]!_q} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(n-k)} x_1^k x_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{-n(n-1)/2+k(n-k)}}{[k]!_q[n-k]!_q} x_1^k x_2^{n-k}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

ここで, $l = n-k$ とおくと,

$$q^{-n(n-1)/2+k(n-k)} = q^{k(k-1)/2} q^{l(l-1)/2}$$

に注意すれば

$$
\begin{aligned}
\exp_q(x_1+x_2) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2}}{[k]!_q} x_1^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{l(l-1)/2}}{[l]!_q} x_2^l\right) \\
&= \exp_q(x_1)\exp_q(x_2)
\end{aligned}
$$

を得る. $\square$

2 ホップ代数と量子群

ここではホップ代数の定義を述べる．代数とは単位元をもつ結合代数であるが，これをテンソル積の言葉を用いて定式化しておく．

定義 2.1. A を体 k 上のベクトル空間とする． A と次の条件 (1), (2) を満たす積とよばれる線形写像 $m_A : A \otimes A \to A$, および単位射とよばれる $u_A : k \to A$ の組 (A, m_A, u_A) を, K 上の代数 (algebra) という．
(1) 結合律： $m_A \circ (m_A \otimes \mathrm{id}) = m_A \circ (\mathrm{id} \otimes m_A)$ が成り立つ．すなわち次の図式が可換である:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m_A \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes m_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m_A"] & A.
\end{tikzcd}
\tag{2.1}
$$

(2) 単位律： $m \circ (u_A \otimes \mathrm{id}) = m_A \circ (\mathrm{id} \otimes u_A)$ がなりたつ．すなわち次の図式が可換である:

$$
\begin{tikzcd}
k \otimes A \arrow[r, "u_A \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"'] & A \otimes k \arrow[l, "\mathrm{id} \otimes u_A"'] \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
A \arrow[r, equal] & A \arrow[r, equal] & A.
\end{tikzcd}
\tag{2.2}
$$

しばしば m_A, u_A の各々の添え字を省略して m, u と記す. 以下 $m_A(a \otimes b)$ を $a \cdot b$ と略記する．式で書くと結合律は $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(a, b, c \in A)$ のことである．また単位律は, k の単位元 1_k の u_A による像を 1_A と置いたとき, $1_A \cdot a = a = a \cdot 1_A$ のことである． 1_A を A の単位元という．

二つの代数 A, A' が与えられたときテンソル積 $A \otimes A'$ 上の積を次で与えることができる:

$$
m_{A \otimes A'} : (A \otimes A') \otimes (A \otimes A') \xrightarrow{T_{23}} (A \otimes A) \otimes (A' \otimes A') \xrightarrow{m_A \otimes m_{A'}} A \otimes A \tag{2.3}
$$

ここで, T_{23} は

$$
T_{23}(a_1 \otimes a_1' \otimes a_2 \otimes a_2') = a_1 \otimes a_2 \otimes a_1' \otimes a_2' \quad (a_1, a_2 \in A \ a_1', a_2' \in A')
$$

で定まる線形写像.

定義 2.2 (代数射)**.** 代数 A, B に対して k 上の線形写像 $f : A \to B$ が代数射であるとは, 任意の $a, a' \in A$ に対して $f(a \cdot a') = f(a) \cdot f(a')$ および $f(1_A) = 1_B$ がなりたつことである．

これは次の図式が可換であることと同値である:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"'] \\
A \arrow[r, "f"] & B.
\end{tikzcd}
\tag{2.4}
$$

定義 2.3 (反代数射)**.** 代数 A, B に対して k 上の線形写像 $f : A \to B$ が反代数射であるとは, 任意の $a, a' \in A$ に対して $f(a \cdot a') = f(a') \cdot f(a)$ および $f(1_A) = 1_B$ がなりたつことである．反代数射は積の順序を逆にすることに注意する．

代数の定義における図式を双対化 (矢印を逆に) して得られるのが余代数である.

定義 2.4 (余代数). C を体 k 上のベクトル空間とする. C と次の条件 (1), (2) を満たす余積とよばれる線形写像 $\Delta_C : C \to C \otimes C$ および余単位射とよばれる $\epsilon_C : C \to k$ の組 $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ を, K 上の余代数という.
(1) 余結合律 : $(\mathrm{id} \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C = \Delta_C \circ (\Delta_C \otimes \mathrm{id})$ が成り立つ. すなわち次の図式が可換である:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta_C} & C \otimes C \\ {\scriptstyle \Delta_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\Delta_C} \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta_C \otimes \mathrm{id}} & C \otimes C \otimes C. \end{array} \tag{2.5}$$

(2) 余単位律 : $(\epsilon_C \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_C(c) = 1 \otimes c,\ (\mathrm{id} \otimes \epsilon_C) \circ \Delta_C(c) = c \otimes 1 \quad c \in C$ がなりたつ. すなわち次の図式が可換である:

$$\begin{array}{ccccc} C & = & C & = & C \\ \wr & & {\scriptstyle \Delta}\downarrow & & \wr \\ k \otimes C & \xleftarrow{\epsilon_C \otimes \mathrm{id}} & C \otimes C & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\epsilon_C} & C \otimes k. \end{array} \tag{2.6}$$

定義 2.5 (余代数射). 余代数 C, D に対して k 上の線形写像が余代数射であるとは, 任意の $c \in C$ に対して $\Delta_D(f(c)) = (f \otimes f)(\Delta_C(c))$ および $\epsilon_D(f(c)) = \epsilon_C(c)$ が成り立つことである. 前者の式は可換図式でいえば次の図式が可換ということである.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ {\scriptstyle \Delta_C}\downarrow & & {\scriptstyle \Delta_D}\downarrow \\ C \otimes C & \xrightarrow{f\otimes f} & D \otimes D. \end{array} \tag{2.7}$$

二つ余代数 C, C' が与えられたとき, $C \otimes C'$ に次のようにして余代数 $(C \otimes C', \Delta_{C\otimes C'}, \epsilon_{C\otimes C'})$ の構造を入れることができる.

$$\begin{aligned} &\Delta_{C\otimes C'} : C \otimes C' \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_{C'}} (C \otimes C) \otimes (C' \otimes C') \xrightarrow{T_{23}} (C \otimes C') \otimes (C \otimes C'), \\ &\epsilon_{C\otimes C'} : C \otimes C' \xrightarrow{\epsilon_C \otimes \epsilon'_C} k \otimes k \simeq k. \end{aligned}$$

ここで, T_{23} は $T_{23}(c_1 \otimes c_2 \otimes c'_1 \otimes c'_2) = c_1 \otimes c'_1 \otimes c_2 \otimes c'_2 \quad (c_1, c_2 \in C,\ c'_1, c'_2 \in C')$ で定まる線形写像とする.

命題 2.6. 二つの余代数 C から代数 A への k 線形写像 $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ に対して $f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ とおく. 右辺は $C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f\otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A$ という合成写像である. このとき, $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ は $*$ を積とし, $u \circ \epsilon$ を単位元として代数をなす.

証明. 積 $*$ が結合律を満たす, すなわち, $f, g, h \in \mathrm{Hom}(C, A)$ について $(f * g) * h = f * (g * h)$ が成り立つことは次の図式が可換であることから従う:

$$\begin{array}{ccccccccccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C & \xrightarrow{\Delta\otimes\mathrm{id}} & C \otimes C \otimes C & \xrightarrow{(f\otimes g)\otimes h} & A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m\otimes\mathrm{id}} & A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \\ \| & & & & \| & & \| & & & & \| \\ C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\Delta} & C \otimes C \otimes C & \xrightarrow{f\otimes(g\otimes h)} & A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} & A \otimes A & \xrightarrow{m} & A. \end{array} \tag{2.8}$$

左側の図式の可換性は C の余積 Δ の余結合律から, 右側の図式の可換性からは A の積 m の結合律から従う. また $u \circ \epsilon$ が単位元であることは $f \in \mathrm{Hom}(C, A)$ に対して $(u \circ \epsilon) * f = f = f * (u \circ \epsilon)$ を示せばよい.

また $(u\circ\epsilon)*f=f$ については次の図式の可換性から従う:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & C\otimes C \arrow[r, "(u\circ\epsilon)\otimes f"] \arrow[d, "\epsilon\otimes\mathrm{id}"'] & A\otimes A \arrow[r, "m"] & A \arrow[d, equal] \\
C \arrow[r, "\simeq"] & k\otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] & K\otimes A \arrow[u, "u\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\simeq"] & A.
\end{tikzcd}
\tag{2.9}
$$

左側の図式の可換性は余代数 C の余単位律から, 右側の図式の可換性は A の単位律から従う. $f=f*(u\circ\epsilon)$ についても同様に示すことができる. □

特に C の双対空間 $C^*=\mathrm{Hom}(C,k)$ は転置写像を用いて $m_{C^*}={}^t\Delta_C$, $u_{C^*}={}^t\epsilon_C$ と定めることで代数をなす.

定義 2.7 (双代数)**.** k 上のベクトル空間 B が代数および余代数の構造を持っているとする. このとき B の余積 $\Delta_B:B\to B\otimes B$ および 余単位射 $\epsilon_B:B\to k$ がともに代数射となるとき B を双代数 (bialgebra) という.

命題 2.8. B が双代数ならば, 積 $m_B:B\otimes B\to B$ および 単位射 $u_B:k\to B$ がともに余代数射になる. またその逆も成り立つ.

証明. 余積が代数射であることは次の図式が可換であることと同値である.

$$
\begin{tikzcd}
B\otimes B \arrow[r, "\Delta_B\otimes\Delta_B"] \arrow[d, "m_B"'] & (B\otimes B)\otimes(B\otimes B) \arrow[d, "m_{B\otimes B}"'] \\
B \arrow[r, "\Delta_B"] & B\otimes B
\end{tikzcd}
\tag{2.10}
$$

一方で, $m_{B\otimes B}$ の定義を思い出すと, $m_{B\otimes B}=(m_B\otimes m_B)\circ T_{23}$ だったので

$$
\begin{tikzcd}
B\otimes B \arrow[r, "\Delta_B\otimes\Delta_B"] \arrow[d, "m_B"'] & (B\otimes B)\otimes(B\otimes B) \arrow[r, "T_{23}"] \arrow[d, "m_{B\otimes B}"'] & B\otimes B\otimes B\otimes B \arrow[d, "m_B\otimes m_B"'] \\
B \arrow[r, "\Delta_B"] & B\otimes B \arrow[r, equal] & B\otimes B
\end{tikzcd}
\tag{2.11}
$$

が可換になる. $\Delta_{B\otimes B}=(\Delta_B\otimes\Delta_B)\circ T_{23}$ に注意すると上の図式の可換性は m_B が余代数射であることに他ならない. □

定義 2.9 (ホップ代数)**.** 双代数 H は, $\mathrm{id}_H\in\mathrm{Hom}(H,H)$ が積 $*$ について逆元を持つとき, ホップ代数という. すなわち,

$$
S*\mathrm{id}_H=u\circ\epsilon=\mathrm{id}_H*S \tag{2.12}
$$

を満たす $S\in\mathrm{Hom}_k(H,H)$ が存在するときである. この S を対合射 (antipode) とよぶ.

例 2.10 (ホップ代数の例)**.** G を有限群とし, 群環 $kG=\bigoplus_{g\in G}kg$ は

$$
\left(\sum_i a_ig_i\right)\cdot\left(\sum_j b_jg_j\right)=\sum_{i,j}a_ib_jg_ih_j
$$

で定まる積で代数をなし, 余積および余単位律を各々 $\Delta(g)=g\otimes g$, $\epsilon(g)=1$ で定めることで双代数の構造を入れることができる. $S:kG\to kG$ として $S(g)=g^{-1}$ とおくと S は対合射となり kG はホップ代数とな

る．実際,

$$(S * \mathrm{id})(g) = m(S \otimes \mathrm{id})(g \otimes g) = m(g^{-1} \otimes g) = e = u \circ \epsilon(g)$$

が成り立つからである.

注意. 上の例で $S(gh) = (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} = S(h)S(g)$ となることに注意．一般にホップ代数の対合射は反代数射である.

2.1 普遍展開環

量子群は普遍展開環の一般化である．それを述べるためにいくつか用語を定義する.

定義 2.11 (テンソル代数)**.** V を体 k 上のベクトル空間とする．正整数 r に対して $T^r(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{ 個}} = V^{\otimes r}$ とおく．また $T^0(V) = k$ とおく．$T(V) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(V)$ に対して次のように代数の構造を入れたものを V のテンソル代数という:
$x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \in T^r(V)$, $y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_s$ に対して $x \cdot y = x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_s \in T^{r+s}$ とおく.
$r = 0$ (resp. $s = 0$) の場合, $x \cdot y$ は x の y (resp. y の x) へのスカラー倍の作用でさだめる.

定義 2.12 (リー代数)**.** ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ は, 次の条件 (1),(2),(3) を満たす二項演算 $[\cdot\,,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を持つとき, リー代数という.

(1) $[\cdot\,,\cdot]$ は双線形写像である,

(2) $[Y, X] = -[X, Y] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$,

(3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{g})$.

$[\cdot\,,\cdot]$ をリー括弧という．(3) をヤコビ律という.

定義 2.13 (普遍展開環)**.** リー代数 $\mathfrak{g}$ のテンソル代数 $T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{r=0}^{\infty}(\mathfrak{g})$ に対して

$$I = \{\, X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]\ ;\ X, Y \in \mathfrak{g} \,\}$$

で生成される両側イデアルを $\mathfrak{I}$ とおく．このとき代数 $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/\mathfrak{I}$ を $\mathfrak{g}$ の普遍展開環という．$U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ を生成系として $XY - YX = [X, Y]$ を基本関係式に持つ代数である.

2.1.1 $U(\mathfrak{g})$ のホップ代数の構造

命題 2.14. $U(\mathfrak{g})$ は余積 Δ, 余単位射 ϵ, 対合射 S を次のように定義することでホップ代数の構造を入れることができる:
まず $X \in \mathfrak{g}$ に対しては

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \epsilon(X) = 0, \quad S(X) = -X \tag{2.13}$$

で定義する．$T(\mathfrak{g})$ 上に $\Delta : T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g}) \otimes T(\mathfrak{g})$ および $\epsilon : T(\mathfrak{g}) \to k$ は代数射となるように, $S : T(\mathfrak{g}) \to T(\mathfrak{g})$ は反代数射となるように拡張することができる．これらから $U(\mathfrak{g})$ からの写像として誘導される Δ, ϵ, S を余

積, 余単位射, 対合射として定義する.

証明. 余積 Δ, 余単位射 ϵ, 対合射 S が well-defined であること, すなわち, $U(\mathfrak{g})$ における基本関係式が Δ, ϵ, S によって保たれることの確認すればよい. ここでは余積に関して確認する. $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}\Delta(XY - YX) &= \Delta(X)\Delta(Y) - \Delta(Y)\Delta(X) \\ &= (X \otimes 1 + 1 \otimes X)(Y \otimes 1 + 1 \otimes Y) - (Y \otimes 1 + 1 \otimes Y)(X \otimes 1 + 1 \otimes X) \\ &= XY \otimes 1 + X \otimes Y + Y \otimes X + 1 \otimes XY \\ &\qquad\qquad - YX \otimes 1 - Y \otimes X - X \otimes Y - 1 \otimes YX \\ &= [X, Y] \otimes 1 + 1 \otimes [X, Y] \\ &= \Delta([X, Y])\end{aligned}$$

となるからよい. □

2.2 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 型の量子群

量子群はリー代数の普遍展開環を変形したものとして定義される. まずは, 簡単のために $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 型の量子群を定義する.

定義 2.15 (リー代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$)**.**

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \{X \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})\ ;\ \mathrm{Tr}X = 0\} \tag{2.14}$$

とおくと, $[X, Y] = XY - YX$ で閉じておりリー代数をなしている.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

とおくと, これらは基底をなしており

$$[H, E] = 2E, \qquad [H, F] = -2F, \qquad [E, F] = H \tag{2.16}$$

をみたす.

定義 2.16 ($\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の普遍展開環)**.** $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ を文字 E, F, H を生成元として

$$[H, E] = 2E, \qquad [H, F] = -2F, \qquad [E, F] = H \tag{2.17}$$

を基本関係式にもつ代数として定義する. ここで $[X, Y] = XY - YX$ としている.

注意. $X, Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ のとき X と Y の行列としての積 XY は $XY \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ とは限らない. 一方で $XY \in U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ である.

これを変形したものが $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 型の量子群である.

定義 2.17 ($\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 型の量子群)**.** q を $0, \pm 1$ でない複素数とする. $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ を文字 X^+, X^-, K, K^{-1} を生成元として

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1\ (K \text{ は可逆}), \quad KX^{\pm} = q^{\pm 2}X^{\pm}K, \tag{2.18}$$

$$[X^+, X^-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{2.19}$$

を基本関係式にもつ代数として定義する．ここで $[X,Y]=XY-YX$ である．

注意. $q^H E q^{-H} = q^{\mathrm{ad}H}E = q^2 E$ である．ここで $\mathrm{ad}H : X \mapsto [H,X] = HX - XH$ である．形式的に $X^+ = E,\ X^- = F, K = q^H$ とみなせる．$q \to 1$ にすると最後の基本関係式 (2.19) は

$$\frac{q^H - q^{-H}}{q-q^{-1}} \to H \tag{2.20}$$

となり, $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ の基本関係式 $[E,F]=H$ に退化する．この意味で $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の普遍展開環の変形になっている．

2.2.1　$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のホップ代数の構造

命題 2.18. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は余積 Δ, 余単位射 ϵ, 対合射 S を次のように定義することでホップ代数の構造を入れることができる: 生成元 $K^{\pm 1}$, $X^{\pm}$ に対しては

$$\begin{aligned}
\Delta(K) &= K\otimes K,\ \Delta(K^{-1}) = K^{-1}\otimes K^{-1}, & \epsilon(K^{\pm 1}) &= 0, & S(K) &= K^{-1},\ S(K^{-1}) = K,\\
\Delta(X^+) &= X^+\otimes 1 + K\otimes X^+, & \epsilon(X^{\pm}) &= 0, & S(X^+) &= -K^{-1}X^+,\\
\Delta(X^-) &= X^-\otimes K^{-1} + 1\otimes X^+, & & & S(X^-) &= -X^-K
\end{aligned}$$

で定義する．$T(\mathfrak{sl}_2)$ 上に $\Delta : T(\mathfrak{sl}_2) \to T(\mathfrak{sl}_2)\otimes T(\mathfrak{sl}_2)$, $\epsilon : T(\mathfrak{sl}_2) \to k$ が代数射となるように, $S : T(\mathfrak{sl}_2) \to T(\mathfrak{sl}_2)$ が反代数射となるように拡張する．これらから $U(\mathfrak{sl}_2)$ からの写像として誘導される Δ, ϵ, S を余積, 余単位射, 対合射として定義する．

余積 Δ, 余単位射 ϵ, 対合射 S の定義が well-defined であることは, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ における基本関係式が Δ, ϵ, S によって保たれることを確認すればよい．ここでは Δ に関してのみ確認する．その他は容易である．
$\underline{KK^{-1} = K^{-1}K = 1 \text{ について:}}$
$\Delta(KK^{-1}) = \Delta(K)\Delta(K^{-1}) = (K\otimes K)(K^{-1}\otimes K^{-1}) = KK^{-1}\otimes KK^{-1} = 1\otimes 1 = \Delta(1)$.
$\underline{KX^+ = q^2X^+K \text{ について:}}$

$$\begin{aligned}
\Delta(KX^+) &= \Delta(K)\Delta(X^+) = (K\otimes K)(X^+\otimes 1 + K\otimes X^+)\\
&= KX^+\otimes K + K^2\otimes KX^+) = q^2(X^+K\otimes 1 + K\otimes X^+K)\\
&= q^2(X^+\otimes 1 + K\otimes X^+)(K\otimes K) = \Delta(X^+)\Delta(K).
\end{aligned}$$

同様に $KX^- = q^{-2}X^-K$ についても示すことができる．
$\underline{[X^+,X^-] = ((K-K^{-1})/(q-q^{-1}) \text{ について:}}$

$$\begin{aligned}
\Delta([X^+,X^-]) &= [\Delta(X^+),\Delta(X^-)] = [\Delta(X^+),\Delta(X^-)]\\
&= [X^+\otimes 1 + K\otimes X^+, X^-\otimes K^{-1} + 1\otimes X^{-1}]\\
&= [X^+,X^-]\otimes K^{-1} + K\otimes [X^+,X^-]\\
&= \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\otimes K^{-1} + K\otimes \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\\
&= \frac{\Delta(K)-\Delta(K^{-1})}{q-q^{-1}} = \Delta\left(\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}\right).
\end{aligned}$$

2.3 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ 型の量子群

ここではアフィンリー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ 型の量子群を定義する.

定義 2.19 ($\mathrm{A}_1^{(1)}$ 型のアフィンリー代数)**.** t, c, d を文字とし, ベクトル空間 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C}) := \left(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]\right) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ に以下のようにしてリー代数の構造を入れたものを $\mathrm{A}_1^{(1)}$ 型のアフィンリー代数という.

$$
\begin{aligned}
[X \otimes t^m, Y \otimes t^n] &= [X, Y] \otimes t^{m+n} + m\delta_{m+n,0}\mathrm{Tr}(XY)c \quad \text{for } X, Y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), m, n \in \mathbb{Z} && (1)\\
[\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C}), c] &= 0, && (2)\\
[d, X \otimes t^m] &= mX \otimes t^m. && (3)
\end{aligned}
$$

式 (3) は $\mathrm{ad}(d) = t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ とも書ける.

命題 2.20. $h_i, x_i \in \widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C}) \quad (i = 0, 1)$ を

$$
\begin{aligned}
x_0^+ &= F \otimes t, \quad x_0^- = E \otimes t^{-1}, \quad h_0 = c - h_1, && (2.21)\\
x_1^+ &= E \otimes 1, \quad x_1^- = F \otimes 1, \quad h_1 = H \otimes 1, && (2.22)
\end{aligned}
$$

でさだめる. $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h_0 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}d$ とおく. また

$$
\alpha_i(h_i) = 2, \quad \alpha_i(h_j) = -2\ (i \neq j), \quad \alpha_i(d) = \delta_{i,0} \quad i = 0, 1 \tag{2.23}
$$

とおく. このとき次が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
&[h, h'] = 0, \quad (h, h' \in \mathfrak{h}),\ [h, x_j^\pm] = \pm\alpha_j(h)x_j^\pm \quad (h \in \mathfrak{h}), && (2.24)\\
&[x_i^+, x_j^-] = \delta_{i,j}h_j, && (2.25)\\
&(\mathrm{ad}x_i^\pm)^3(x_j^\pm) = 0\ (i \neq j). && (2.26)
\end{aligned}
$$

注意. $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ は $x_i \quad (i = 0, 1)$ と $h \in \mathfrak{h}$ を生成元とし (2.24), (2.25), (2.26) を基本関係式として定まる $\mathrm{A}_1^{(1)}$ 型のリー代数と同形であることが知られている. この命題の証明は計算によって容易である.

定義 2.21. q を 0, ± 1 でない複素数の元とする. $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ の普遍展開環を次のように変形した結合代数を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\text{生成元}: \quad & X_i^+,\ X_i^-,\ K_i,\ K_i^{-1} \quad (i = 0, 1),\ c,\ d\\
\text{基本関係式}: \quad & K_iK_j = K_jK_i, \quad K_0K_1 = K_1K_0 = q^c, \quad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1 \quad (i = 0, 1),\\
& [c, U_q(\widehat{sl}_2)] = 0, \quad [d, X_i^\pm] = \pm\delta_{i,0}X_i^\pm, \quad (i = 0, 1)\\
& K_iX_i^\pm = q^{\pm 2}X_i^\pm K_i, \quad (i = 0, 1), \quad K_iX_j^\pm = q^{\mp 2}X_j^\pm K_i, \quad (i, j = 0, 1,\ i \neq j)\\
& \left[X_i^+, X_j^-\right] = \delta_{i,j}\frac{K_i - K_j^{-1}}{q - q^{-1}} \quad (i, j = 0, 1,\ i \neq j),\\
& [X_i^\pm, [X_i^\pm, [X_i^\pm, X_j^\pm]_{q^2}]_{q^0}]_{q^{-2}} = 0 \quad (i, j = 0, 1,\ i \neq j).
\end{aligned}
$$

ここで $[X, Y]_q = XY - qYX$ である.

2.3.1 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ のホップ代数の構造

命題 2.22. $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ には余積 Δ, 余単位射 ϵ, 対合射 S を次のように定義することでホップ代数の構造を入れることができる ([神保-1] § 6): 生成元 $K_i^{\pm1}, X_i^{\pm} \quad (i=0,1)$ に対しては

$$\begin{aligned} &\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i,\ \Delta(K_i^{-1}) = K_i^{-1} \otimes K_i^{-1}, && \epsilon(K_i^{\pm1}) = 0, && S(K_i) = K_i^{-1},\ S(K_i^{-1}) = K_i, \\ &\Delta(X_i^+) = X_i^+ \otimes 1 + K_i \otimes X_i^+, && \epsilon(X_i^{\pm}) = 0, && S(X_i^+) = -K_i^{-1}X_i^+, \\ &\Delta(X_i^-) = X_i^- \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes X_i^+, && && S(X_i^-) = -X_i^- K_i. \end{aligned}$$

注意. 余積 Δ, 余単位射 ϵ, 対合射 S が well-defined であること, すなわち, $U(\mathfrak{g})$ における基本関係式が Δ, ϵ, S によって保たれることの確認は $\mathfrak{sl}_2$ 型の量子群にホップ代数の構造を入れる議論と同様にできる. ただし, 余積がセール関係式を保つことは非自明である. このことについては後により一般の場合で確認する.

2.4 単純リー代数, カッツ・ムーディリー代数

リー代数 $\mathfrak{sl}_2$ の普遍展開代数を変形した代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を定義した. 一般に単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して代数 $U_q(\mathfrak{g})$ を定義することができる. ここでは, [神保-1] に倣いその準備を行う. カルタン行列およびカッツ・ムーディリー代数は [Kac] を参照することにする.

定義 2.23 (カルタン行列)**.** 整数係数の行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le l} \in \mathrm{Mat}(l,\mathbb{Z})$ が次の性質を満たすとき, A をカルタン行列という.

(1) $a_{ii} = 2$,
(2) 相異なる i,j について $a_{ij} \geq 0$,
(3) 相異なる i,j について $a_{ij} = 0$ が成り立つことは $a_{ji} = 0$ が成り立つことは同値である.

定義 2.24. カルタン行列 $A \in \mathrm{Mat}(l,\mathbb{Z})$ が行と列を同じ置換によってブロック行列

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

の形にすることができるとき, 分解可能であるという. 分解可能でないときは分解不可能という.

定義 2.25. カルタン行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le l} \in \mathrm{Mat}(l,\mathbb{Z})$ が有限型とは, 任意の $r = 1,2,\ldots,l$ について

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix} > 0 \tag{2.27}$$

が成り立つことである. A が対称行列であれば A が正定値であることと同値である.

例 2.26. 次の行列は有限型なカルタン行列である.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

定義 2.27. カルタン行列 A が次の条件を満たすとき, アフィン型という:

(1) A は分解不可能

(2) $\det A = 0$

(3) 任意の i について A から i 行と i 列を除いて得られる行列が有限型のカルタン行列になる.

例 2.28. 次の行列はアフィン型のカルタン行列である.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

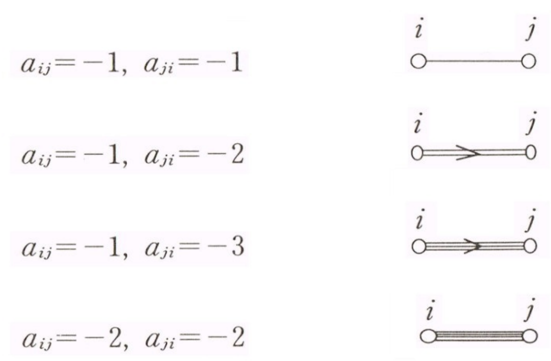
カルタン行列はディンキン図形とよばれるグラフで表示することができる.

定義 2.29. $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{l} \in \mathrm{Mat}(l, \mathbb{Z})$ のディンキン図形は次で定められる頂点と辺をもつグラフである.

頂点 行列の添字 $i = 1, \ldots, l$ ごとに頂点 $\overset{i}{\circ}$ が与えられる.

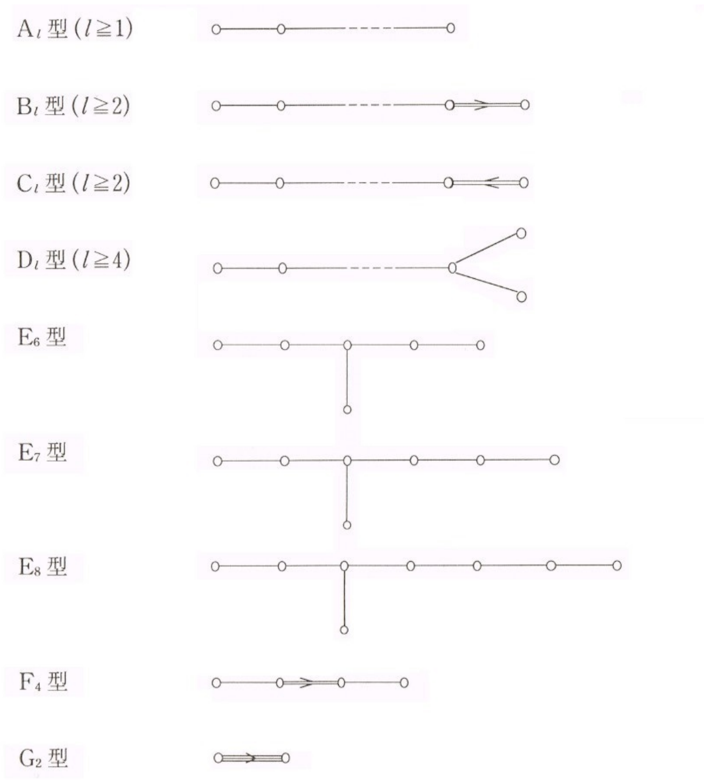
辺 異なる 2 頂点 $\overset{i}{\circ}, \overset{j}{\circ}$ には $a_{ij}a_{ji}$ 本の辺で結ばれるとする. さらに $|a_{ji}| > |a_{ij}|$ ならば $\overset{i}{\circ}$ から $\overset{j}{\circ}$ への向きに対して矢印をつけるとする.

例えば, 下の図 ([神保-1] p51 より転載) のように定める:



カルタン行列が分解不能であるということは対応するディンキン図形が連結, すなわち, 任意の 2 点を結ぶ経路が存在するということを意味する. また, カルタン行列の行と列を同じ置換で入れ替えることは, 対応するディンキン図形の頂点の番号を置換することに対応する.

命題 2.30. 分解不可能な有限型カルタン行列のディンキン図形は頂点の置換を除いて次のディンキン図形のいずれかで表示される. 図は [神保-1] の § 5 の図 5.1 から転載した.



$\mathrm{A}_l, \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{D}_l$ を古典型, 残りを例外型と呼ぶ. 各々の図形 X に対応するカルタン行列を X 型のカルタン行列とよぶことにする. 古典型のディンキン図形に対応するカッツ・ムーディリー代数は行列の単純リー代数として具体的に表示できる.

定義 2.31.

(1) $\det A > 0$ なるカルタン行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le l}$ に対して次の生成元と関係式で定まる $\mathbb{C}$ 上のリー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\mathbb{C})$ を A に付随するカッツ・ムーディリー代数という.

$$\text{生成元}: x_i^+, \quad x_i^-, \quad h_i \quad (1 \le i \le l) \tag{2.28}$$

$$\text{基本関係式}: [h_i, h_j] = 0. \tag{2.29}$$

$$[h_i, x_j^+] = a_{ij} x_j^+, \quad [h_i, x_j^-] = a_{ij} x_j^- \tag{2.30}$$

$$[x_i^+, x_i^-] = \delta_{ij} h_j, \tag{2.31}$$

$$\mathrm{ad}(x_i^\pm)^{1-a_{ij}}(x_j^\pm) = 0. \tag{2.32}$$

ここで, $[X, Y] = XY - YX$ である. 定義により $\mathfrak{g}$ の元 は

$$\xi = [\xi_{k_1}, [\xi_{k_2}, \cdots, [\xi_{k_{p-1}}, \xi_{k_p}] \cdots]] \tag{2.33}$$

という形の線形結合で表示できる. ただし, ξ_{k_m} は x_i^+, x_i^-, h_i のいずれかとする.

(2) $\{h_i\}_{i=1}^l$ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^l \mathbb{C} h_i$ をカルタン部分代数という. $[h_i, h_j] = 0$ だから $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の可換リー代数となる.

注意. アフィン型のカルタン行列に対応するカッツムーディリー代数も 定義 2.31 と類似した定義ができるが, いくつか修正が必要である.

有限次元のカッツ・ムーディリー代数は次で特徴づけられる:

命題 2.32. カッツムーディリー代数 $\mathfrak{g}(A)$ が有限次元ということと, A が有限型のカルタン行列であることは同値である.

古典型のディンキン図形に対応するカルタン行列 A に付随するカッツ・ムーディリー代数 $\mathfrak{g}(A)$ は古典単純リー代数とよばれる.

例 2.33. 1 行 1 列の行列 $A=(2)$ は A_1 型のカルタン行列である. これに付随する $\mathfrak{g}(A)$ は x^+, x^-, h を生成元とし,

$$[h, x^+] = 2x^+, \quad [h, x^-] = -2x^-, \quad [x^+, x^-] = h \tag{2.34}$$

を基本関係式に持つリー代数である. これは定義 2.15 と一致するので $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ であることがわかる.

例 2.34. 一般に A_l $(l \geq 1)$ 型のカルタン行列 A に付随する $\mathfrak{g}(A)$ は

$$\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C}) = \{\, X \in \mathrm{Mat}(l+1, \mathbb{C}) \ ; \ \mathrm{Tr}X = 0 \,\}$$

に $[X, Y] = XY - YX$ をリー括弧として定まるリー代数と同型になる. 実際, E_{ij} を (i, j) 成分が 1, その他の成分が 0 の行列とおいたとき

$$x_i^+ = E_{i,i+1}, \quad x_i^- = E_{i+1,i}, \quad h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}$$

は $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$ をリー代数として生成し基本関係式 (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) を満たすことがわかる.

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{C}h_i = \left\{ t = \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_{l+1}) \ ; \ \sum_{i=0}^{l+1} t_i = 0 \right\}$$

は $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数となる.

古典型のディンキン図形に対応するカルタン行列 A に付随するカッツ・ムーディリー代数 $\mathfrak{g}(A)$ は行列のなすリー代数として実現される ([神保-1], [Kac]).

2.5 ルート系

$\mathfrak{g}$ をカルタン行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq l} \in \mathrm{Mat}(l, \mathbb{C})$ に付随するカッツ・ムーディリー代数とする. $\mathfrak{h}$ をそのカルタン部分代数, $\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{h}$ の双対空間とする.

定義 2.35. $\alpha \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{\, X \in \mathfrak{g} \ ; \ [h, X] = \alpha(h)X \quad (h \in \mathfrak{h}) \,\} \tag{2.35}$$

とおく. $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ になるとき, α を $\mathfrak{g}$ のルート, $\mathfrak{g}_\alpha$ を α に属すルート空間, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ をルートベクトルという.

例 2.36. $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\alpha_i(h_j) = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq l) \tag{2.36}$$

で定める．このとき, (2.28) の $x_i^+, x_i^- \quad (1 \le i \le l)$ は各々 α_i, $-\alpha_i$ に属すルート空間のルートベクトルである．このことは容易に確かめられる．α_i を単純ルートという．

命題 2.37. $\det A \neq 0$ のカルタン行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i \le l}$ に付随するカッツ・ムーディリー代数 $\mathfrak{g}$ の単純ルート $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ はカルタン部分代数 $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^l h_i$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の基底をなす.

証明. $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ が一次独立であることを示せばよい.

$$\sum_j c_j \alpha_j = 0 \quad (c_j \in \mathbb{C})$$

とする．このとき,

$$\sum_j c_j \alpha_j(h_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, l) \tag{2.37}$$

となる．$\alpha_j(h_i) = a_{ij}$ に注意すると (2.37) は

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{bmatrix} = 0$$

と同値. $\det A \neq 0$ だから $c_1 = \cdots = c_l = 0$. ゆえに, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ は一次独立. □

命題 2.38. カッツ・ムーディリー代数 $\mathfrak{g}$ の元

$$\xi = [\xi_{k_1}, [\xi_{k_2}, \cdots, [\xi_{k_{p-1}}, \xi_{k_p}] \cdots]] \quad (\xi_{k_m} = x_i^+,\ x_i^-,\ h_i, \quad m = 1, \ldots, p)$$

に対して, $m_j^\pm = m_j^\pm(\xi)$ を $\{\xi_{k_m}\}_{m=1}^p$ のなかに $x_j^\pm$ が現れる個数とする．このとき $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$[h, \xi] = \sum_{j=1}^l (m_j^+ - m_j^-) \alpha_j(h) \xi \tag{2.38}$$

が成り立つ．これは任意のルートが単純ルートの整数係数の一次結合でかけることを意味している.

証明. (2.38) の p に関する帰納法で示す．$p = 1$ のときは ξ は $x_i^+,\ x_i^-,\ h_i$ のいずれかである.

$$[h, x_i^\pm] = \pm\alpha_i(h) x_i^\pm, \quad [h, h_i] = 0 \quad (h \in \mathfrak{h})$$

となるので, $p = 1$ で正しい．いま $p - 1$ まで正しいとして n の場合を示す.

$$\xi' = [\xi_{k_2}, [\cdots, [\xi_{k_{p-1}}, \xi_{k_p}]] \cdots]$$

とおく．このとき $\xi = [\xi_{k_1}, \xi']$ となる．ヤコビ律 (定義 2.12) と帰納法の仮定によって

$$\begin{aligned}
[h, \xi] &= [h, [\xi_{k_1}, \xi']] \\
&= [\xi_{k_1}, [h, \xi']] + [[h, \xi_{k_1}], \xi'] \\
&= \left[\xi_{k_1}, \sum_{j=1}^l (m_j^+(\xi') - m_j^-(\xi')) \alpha_j(h) \xi'\right] + \left[\sum_{j=1}^l (m_j^+(\xi_{k_1}) - m_j^-(\xi_{k_1})) \alpha_j(h) \xi_{k_1}, \xi'\right] \\
&= \sum_{j=1}^l \big((m_j^+(\xi_{k_1}) + m_j^+(\xi')\ ) - (m_j^-(\xi_{k_1}) + m_j^-(\xi')\ )\ \big) \alpha_j(h) [\xi_{k_1}, \xi'] \\
&= \sum_{j=1}^l \big(m_j^+(\xi) - m_j^-(\xi)\big) \alpha_j(h) \xi
\end{aligned}$$

となる. 以上から示したいことが示された. □

例 2.39 ($\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{C})$ のルート系)**.** 各記号は例 2.34 を参照する. 対角行列 $t=\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_{l+1})$ に対して, $\epsilon_i(t)=t_i$ とおくと $\epsilon_i\in\mathfrak{h}^*$ となる. このとき $\mathfrak{g}$ のルート全体の集合は

$$\Delta=\{\,\epsilon_i-\epsilon_j\ ;\ 1\leq i\neq j\leq l+1\,\}$$

で与えられる. 対応するルート空間は $\mathfrak{g}_{\epsilon_i-\epsilon_j}=\mathbb{C}E_{ij}$ で与えられる. また, 単純ルートは

$$\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}\quad(1\leq i\leq l)$$

で与えられる.

例 2.40 ($\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})$ のルート系)**.** 記号は定義 2.19 および 命題 2.20 を参照する. $\delta\in\mathfrak{h}^*$ を

$$\delta=\alpha_0+\alpha_1 \tag{2.39}$$

で定める. ルート全体の集合 Δ は

$$\Delta=\Delta_{\mathrm{re}}\sqcup\Delta_{\mathrm{im}} \tag{2.40}$$

で与えられる. ただし,

$$\Delta_{\mathrm{re}}=\{\,\alpha+n\delta\,;\alpha\in\{\pm\alpha\},\ n\in\mathbb{Z}\,\}, \tag{2.41}$$
$$\Delta_{\mathrm{im}}=\{\,n\delta\ ;\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,\} \tag{2.42}$$

とおいた. Δ_{re} の元を実ルート, Δ_{im} の元を虚ルートという. 各ルートに対応するルート空間は次のようになる:

$$\mathfrak{g}_{n\delta}=\{\,h\otimes t^n\ ;\ h\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\,\} \tag{2.43}$$
$$\mathfrak{g}_{\alpha_1+n\delta}=\mathbb{C}E\otimes t^n,\ \mathfrak{g}_{-\alpha_1+n\delta}=\mathbb{C}F\otimes t^n\quad(n\in\mathbb{Z}) \tag{2.44}$$

正ルートの集合 Δ_+ は

$$\Delta_+=\{\,\alpha_1+m\delta\ ;\ m\in\mathbb{Z}_{\geq0}\,\}\sqcup\{\,-\alpha_1+(n+1)\delta\ ;\ n\in\mathbb{Z}_{\geq0}\,\}\sqcup\{\,n\delta\ ;\ n\in\mathbb{Z}_{>0}\,\} \tag{2.45}$$

でさだめる.

2.6 一般の量子群

一般カルタン行列 (GCM [Kac]) $A\in\mathrm{Mat}(l,\mathbb{Z})$ は, ${}^t(DA)=DA$ なる非退化 1 対角行列 $D\in\mathrm{Mat}(l,\mathbb{Z})$ が存在するとき, 対称化可能という. A_l,D_l 型に対応するカルタン行列はすでに対称行列であるので, 対称化可能である.

定義 2.41. $A\in\mathrm{Mat}(l,\mathbb{Z})$ を対称化可能なカルタン行列とし, $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\dots,d_l)$ を A を対称化させる行列とする. $q\in\mathbb{C}^\times$ を $q^{2d_i}\neq1\quad i=0,1,\dots,l-1$ なるものとし $q_i=q^{d_i}$ とおく. このとき 代数 $U_q(A,D)$

を次で定める．

$$\begin{aligned}
\text{生成元：}\quad & X_i^+, X_i^-, K_i, K_i^{-1} \quad (1 \leq i \leq l). \\
\text{基本関係式：}\quad & K_iK_j = K_jK_i,\ K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1, \\
& K_iX_j^{\pm} = q_i^{\pm a_{ij}} X_j^{\pm} K_i, \\
& \left[X_i^+, X_j^-\right] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\
& \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} (X_i^{\pm})^{1-a_{ij}-k} X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^k = 0.
\end{aligned}$$

最後の関係式はセール関係式と呼ばれる．

$q \to 1$ のとき, この関係式はカルタン行列 A が定める半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ のホップ代数としての変形を与える．

2.6.1 ホップ代数の構造

$U_q(\mathfrak{g})$ には余積 Δ, 余単位射 ϵ, 対合射 S を次のように定義することでホップ代数の構造を入れることができる: 生成元 $K_i^{\pm 1}$, $X_i^{\pm}$ $\quad (i = 0, 1)$ に対しては

$$\begin{aligned}
&\Delta(K_i) = K_i \otimes K_i,\ \Delta(K_i^{-1}) = K_i^{-1} \otimes K_i^{-1}, && \epsilon(K_i^{\pm 1}) = 0, && S(K_i) = K_i^{-1},\ S(K_i^{-1}) = K_i, \\
&\Delta(X_i^+) = X_i^+ \otimes 1 + K_i \otimes X_i^+, && \epsilon(X_i^{\pm}) = 0, && S(X_i^+) = -K_i^{-1}X_i^+, \\
&\Delta(X_i^-) = X_i^- \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes X_i^+, && && S(X_i^-) = -X_i^- K_i.
\end{aligned}$$

余積 Δ, 余単位射 ϵ, 対合射 S が well-defined であること, すなわち, $U(\mathfrak{g})$ における基本関係式が Δ, ϵ, S によって保たれることの確認は, セール関係式を除いて, $\mathfrak{sl}_2$ 型の量子群にホップ代数の構造を入れたときの議論と同様である．ここではセール関係式を余積が保つことをしめす．$n = 1 - a_{ij}$ とおいて相異なる i, j に対して

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (X_i^+)^{n-k} X_j^+ (X^+)^k = 0 \text{ ならば } \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (\Delta(X_i^+))^{n-k} \Delta(X_j^+) (\Delta(X^+))^k = 0$$

を示せばよい．X^- に関するセール関係式も同様である．計算を見通しよくするためいくつか記号の準備をする．

$$x_1 = X_i^+ \otimes 1, \quad x_2 = K \otimes X_i^+, \quad y_1 = X_j^+ \otimes 1, \quad y_2 = K_j \otimes X_j^+ \tag{2.46}$$

とおく．このとき $q_i^{a_{ij}} = q_j^{a_{ji}}$ に注意すると

$$x_2x_1 = q_i^2 x_1x_2, \quad x_2y_1 = q_i^{1-n} y_1x_2, \quad y_2x_1 = q_i^{1-n} x_1y_2$$

が成り立つ．この関係式をもとに次を示していく．ここでは q_i を改めて q と置いていることに注意する．

補題 2.42.

$$\phi(x, y) = \sum_{k}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-x)^k y x^{n-k} \tag{2.47}$$

とおく．このとき (2.46) の $x_i, y_i \quad (i = 1, 2)$ について

$$\phi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \phi(x_1 + x_2, y_1) + \phi(x_1 + x_2, y_2) = \phi(x_1, y_1) + \phi(x_2, y_2).$$

証明. $\underline{\phi(x_1+x_2,y_1)=\phi(x_1,y_1)}$ について: 命題 1.2 を用いることで

$$
\begin{aligned}
\phi(x_1+x_2,y_1) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-x_1-x_2)^k y_1 (x_1+x_2)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k \left(\sum_{t=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix}_q q^{t(k-t)} x_1^t x_2^{k-t} \right) y_1 \left(\sum_{s=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n-k \\ s \end{bmatrix}_q q^{s(n-k-s)} x_1^s x_2^{n-k-s} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{t=0}^{k} \sum_{s=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k \\ s \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{t(k-t)+s(n-k-s)} x_1^t x_2^{k-t} y_1 x_1^s x_2^{n-k-s}.
\end{aligned}
$$

ここで $(-1)^k q^{t(k-t)+s(n-k-s)} x_1^t x_2^{k-t} y_1 x_1^s x_2^{n-k-s} = q^{(1-n)(k-t)+2s(k-t)} x_1^t y_1 x_1^s x_2^{n-(s+t)}$ と

$$
\begin{bmatrix} n \\ p+u \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ u \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-(p+u) \\ m-u \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-m \\ p \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ u \end{bmatrix}_q
$$

に注意して, $m=s+t, p=k-t, u=t$ とおくことで

$$
\begin{aligned}
&\phi(x_1+x_2,y_1) \\
&= \sum_{\substack{0 \le m \le n \\ 0 \le p \le n-m \\ 0 \le u \le m}} \begin{bmatrix} n \\ p+u \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ u \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-(p+u) \\ m-u \end{bmatrix}_q (-1)^p q^{p(1-n+m)} (-1)^u q^{(m-u)(n-m)} x_1^u y_1 x_1^{m-u} x_2^{n-m} \\
&= \sum_{\substack{0 \le m \le n \\ 0 \le p \le n-m \\ 0 \le u \le m}} \begin{bmatrix} n-m \\ p \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ u \end{bmatrix}_q (-1)^p q^{-p(n-m-1)} (-1)^u q^{(m-u)(n-m)} x_1^u y_1 x_1^{m-u} x_2^{n-m}.
\end{aligned}
$$

最後に

$$
\sum_{p=0}^{n-m} (-1)^p \begin{bmatrix} n-m \\ p \end{bmatrix}_q q^{-p(n-m-1)} = \delta_{mn}
$$

だから

$$
\phi(x_1+x_2,y_1) = \sum_{u=0}^{m} (-1)^u x_1^u y_1 x_1^{n-u} = \phi(x_1,y_1).
$$

$\underline{\phi(x_1+x_2,y_2)=\phi(x_2,y_2)}$ について:

$\phi(x_1+x_2,y_2)$ は定義に従い計算すると

$$
\phi(x_1+x_2,y_2) = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ 0 \le t \le k \\ 0 \le s \le n-k}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ t \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k \\ s \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{t(k-t)+s(n-k-s)} x_1^t x_2^{k-t} y_2 x_1^s x_2^{n-k-s}.
$$

となる. ここで

$$
x_1^t x_2^{k-t} y_2 x_1^s x_2^{n-k-s} = q^{(1-n)s+2s(k-t)} x_1^{t+s} x_2^{k-t} y_2 x_2^{n-k-s}
$$

に注意する. $m=s+t, p=k-t, u=t$ と変換することで

$$
\begin{aligned}
&\phi(x_1+x_2,y_2) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \sum_{p=0}^{n-m} \left(\sum_{u=0}^{m} (-1)^u q^{u(m-1)} \begin{bmatrix} m \\ u \end{bmatrix}_q \right) (-1)^p q^{m(1+p-m)} \begin{bmatrix} n-m \\ p \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q x_1^m x_2^p y_2 x_2^{n-p-m} \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

となる. $m=0$ の項のみ残り, これは $\phi(x_2,y_2)$ と等しい. □

ところで,

$$x_1 = X_i^+ \otimes 1,\ x_2 = K \otimes X_i^+,\ y_1 = X_j^+ \otimes 1,\ y_2 = K_j \otimes X_j^+$$

だったことに注意すると, セール関係式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (X_i^+)^{n-k} X_j^+ (X^+)^k = 0$$

によって

$$\begin{aligned}
\phi(x_1, y_1) &= \sum_{u=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ u \end{bmatrix}_q (-1)^u (X_i^+ \otimes 1)^u (X_j^+ \otimes 1)(X_i^+ \otimes 1)^{n-u} \\
&= \left(\sum_{u=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ u \end{bmatrix}_q (-1)^u (X_i^+)^u X_j^+ (X_i^+)^{n-u} \right) \otimes 1 = 0.
\end{aligned}$$

同様に,

$$\phi(x_2, y_2) = K_i^n K_j \otimes \sum_{v=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ v \end{bmatrix}_q (-1)^v (X_i^+)^v X_j^+ (X_i^+)^{n-v} = 0.$$

最後に

$$\Delta(X_i^+) = x_1 + x_2,\ \Delta(X_j^+) = y_1 + y_2$$

となることに注意すると,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (\Delta(X_i^+))^{n-k} \Delta(X_j^+)(\Delta(X^+))^k = \phi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \phi(x_1, y_1) + \phi(x_2, y_2) = 0.$$

よって余積が X^+ に関してのセール関係式を保つことが分かった. X^- に関してのセール関係式を保つことは

$$x_1 = 1 \otimes X_i^-, \quad x_2 = X_i^- \otimes K_i^{-1} \tag{2.49}$$
$$y_1 = 1 \otimes X_j^-, \quad y_2 = X_j^- \otimes K_j^{-1} \tag{2.50}$$

とおき直したときも

$$x_2 x_1 = q_i^2 x_1 x_2, \quad x_2 y_1 = q_i^{1-n} y_1 x_2, \quad y_2 x_1 = q_i^{1-n} x_1 y_2, \quad \Delta(X_i^-) = x_1 + x_2, \quad \Delta(X_j^-) = y_1 + y_2. \tag{2.51}$$

が成り立つことに注意すれば同様に示すことができる.

3　ヤン・バクスター方程式

ここではヤン・バクスター方程式の定義とその由来について説明する.

定義 3.1 (ヤン・バクスター方程式)**.** ヤン・バクスター方程式はベクトル空間 V の二つのテンソル積上の自己準同形 $R(u) \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ に関しての方程式である.

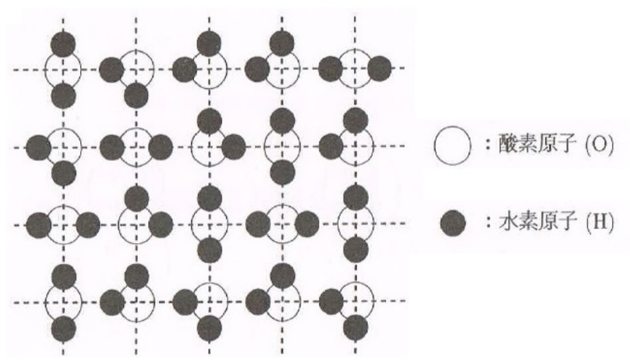
$$(R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1) = (1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u))$$

ここで, $u,\ v$ はスペクトルパラメーターとよばれる変数である.

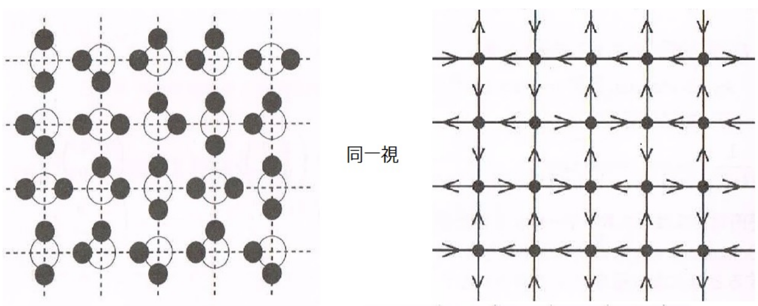
量子群はリー代数のある種の拡張として 1985 年に発見されたホップ代数である. 数理物理学における可解格子模型を直接の契機として発見された ([神保-2], [Dri]). R 行列は量子群の生みの親ともいえ, ヤン・バクスター方程式の解の親玉となっている.

3.1　ヤン・バクスター方程式の由来

ここでは量子群の発見のきっかけになった統計力学におけるヤン・バクスター方程式の由来に説明する. 統計力学とは非常にたくさんの粒子の集合的な運動を統計的に扱う物理学である. ここでは水分子による 2 次元的な氷の結晶の模型を考える下図 ([武部] から転載) のように格子状に水分子が並んでるとする. 格子の各頂点には酸素分子があるとし辺上で水素分子が酸素分子と結合しているとする.



各水素原子がどの酸素原子と結合しているかの様子を矢印で表示し, 格子の様子を下図 ([武部] 1 章から転載 ）のように矢印の配置と同一視する.



矢印が配置されている様子をその格子の「状態」と呼ぶことにする. 各々の「状態」s になりうる確率はボルツマンウェイト $W(s)$ を用いて

$$P(s) = \frac{W(s)}{Z},\ W(s) := \exp\left(-\frac{E(s)}{k_B T}\right) \tag{3.1}$$

で与えられるとする. ここで, $E(s), k_B, T, Z = \sum_{s:\text{状態}} W(s)$ は各々状態 s でもつ系のエネルギー, ボルツマン定数, 温度, 分配関数である. Z がわかることで系の比熱などがわかることが知られている. いま $E(s)$ は各格子点 (i,j) におけるエネルギー $E_{ij}(s)$ の総和で得られ, $E_{ij}(s)$ は点 (i,j) から伸びている辺の上にある 4 本の矢印の配置で決まるものとする:

$$E(s) = \sum\nolimits_{ij} E_{ij}(s). \tag{3.2}$$

配置の仕方は数学的には $2^4 = 16$ 通り存在するが, 氷の模型では状態 s での頂点 (i,j) におけるボルツマンウェイト $W_{ij}(s) = \exp\left(-E_{ij}(s)/k_B T\right)$ が次で決まるものとする. そのデータを

$$R = R(x) := \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \uparrow\!\rightarrow & \uparrow\!\leftarrow & \downarrow\!\rightarrow & \downarrow\!\leftarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow\!\uparrow \\ \rightarrow\!\downarrow \\ \leftarrow\!\uparrow \\ \leftarrow\!\downarrow \end{array} & \begin{bmatrix} a & & & \\ & c & b & \\ & b & c & \\ & & & a \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.3}$$

行列で表示する. ここで

$$a = \frac{qx - q^{-1}x^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad b = \frac{x - x^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad c = 1.$$

命題 3.2. R を 2×2 の行列のテンソル積の元 $R \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ とみると次の方程式を満たす ([武部]).

$$(R(x) \otimes 1)(1 \otimes R(xy))(R(y) \otimes 1) = (1 \otimes R(y))(R(xy) \otimes 1)(1 \otimes R(x)). \tag{3.4}$$

この方程式をヤン・バクスター方程式という. また, 方程式の解を R 行列とよぶ.

逆にこの方程式を満たすような R を作れば新しい模型が定まり, それは Z が計算できるという意味で一般に可解であると期待されている.

$a = \frac{qx - q^{-1}x^{-1}}{q - q^{-1}},\ b = \frac{x - x^{-1}}{q - q^{-1}},\ c = 1$ について, $x = e^{iu} q = e^{i\eta}$ と置きなおすと $R(x)$ は定数倍を除いて三角関数を成分に持つ行列

$$R(u) := \begin{bmatrix} \sin(u+\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\eta & \sin u & 0 \\ 0 & \sin u & \sin\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(u+\eta) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

と等しい. この $R(u)$ についてのヤン・バクスター方程式は

$$(R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1) = (1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u)) \tag{3.6}$$

となる. 実は, アフィン型の量子群の表現を用いることで三角関数型のヤン・バクスター方程式の解を系統的につくることができる.

3.2 対称群の群環の表現を用いたヤン・バクスター方程式の解の構成法

前章では, ヤン・バクスター方程式の三角関数解はアフィン型量子群の表現を導入することで得ることができると述べた. ここでは, そのプロセスを紹介するために, [神保-1] に基づいて対称群の群環を用いてヤン・バクスター方程式の解を作ることにする.

3.2.1 ヤン・バクスター方程式の気持ち

$\mathfrak{S}_n$ を n 次の対称群と置く．番号 i と $i+1$ を入れ替える互換を $\sigma_i \in \mathfrak{S}_n$ とおこう．これは組みひも関係式とよばれる次の関係式を満たしている．

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}. \tag{3.7}$$

一方でヤン・バクスター方程式

$$(R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1) = (1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u))$$

において, R をテンソル積の成分を互換する作用素とみると, 組みひも関係式と形が似ている．

命題 3.3. n 次対称群の群環 $\mathbb{C}S_n := \{ \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma \ ; \ a_\sigma \in \mathbb{C} \}$ の元 $R_i(u)$ を $R_i(u) = 1 + \sigma_i u$ とおく．このとき

$$R_i(u) R_{i+1}(u+v) R_i(v) = R_{i+1}(v) R_i(u+v) R_{i+1}(u) \tag{3.8}$$

が成り立つ．

証明. 示したい式は次と同値:

$$(1+u\sigma_i)(1+(u+v)\sigma_{i+1})(1+v\sigma_i) = (1+v\sigma_{i+1})(1+(u+v)\sigma_i)(1+u\sigma_{i+1}).$$

u について 2 次式とおもって両辺の係数を比較すれば容易に等式 (3.8) が示される． □

上記で得た関係式を次で定める $\mathbb{C}S_n$ の表現に移す．すなわち,

$$\mathbb{C}S_n \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \ ; \ \sigma_i \longmapsto \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \underbrace{P}_{i,i+1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}$$

という代数準同型を与える．ここで, $V = \mathbb{C}^2$, P はテンソルの成分を入れ替える互換である: $P : x \otimes y \mapsto y \otimes x$.

$$R(u) := \begin{bmatrix} u+1 & & & \\ & 1 & u & \\ & u & 1 & \\ & & & u+1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

とおくと, (3.8) からヤン・バクスター方程式を満たす：

$$(R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1) = (1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u)). \tag{3.10}$$

以上のようにして適当な代数と表現をとることで, その中においてヤン・バクスター方程式に相当する関係式を満たす元（親玉）を構成することでヤン・バクスター方程式の解を得ることができた．三角関数解に関していえば代数としてアフィン型の量子群を持ってくることができる．以下では, 量子群における親玉である普遍 R 行列について述べる．

4　普遍 R 行列

ヤン・バクスター方程式に相当する関係式を満たす量子群の「親玉」である普遍 R 行列について述べる.

命題 4.1. V をベクトル空間とする. $u \in \mathbb{C}$ 上の関数 $\check{R} \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ が

$$(\check{R}(u) \otimes 1)(1 \otimes \check{R}(u+v))(\check{R}(v) \otimes 1) = (1 \otimes \check{R}(v))(\check{R}(u+v) \otimes 1)(1 \otimes \check{R}(u)) \tag{4.1}$$

を満たすことは, $R = P\check{R}$ (ただし $P : x \otimes y \mapsto y \otimes x$) の変換のもとで

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u) \tag{4.2}$$

を満たすことと同値である. ここで $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ のとき

$$R_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1, \quad R_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i, \quad R_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$$

と置いた.

証明. $R(u) = \sum_i a_i(u) \otimes b_i(u)$ であるとする. (4.2) の左辺は

$$\begin{aligned}
&R_{12}(u)R_{23}(u+v)R_{23}(v) \\
=&\left(\sum_i a_i(u) \otimes b_i(u) \otimes 1\right)\left(\sum_j a_j(u+v) \otimes 1 \otimes b_j(u+v)\right)\left(\sum_k 1 \otimes a_k(v) \otimes b_k(v)\right) \\
=&\sum_{i,j,k} a_i(u)a_j(u+v) \otimes b_i(u)a_k(v) \otimes b_j(u+v)b_k(v)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

となる. また (4.2) の右辺は

$$\begin{aligned}
&R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u) \\
=&\left(\sum_k 1 \otimes a_k(k) \otimes b_k(v)\right)\left(\sum_j a_j(u+v) \otimes 1 \otimes b_j(u+v)\right)\left(\sum_i a_i(u) \otimes b_i(u) \otimes 1\right) \\
=&\sum_{i,j,k} a_j(u+v)a_i(u) \otimes a_k(v)b_i(u) \otimes b_k(v)b_j(u+v)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

となる. 一方で, $x, y, z \in V$ に対して (4.1) の左辺は

$$\begin{aligned}
&(\check{R}(u) \otimes 1)(1 \otimes \check{R}(u+v))(\check{R}(v) \otimes 1)(x \otimes y \otimes z) \\
=&(\check{R}(u) \otimes 1)(1 \otimes \check{R}(u+v))\left(\sum_i b_i(v)y \otimes a_i(v)x \otimes z\right) \\
=&(\check{R}(u) \otimes 1)\left(\sum_{i,j} b_i(v)y \otimes b_j(u+v)z \otimes a_j(u+v)a_i(v)x\right) \\
=&\sum_{i,j,k} b_k(u)b_j(u+v)z \otimes a_k(u)b_i(v)y \otimes a_j(u+v)a_i(v)x
\end{aligned} \tag{4.5}$$

また (4.1) の右辺は

$$
\begin{aligned}
&(1\otimes \check{R}(v))(\check{R}(u+v)\otimes 1)(1\otimes \check{R}(u))(x\otimes y\otimes z)\\
=&(1\otimes \check{R}(v))(\check{R}(u+v)\otimes 1)\left(\sum_k x\otimes b_k(u)z\otimes a_k(u)y\right)\\
=&(1\otimes \check{R}(v))\left(\sum_{j,k} b_j(u+v)b_k(u)z\otimes a_j(u+v)x\otimes a_k(u)y\right)\\
=&\sum_{i,j,k} b_j(u+v)b_k(u)z\otimes b_i(v)a_k(u)y\otimes a_i(v)a_j(u+v)x
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

となる．等式 (4.5)=(4.6) において u と v の立場を交換すると等式 (4.3)=(4.4) となることがわかる． $\square$

定義 4.2. ホップ代数 H に次の条件を満たす $\mathcal{R}\in H\widehat{\otimes}H$ があるとき, $(H,\mathcal{R})$ を準三角ホップ代数という.

$$
\tau\Delta(a)=\mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}\quad (a\in H),
$$
$$
(\Delta\otimes \mathrm{id})(\mathcal{R})=\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23},\quad (\mathrm{id}\otimes\Delta)(\mathcal{R})=\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}.
$$

ここで, $\tau(a\otimes b)=b\otimes a$. $H\widehat{\otimes}H$ は $H\otimes H$ の適当な無限和を許した完備化である．この $\mathcal{R}$ を普遍 R 行列 (universal R-matrix) という.

命題 4.3. 準三角ホップ代数 $(H,\mathcal{R})$ の $\mathcal{R}$ は次の関係式を満たす.

$$
\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}=\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \tag{4.7}
$$

証明. $\mathcal{R}=\sum_i a_i\otimes b_i$ とすれば次の通りである:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{12}(\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23})&=(\mathcal{R}\otimes 1)((\Delta\otimes\mathrm{id})(\mathcal{R}))=\sum_i \mathcal{R}\Delta(a_i)\otimes b_i,\\
(\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13})\mathcal{R}_{12}&=(\sum_i 1\otimes a_i\otimes b_i)(\sum_j a_j\otimes 1\otimes b_j)\mathcal{R}_{12}\\
&=(\sum_{i,j}\tau(a_i\otimes a_j)\otimes b_ib_j)\mathcal{R}_{12}=(\tau\otimes\mathrm{id})(\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23})\mathcal{R}_{12}\\
&=(\tau\Delta\otimes\mathrm{id})(\mathcal{R})(\mathcal{R}\otimes 1)=\sum_i \tau\Delta(a_i)\mathcal{R}\otimes b_i.
\end{aligned}
$$

$\square$

この $\mathcal{R}$ が量子群における親玉になることを説明する．いま U_q の表現でパラメーター λ_i に依存する表現

$$
\pi_{\lambda_i}:U_q\longrightarrow \mathrm{End}(V_i) \tag{4.8}
$$

がつくれたとき，$R(\lambda_i,\lambda_j):=(\pi_i\otimes\pi_j)(\mathcal{R})$ とおけば

$$
(\pi_1\otimes\pi_2\otimes\pi_3)(\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23})=R_{12}(\lambda_1,\lambda_2)R_{13}(\lambda_1,\lambda_3)R_{23}(\lambda_2,\lambda_3),
$$
$$
(\pi_1\otimes\pi_2\otimes\pi_3)(\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12})=R_{23}(\lambda_2,\lambda_3)R_{13}(\lambda_1,\lambda_3)R_{12}(\lambda_1,\lambda_2)
$$

が成立する．$R(\lambda_i,\lambda_j)$ に対して $R_{kl}(\lambda_i,\lambda_j)$ は式 (4.1) と同様に定める．さらに P をテンソル積の互換とし, $\check{R}(\lambda_i,\lambda_j):=PR(\lambda_i,\lambda_j)\in\mathrm{End}(V_i\otimes V_j,\otimes V_j\otimes V_i)$ とおく．$R(\lambda_i,\lambda_j)$ が λ_i と λ_j の比 λ_i/λ_j で決まる, す

なわち, $R(\lambda_i,\lambda_j)=R(\lambda_i/\lambda_j)$ と仮定すれば関係式 $\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}=\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$ であるような $\mathcal{R}$ の表現の像によって

$$(\check{R}(x)\otimes 1)(1\otimes\check{R}(xy))(\check{R}(y)\otimes 1)=(1\otimes\check{R}(y))(\check{R}(xy)\otimes 1)(1\otimes\check{R}(x)) \tag{4.9}$$

という $\mathrm{Hom}(V_1\otimes V_2\otimes V_3, V_3\otimes V_2\otimes V_1)$ における関係式を得る.

例 4.4. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ に対する普遍 R 行列は次で与えられる.

$$\mathcal{R}=\exp_q(-(q-q^{-1})X^+\otimes X^-)q^{-H\otimes H/2}. \tag{4.10}$$

このことはより一般の形で後で示す.

注意. 厳密にいえば $\mathcal{R}$ は無限和（無限積）の形をとるので $U_q(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes 2}$ の中には納まらない. 無限和（無限積）を許すように完備化をしなければならない.

4.1 普遍 R 行列の像の性質

$\mathcal{R}$ の存在を認めて議論を進める. U_q は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ などのパラメーター q をもつホップ代数とする.

4.1.1 表現と加群の関係

(V_i,π_i) $(i=1,2)$ を $U_q=U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C}))$ の表現, すなわち, U_q から $\mathrm{End}(V)$ への代数射とする:

$$\pi_i\ :\ U_q\longrightarrow\mathrm{End}(V_i).$$

表現が与えられると,

$$a\cdot v_i:=\pi_i(a)(v_i)\ (a\in U_q,\ v_i\in V_i) \tag{4.11}$$

によって V_i に U_q-加群の構造を入れることができる. U_q には余積が備わっていたので, 以下のようにテンソル積 $V_1\otimes V_2$ を表現空間とする表現を得ることができる:

$$U_q\xrightarrow{\Delta}U_q\otimes U_q\xrightarrow{\pi_1\otimes\pi_2}\mathrm{End}(V_1\otimes V_2).$$

加群の言葉で言い直すと, $V_1\otimes V_2$ に U_q が次のように作用することができる.

$$a\cdot(v_1\otimes v_2):=(\pi_1\otimes\pi_2)(\Delta(a))(v_1\otimes v_2)\quad(a\in U_q,\ v_1\in V_1,\ v_2\in V_2). \tag{4.12}$$

パラメーターに依存する表現 (4.8) の像に関して以下の事が成立する.

命題 4.5.

$$P_{V_1,V_2}:V_1\otimes V_2\to V_2\otimes V_1,\quad v_1\otimes v_2\mapsto v_2\otimes v_1$$

と置く. このとき

$$R_{V_1,V_2}=P_{V_1,V_2}(\pi_1\otimes\pi_2)(\mathcal{R})\in\mathrm{Hom}(V_1\otimes V_2,V_2\otimes V_1) \tag{4.13}$$

は U_q-加群の準同形になっている. すなわち,

$$a\cdot R_{V_1,V_2}(v_1\otimes v_1)=R_{V_1,V_2}(a\cdot(v_1\otimes v_2))\ (a\in U_q,\ v_i\in V_i)). \tag{4.14}$$

証明. $\tau\Delta(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1}$ $(a \in U_q)$ より

$$
\begin{aligned}
&(\pi_1 \otimes \pi_2)(\tau\Delta(a)\mathcal{R}) = (\pi_1 \otimes \pi_2)(R\Delta(a)) \\
\Leftrightarrow &(\pi_1 \otimes \pi_2)(\tau\Delta(a))P_{V_1,V_2}^{-1}R_{V_1,V_2} = P_{V_1,V_2}^{-1}R_{V_1,V_2}(\pi_1 \otimes \pi_2)\Delta(a) \\
\Leftrightarrow &(\pi_2 \otimes \pi_1)(\Delta(a))R_{V_1,V_2} = R_{V_1,V_2}(\pi_1 \otimes \pi_2)(\Delta(a)).
\end{aligned}
$$

□

最後の式は $R = R_{V_1,V_2}$ についての線型方程式と思うことができる. もともと, ヤン・バクスター方程式は $R(u)$ についての非線形な方程式であったが, 量子群とその表現をもちいることで R-行列を求めることを線形な連立方程式を解くことに帰着できることになる. すなわち, 普遍 R 行列 $\mathcal{R}$ の形を知らなくても線型方程式を解くことによってヤン・バクスター方程式の解を感じる (見つける) ことができる.

4.2 三角関数解の構成

冒頭で取り上げたヤン・バクスター方程式の三角関数解の R-行列を得よう.

定義 4.6. z を 0 でない複素数として $\pi_z \ : \ U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}])$ を次で定める:

$$\pi_z(X_0^+) = zF, \qquad \pi_z(X_0^-) = z^{-1}E, \qquad \pi_z(K_0) = q^{-H} = \begin{bmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

$$\pi_z(X_1^+) = E, \qquad \pi_z(X_1^-) = F, \qquad \pi_z(K_1) = q^{H} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

$$\pi_z(c) = 0, \qquad \pi_z(d) = z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}. \tag{4.17}$$

U_q-加群の準同形であるための条件を与える $R = R(z,w) \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{C})$ の線型方程式

$$R(z,w)(\pi_z \otimes \pi_w)\Delta(a) = (\pi_w \otimes \pi_z)(\Delta(a))R(z,w) \ (a \in U_q)$$

を解くことで三角関数解を導出できる. たとえば
$a = K_1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&R(z,w)(q^H \otimes q^H) = (q^H \otimes q^H)R(z,w) \\
\Longleftrightarrow\ &R(z,w)\begin{bmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-2} \end{bmatrix} R(z,w).
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

$a = X_0^+$ のとき

$$
\begin{aligned}
&R(z,w)(zF \otimes I_2 + wq^{-H} \otimes F) = (wF \otimes I_2 + zq^{-H} \otimes F)R(z,w) \\
\Longleftrightarrow\ &R(z,w)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ wq^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & wq & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ zq^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & zq & 0 \end{bmatrix} R(z,w).
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

$a = X_0^-$ のとき

$$R(z,w)(z^{-1}E \otimes q^H + w^{-1}I_2 \otimes E) = (w^{-1}E \otimes q^H + z^{-1}I_2 \otimes E)R(z,w)$$

$$\iff R(z,w)\begin{bmatrix} 0 & w^{-1} & z^{-1}q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1}q^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & w^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & w^{-1}q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^{-1}q^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R(z,w). \tag{4.20}$$

これらの連立方程式 (4.18), (4.19), (4.20) を解くと $R(z,w)$ は定数倍を除いて

$$\begin{bmatrix} qz - q^{-1}w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z-w & (q-q^{-1})w & 0 \\ 0 & (q-q^{-1})z & z-w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & qz-q^{-1}w \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

に等しい. 新しいパラメータ u を用いて

$$z = \frac{q^u}{q-q^{-1}}, \quad w = \frac{q^{-u}}{q-q^{-1}}$$

と置くと (4.21) は

$$R(u) = \begin{bmatrix} \frac{q^{u+1}-q^{-u-1}}{q-q^{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^u & \frac{q^u-q^{-u}}{q-q^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{q^u-q^{-u}}{q-q^{-1}} & q^{-u} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q^{u+1}-q^{-u-1}}{q-q^{-1}} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

と等しい. この $R = R(u)$ はヤン・バクスター方程式を満たす. 最後に

$$\begin{aligned} R'(u) &= \left(\begin{bmatrix} q^u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes I_2 \right)^{-1} R(u) \left(I_2 \otimes \begin{bmatrix} q^u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{q^{u+1}-q^{-u-1}}{q-q^{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{q^u-q^{-u}}{q-q^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{q^u-q^{-u}}{q-q^{-1}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q^{u+1}-q^{-u-1}}{q-q^{-1}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.23}$$

と変換する. (4.23) は (3.3) における $R(x)$ に対して $x = q^u$ とおいたものに等しい. ここで $R'(u)$ もヤン・バクスター方程式の解であることは次の命題から従う:

命題 4.7. $R \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes V)$ がヤン・バクスター方程式

$$(R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1) = (1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u)) \tag{4.24}$$

の解であり, 任意の対角行列 $t \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ に対して

$$[R(u), t \otimes t] = 0 \tag{4.25}$$

を満たすとする. $R' = R'(u)$ を対角行列 $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ を用いて

$$R'(u) = \left(e^{uX} \otimes 1\right) R(u) \left(1 \otimes e^{-uX}\right) \tag{4.26}$$

と定める. このとき, R' もヤン・バクスター方程式の解である.

証明. (4.25) によって

$$(e^{uX}\otimes 1)R(u)(1\otimes e^{-uX}) = (1\otimes e^{-uX})R(u)(e^{uX}\otimes 1)$$

が成り立つことに注意する. 実際,

$$\begin{aligned}(e^{uX}\otimes 1)R(u)(1\otimes e^{-uX}) &= (1\otimes e^{-uX})(e^{uX}\otimes e^{uX})R(u)(1\otimes e^{-uX})\\ &= (1\otimes e^{-uX})R(u)(e^{uX}\otimes e^{uX})(1\otimes e^{-uX})\\ &= (1\otimes e^{-uX})R(u)(e^{uX}\otimes 1)\end{aligned}$$

となるからである.

$$(R'(u)\otimes 1)(1\otimes R'(u+v))(R'(v)\otimes 1) = (1\otimes R'(v))(R'(u+v)\otimes 1)(1\otimes R'(u)) \tag{4.27}$$

が成り立つことを示す. (4.27) の左辺は

$$\begin{aligned}&(R'(u)\otimes 1)(1\otimes R'(u+v))(R'(v)\otimes 1)\\ =&(e^{uX}\otimes 1\otimes 1)(R(u)\otimes 1)(1\otimes e^{-uX}\otimes 1)(1\otimes e^{(u+v)X}\otimes 1)\\ &\times(1\otimes R(u+v))(1\otimes 1\otimes e^{-u+v)X})(e^{vX}\otimes 1\otimes 1)(R(v)\otimes 1)(1\otimes e^{-vX}\otimes 1)\\ =&(e^{uX}\otimes 1\otimes 1)(R(u)\otimes 1)(1\otimes e^{vX}\otimes 1)(1\otimes R(u+v))(1\otimes 1\otimes e^{-vX})\\ &\times(1\otimes e^{-vX}\otimes 1)(R(v)\otimes 1)(e^{vX}\otimes 1\otimes 1)(1\otimes 1\otimes e^{-uX})\\ =&(e^{uX}\otimes 1\otimes 1)(R(u)\otimes 1)(1\otimes 1\otimes e^{-vX})(1\otimes R(u+v))(1\otimes e^{vX}\otimes 1)\\ &\times(1\otimes e^{-vX}\otimes 1)(R(v)\otimes 1)(e^{vX}\otimes 1\otimes 1)(1\otimes 1\otimes e^{-uX})\\ =&(e^{uX}\otimes 1\otimes e^{-vX})(R(u)\otimes 1)(1\otimes R(u+v))(R(v)\otimes 1)(e^{vX}\otimes 1\otimes e^{-uX})\end{aligned} \tag{4.28}$$

となる. 一方で, (4.27) の右辺は

$$\begin{aligned}&(1\otimes R'(v))(R'(u+v)\otimes 1)(1\otimes R'(u))\\ =&(1\otimes e^{vX}\otimes 1)(1\otimes R(v))(1\otimes 1\otimes e^{-vX})(e^{(u+v)X}\otimes 1\otimes 1)\\ &\times(R(u+v)\otimes 1)(1\otimes e^{-(u+v)X}\otimes 1)(1\otimes e^{uX}\otimes 1)(1\otimes R(u))(1\otimes 1\otimes e^{-uX})\\ =&(e^{(u+v)X}\otimes 1\otimes 1)(1\otimes e^{vX}\otimes 1)(1\otimes R(v))\\ &\times(R(u+v)\otimes 1)(1\otimes e^{-vX}\otimes e^{-vX})(1\otimes R(u))(1\otimes 1\otimes e^{-uX})\\ =&(e^{(u+v)X}\otimes 1\otimes 1)(1\otimes e^{vX}\otimes 1)(1\otimes R(v))\\ &\times(R(u+v)\otimes 1)(1\otimes R(u))(1\otimes e^{-vX}\otimes e^{-vX})(1\otimes 1\otimes e^{-uX})\\ =&(e^{(u+v)X}\otimes e^{vX}\otimes 1)(1\otimes R(v))(R(u+v)\otimes 1)(1\otimes R(u))(1\otimes e^{-vX}\otimes e^{-(u+v)X})\end{aligned} \tag{4.29}$$

となる. (4.28), (4.29) を見比べると (4.27) が成り立つことは (4.24) が成り立つことと同値である. □

以上のようにして, アフィン型量子群とその表現を考えることで三角関数解を構成することができた.

注意. $\mathcal{R}$ の具体的な形は (7.2) で参照できる. $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2(\mathbb{C}))$ の普遍 R 行列 $\mathcal{R}$ の $\pi_z\otimes\pi_w$ による像を求めることで三角関数解を直接出すことができる. 計算は大変であるが, 命題 7.7 を参照せよ.

5　有限次元ホップ代数の量子二重構成法

ここでは $H=(H,m_H,u_H,\Delta_H,\epsilon_H,S_H)$ を体 k 上の有限次元ホップ代数とする．さらに, H の対合射 S_H は可逆と仮定する．

5.1　双対空間の構造

命題 2.6 で見たように H の双対空間 $H^*=\mathrm{Hom}(H,k)$ は,

$$m_{H^*}={}^t\Delta_H,\quad \Delta_{H^*}={}^tm_H,\quad u_{H^*}={}^t\epsilon_H,\quad \epsilon_{H^*}={}^tu_H,\quad S_{H^*}={}^tS_H$$

と定めることでホップ代数 $H^*=(H^*,m_{H^*},u_{H^*},\Delta_{H^*},\epsilon_{H^{ast}},S_{H^*})$ の構造が入る．

注意. τ をテンソル積の成分の互換 $\tau(x\otimes y)=y\otimes x$ とする．H^* の余代数の構造を $\Delta_{H^*}^{\mathrm{opp}}:=\tau\Delta_{H^*}$ で定めると ${}^tS^{-1}$ を対合射とするホップ代数となる．この構造が入ったものを $(H^*)^{\mathrm{opp}}$ と書くことにする．

5.2　記号法の準備

ここで一般の余代数 (C,Δ,ϵ) の余積に関する Sweedler の記号法を導入する．合成写像

$$C\xrightarrow{\Delta}C\otimes C\xrightarrow{\Delta\otimes\mathrm{id}}C\otimes C\otimes C\xrightarrow{\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}}\cdots\longrightarrow C^{\otimes n}$$

を $\Delta^{(n-1)}$ とおく．たとえば, $\Delta^{(1)}=\Delta,\ \Delta^{(2)}=(\Delta\otimes 1)\circ\Delta,\Delta^{(3)}=(\Delta\otimes 1\otimes 1)\circ(\Delta\otimes 1)\circ\Delta$ などのように定める．余結合律を要請することで途中の写像 $\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\mathrm{id}$ を $\mathrm{id}\otimes\cdots\otimes\Delta\otimes\ldots\mathrm{id}$ と置き換えてもよい．$c\in C$ の $\Delta^{(n-1)}$ による像を

$$\Delta^{(n-1)}(c)=\sum_{(c)_{n-1}}c_{(0)}\otimes c_{(1)}\otimes\ldots\otimes c_{(n-1)}\tag{5.1}$$

と置くことにする．例えば

$$\Delta(c)=\sum_{(c)_1}c_{(0)}\otimes c_{(1)},\quad \Delta^{(2)}(c)=\sum_{(c)_2}c_{(0)}\otimes c_{(1)}\otimes c_{(2)}$$

のように表記する．

5.3　$D=H\otimes H^*$ の代数構造

ここではベクトル空間 $D:=H\otimes H^*$ に代数構造をいれることを考える．得られる D はホップ代数 H を「二重にしたもの」の意味で量子二重化 (quantum double) とよばれる．テンソル空間の元 $h\otimes\xi\in H\otimes H^*$ を代数構造が入った D の元とみなすとき $[h\otimes\xi]$ と書くことにする．

命題 5.1. ベクトル空間 $D:=H\otimes H^*$ は, 次で定義する $m_D:D\otimes D\to D$ によって代数をなす．

$$m_D([h\otimes\xi]\otimes[h'\otimes\xi'])=\sum_{(h')_2,(\xi)_2}\langle\xi_{(0)},h'_{(2)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(2)}),h'_{(0)}\rangle[hh'_{(1)}\otimes\xi_{(1)}\xi'].\tag{5.2}$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle:H\otimes H^*\to k$ は自然なペアリング $\langle h,\xi\rangle=\xi(h)$ のことである．

単位元は $[1\otimes 1]$ であって, 次が成り立つ．

(1) $H \simeq H \otimes 1 \hookrightarrow D$ は代数射,

(2) $H^* \simeq 1 \otimes H^* \hookrightarrow D$ は代数射,

(3) $[h \otimes 1] = [1 \otimes \xi]$,

(4) $[1 \otimes \xi] \cdot [h \otimes 1] = \sum_{(h)_2,(\xi)_2} \langle \xi_{(0)}, h_{(2)} \rangle \langle S^{-1}(\xi_{(2)}), h_{(0)} \rangle [h_(1) \otimes \xi]$.

証明. 結合律の確認を行う. $h, h', h'' \in H,\ \xi, \xi'\xi'' \in H^*$ について

$$[h \otimes \xi]([h' \otimes \xi'][h'', \xi'']) = ([h \otimes \xi][h' \otimes \xi'])\, [h'', \xi''] \tag{5.3}$$

をしめせばよい.
$[h \otimes \xi]([h' \otimes \xi'][h'', \xi''])$ の計算:

$$\begin{aligned}
&[h \otimes \xi]([h' \otimes \xi'][h'', \xi'']) \\
=&[h \otimes \xi] \sum_{(h'')_2,(\xi')_2} \langle \xi_{(0)}, h''_{(2)} \rangle \langle S^{-1}(\xi'_{(2)}, h''_{(0)} \rangle [h' h''_{(1)} \otimes \xi'_{(1)} \xi''].
\end{aligned}$$

ここで $\sum_{(h' h''_{(1)})_2} = \sum_{(h')_2,(h''_{(1)})_2}$ と $\sum_{(h'')_4} = \sum_{(h'')_2,(h''_{(1)})_2}$ に注意する.

$$\begin{aligned}
\Delta^{(4)}(h'') &= \sum_{(h)_4} h''_{(0)} \otimes h''_{(1)} \otimes h''_{(2)} \otimes h''_{(3)} \otimes h''_{(4)}, \\
\Delta^{(4)}(h'') &= (\mathrm{id} \otimes \Delta^{(2)} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta^{(2)}(h'') \\
&= \sum_{(h'')_2} h''_{(0)} \otimes \Delta^{(2)}(h''_{(1)}) \otimes h''_{(2)} \\
&= \sum_{(h'')_2} \sum_{(h''_{(1)})_2} h''_{(0)} \otimes h''_{(1)(0)} \otimes h''_{(1)(1)} \otimes h''_{(1)(2)} \otimes h''_{(2)}
\end{aligned}$$

という対応で

$$\begin{aligned}
&[h \otimes \xi]([h' \otimes \xi'][h'', \xi'']) \\
=& \sum_{\substack{(h'')_4,\ (\xi')_2 \\ (\xi)_2,\ (h')_2}} \langle \xi'_{(0)}, h''_{(4)} \rangle \langle S^{-1}(\xi'_{(2)}), h''_{(0)} \rangle \langle \xi'_{(0)}, h'_{(2)} h''_{(3)} \rangle \langle S^{-1}(\xi_{(2)}), h'_0 h''_{(1)} \rangle [h h'_{(1)} h''_{(2)} \otimes \xi_{(1)} \xi'_{(1)} \xi''].
\end{aligned}$$

ところで, 一般に $h, k \in H,\ \xi \in H^*$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \xi, hk \rangle &= \langle \xi, m(h \otimes k) \rangle \\
&= \langle \Delta(\xi), h \otimes k \rangle \\
&= \sum_{(\xi)} \langle \xi_{(0)}, h \rangle \langle \xi_{(1)}, k \rangle, \\
\langle S^{-1}(\xi), hk \rangle &= \langle \Delta \circ S^{-1}(\xi), h \otimes k \rangle \\
&= \langle \tau \circ (S^{-1} \otimes S^{-1}) \circ \Delta(\xi), h \otimes k \rangle \\
&= \sum_{(\xi)_1} \langle S^{-1}(\xi_{(1)}), h \rangle \langle S^{-1}(\xi_{(0)}), k \rangle
\end{aligned}$$

によって

$$\langle \xi'_{(0)}, h'_{(2)}h''_{(3)}\rangle = \sum_{(\xi_{(0)})_1} \langle \xi_{(0)(0)}, h'_{(2)}\rangle\langle \xi_{(0)(1)}, h''_{(3)}\rangle,$$

$$\langle S^{-1}(\xi_{(2)}), h'_0 h''_{(1)}\rangle = \sum_{(\xi_{(2)})_1} \langle S^{-1}(\xi_{(2)(1)}), h_{(0)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(2)(0)}), h''_{(1)}\rangle$$

となる．さらに

$$\begin{aligned}
\Delta^{(5)}(\xi) &= \sum_{(\xi_4)} \xi_{(0)} \otimes \xi_{(1)} \otimes \xi_{(2)} \otimes \xi_{(3)} \otimes \xi_{(4)} \otimes \xi_{(5)}, \\
\Delta^{(5)}(\xi) &= (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta^{(3)}(\xi) \\
&= \sum_{(\xi)_2} \Delta(\xi_{(0)}) \otimes \xi_{(1)} \otimes (\Delta(\xi_{(2)}) \otimes \xi_{(3)} \\
&= \sum_{(\xi)_2, (\xi_{(0)})_1, (\xi_{(2)})_1} \xi_{(0)(0)} \otimes \xi_{(0)(1)}\xi_{(1)} \otimes \xi_{(2)(0)} \otimes \xi_{(2)(1)} \otimes \xi_{(3)}
\end{aligned}$$

という対応で

$$\begin{aligned}
&[h\otimes\xi]([h'\otimes\xi'][h'',\xi'']) \\
= &\sum_{\substack{(h'')_4,\ (\xi')_2 \\ (\xi)_2,\ (h')_2}} \langle \xi'_{(0)}, h''_{(4)}\rangle\langle S^{-1}(\xi'_{(2)}), h''_{(0)}\rangle\langle \xi'_{(0)}, h'_{(2)}h''_{(3)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(2)}), h'_0 h''_{(1)}\rangle \\
&\qquad\qquad \times [hh'_{(1)}h''_{(2)} \otimes \xi_{(1)}\xi'_{(1)}\xi''] \\
= &\sum_{\substack{(h'')_4,\ (\xi')_2 \\ (\xi)_2,\ (h')_2}} \langle \xi'_{(0)}, h''_{(4)}\rangle\langle S^{-1}(\xi'_{(2)}), h''_{(0)}\rangle\langle \xi_{(0)}, h'_{(2)}\rangle\langle \xi_{(1)}, h''_{(3)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(4)}), h'_0\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(3)}), h''_1\rangle \\
&\qquad\qquad \times [hh'_{(1)}h''_{(2)} \otimes \xi_{(2)}\xi'_{(1)}\xi''].
\end{aligned}$$

<u>$([h\otimes\xi][h'\otimes\xi'])\,[h'',\xi'']$ の計算:</u>

$$\begin{aligned}
&([h\otimes\xi][h'\otimes\xi'])\,[h'',\xi''] \\
= &\sum_{\substack{(h')_2,\ (\xi)_2 \\ (\xi_{(1)})_2, (\xi')_2,\ (h'')_2}} \langle \xi_{(0)}, h'_{(2)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(2)}), h'_{(0)}\rangle\langle \xi_{(1)(0)}\xi'_{(0)}, h''_{(2)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(1)(2)}\xi'_{(2)}), h''_{(0)}\rangle \\
&\qquad\qquad \times [hh'_{(1)}h''_{(1)} \otimes \xi_{(1)(1)}\xi'_{(1)}\xi''].
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\Delta^{(4)}(\xi) &= \sum_{(\xi)_4} \xi_{(0)} \otimes \xi_{(1)} \otimes \xi_{(2)} \otimes \xi_{(3)} \otimes \xi_{(4)} \\
\Delta^{(4)}(\xi) &= (\mathrm{id} \otimes \Delta^{(2)} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta^{(2)} \\
&= \sum_{(\xi)_2, (\xi_{(1)})_2} \xi_{(0)} \otimes \xi_{(1)(0)} \otimes \xi_{(1)(1)} \otimes \xi_{(1)(2)} \otimes \xi_{(2)}
\end{aligned}$$

という対応に注意すると

$$
\begin{aligned}
&([h\otimes\xi][h'\otimes\xi'])\,[h'',\xi''] \\
=&\sum_{\substack{(h')_2,\ (\xi)_4\\(\xi')_2,\ (h'')_2}}\langle\xi_{(0)},h'_{(2)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(4)}),h'_{(0)}\rangle\langle\xi_{(1)}\xi'_{(0)},h''_{(2)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(3)}\xi'_{(2)}),h''_{(0)}\rangle[hh'_{(1)}h''_{(1)}\otimes\xi_{(2)}\xi'_{(1)}\xi''].
\end{aligned}
$$

一般に $h\in H,\eta,\xi\in H^*$ について

$$
\begin{aligned}
\langle\xi\eta,h\rangle&=\langle\xi\otimes\eta,\Delta(h)\rangle=\sum_{(h)_1}\langle\xi,h_{(0)}\rangle\langle\eta,h_{(1)}\rangle,\\
\langle S^{-1}(\xi\eta),h\rangle&=\langle m\circ(S^{-1}\otimes S^{-1})\circ\tau(\xi\eta),h\rangle\\
&=\langle S^{-1}\otimes S^{-1})\circ\tau(\xi\otimes\eta),\Delta(h)\rangle=\sum_{(h)_1}\langle\xi,h_{(1)}\rangle\langle\eta,h_{(0)}\rangle
\end{aligned}
$$

となる．このことから

$$
\begin{aligned}
\langle\xi_{(1)}\xi'_{(0)},h''_{(2)}\rangle&=\sum_{(h''_{(2)})_1}\langle\xi_{(1)},h_{(2)(0)}\rangle\langle\xi_{(0)},h''_{(2)(1)}\rangle\\
\langle S^{-1}(\xi_{(3)}\xi'_{(2)}),h''_{(0)}\rangle&=\sum_{(h''_{(0)})_1}\langle S^{-1}(\xi_{(3)}),h''_{(0)(1)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(2)}),h''_{(0)(0)}\rangle
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
\Delta^{(5)}(h)&=\sum_{(h)_4}h_{(0)}\otimes h_{(1)}\otimes h_{(2)}\otimes h_{(3)}\otimes h_{(4)}\otimes h_{(5)},\\
\Delta^{(5)}(h)&=(\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta^{(3)}\\
&=\sum_{(h''_{(2)})_1,\ (h_{(0)})''_1}h''_{(0)(0)}\otimes h''_{(0)(1)}\otimes h''_{(1)}\otimes h''_{(2)(0)}\otimes h''_{(2)(1)}\otimes h''_{(3)}
\end{aligned}
$$

という対応によって，

$$
\begin{aligned}
&([h\otimes\xi][h'\otimes\xi'])\,[h'',\xi''] \\
=&\sum_{\substack{(h')_2,\ (\xi)_4\\(\xi')_2,\ (h'')_2}}\langle\xi_{(0)},h'_{(2)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(4)}),h'_{(0)}\rangle\langle\xi_{(1)}\xi'_{(0)},h''_{(2)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(3)}\xi'_{(2)}),h''_{(0)}\rangle[hh'_{(1)}h''_{(1)}\otimes\xi_{(2)}\xi'_{(1)}\xi'']\\
=&\sum_{\substack{(h')_2,\ (\xi)_4\\(\xi')_2,\ (h'')_2}}\langle\xi_{(0)},h'_{(2)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(4)}),h'_{(0)}\rangle\langle\xi_{(1)},h''_{(3)}\rangle\langle\xi_{(0)},h''_{(4)}\rangle\langle S^{-1}(\xi'_{(2)}),h''_{(0)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(3)}),h''_{(1)}\rangle\\
&\qquad\times[hh'_{(1)}h''_{(2)}\otimes\xi_{(2)}\xi'_{(1)}\xi'']\\
=&\sum_{\substack{(h')_2,\ (\xi)_4\\(\xi')_2,\ (h'')_2}}\langle\xi_{(0)},h''_{(4)}\rangle\langle S^{-1}(\xi'_{(2)}),h''_{(0)}\rangle\langle\xi_{(0)},h'_{(2)}\rangle\langle\xi_{(1)},h''_{(3)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(4)}),h'_{(0)}\rangle\langle S^{-1}(\xi_{(3)}),h''_{(1)}\rangle\\
&\qquad\times[hh'_{(1)}h''_{(2)}\otimes\xi_{(2)}\xi'_{(1)}\xi'']\\
=&[h\otimes\xi]\otimes([h'\otimes\xi']\otimes[h''\otimes\xi''])\,.
\end{aligned}
$$

以上から結合律が成立することが分かった．$[1\otimes 1]\in D$ が単位元になることをみる．

$$
\langle 1,h_{(2)}\rangle=\epsilon(h_{(2)}),\quad\langle S^{-1}(1),h_{(0)}\rangle=\langle 1,h_{(0)}\rangle=\epsilon(h_{(0)})
$$

から

$$[1 \otimes 1][h \otimes \xi] = \sum_{(h)_2} \langle 1, h_{(2)} \rangle \langle S^{-1}(1), h_{(0)} \rangle [h_{(1)} \otimes \xi] = \left[\sum_{(h)_2} \epsilon(h_{(0)}) \epsilon(h_{(2)}) h_{(1)} \otimes \xi \right]$$

となることから従う．ここで, 余単位射の性質 $(\epsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(h) = (\mathrm{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta(h)$ を用いることで

$$\sum_{(h)_2} \epsilon(h_{(0)}) \epsilon(h_{(2)}) h_{(1)} = \sum_{(h)_2} \epsilon(h_{(0)}) (1 \otimes \epsilon) \circ \Delta(h_{(1)}) = \sum_{(h)_1} \epsilon(h_{(0)}) h_{(1)} = (\epsilon \otimes 1) \circ \Delta(h) = h.$$

よって $[1 \otimes 1][h \otimes \xi] = [h \otimes \xi]$ が示すことができた．$[h \otimes \xi][1 \otimes 1] = [h \otimes \xi]$ も同様に示すことができる． □

5.4　$D = H \otimes H^*$ のホップ代数の構造

命題 5.2. 代数 D は, 次のようにして余積 $\Delta_D : D \to D \otimes D$, 余単位射, $\epsilon_D : D \to k$, 対合射 $S_D : D \to D$ を定めることで, ホップ代数となる．$h \in H, \xi \in H^*$ に対して

(1) $\Delta_D([h \otimes \xi]) = \sum_{(h)_1, (\xi)_1} [h_{(0)} \otimes \xi_{(1)}] \otimes [h_{(1)} \otimes \xi_{(0)}]$,

(2) $\epsilon_D([h \otimes \xi]) = \epsilon(h) \epsilon(\xi)$,

(3) $S_D([h \otimes \xi]) = [1 \otimes S^{-1}(\xi)][S(h) \otimes 1]$.

注意. $\Delta_D|_H = \Delta_H$ および $\Delta_D|_{H^*} = \Delta_D|_{(H^*)^{\mathrm{opp}}}$ が成り立つ.

ここでは 余積, 余単位射 が代数射ということ, S_D が対合射であることを確認する.

注意. 証明をするにあたって今まではテンソル空間の元 $h \otimes \xi \in H \otimes H^*$ を代数の元としてみなすときは $[h \otimes \xi] \in D$ と書いていた．$\{e_i\}_{i \in I}$ を H の基底, $\{e^i\}_{i \in I}$ を H^* の基底とする．以降では $[e_i \otimes 1]$ などの H の元どうしの積, または $[1 \otimes e^i]$ などの H^* の元どうしの積を扱うので $e_i := [e_i \otimes 1]$, $e^i = [1 \otimes e^i]$ と略記する.

補題 5.3. $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ を H の基底とする．e_α と e_β の積が

$$e_\alpha e_\beta = \sum_\gamma m_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma \tag{5.4}$$

で与えられ, e_α の余積の像が

$$\Delta(e_\gamma) = \sum_\gamma \mu_\gamma^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta \tag{5.5}$$

で与えられるとする．このとき, $\{e_\alpha\}$ の双対基底 $\{e^\alpha\}$ において

$$e^\alpha e^\beta = \sum_\gamma \mu_\gamma^{\alpha\beta} e^\gamma, \tag{5.6}$$

$$\Delta(e^\alpha) = \sum_{\beta,\gamma} m_{\beta\gamma}^\alpha e^\beta \otimes e^\gamma \tag{5.7}$$

が成り立つ.

証明.

$$e^\alpha e^\beta = \sum_\gamma M_\gamma^{\alpha\beta} e^\beta \otimes e^\gamma,$$
$$\Delta(e^\alpha) = \sum_\gamma \Delta_{\beta\gamma}^\alpha e^\beta \otimes e^\gamma$$

とする．

$$\begin{aligned}
M_\gamma^{\alpha\beta} &= \langle e^\alpha e^\beta, \gamma\rangle \\
&= \langle e^\alpha \otimes e^\beta, \Delta(\gamma)\rangle \\
&= \sum_{\lambda,\nu} \langle e^\alpha \otimes e^\beta, \mu_\gamma^{\lambda\nu} e_\lambda \otimes e_\nu\rangle \\
&= \sum_{\lambda,\nu} \mu_\gamma^{\lambda,\nu} \langle e^\alpha, e_\lambda\rangle\langle e^\beta, e_\nu\rangle = \mu_\gamma^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

これから (5.6) が示された．また

$$\begin{aligned}
\Delta_{\beta\gamma}^\alpha &= \langle \Delta e^\alpha, e_\beta \otimes e_\gamma\rangle \\
&= \langle e^\alpha, m(e_\beta \otimes e_\gamma)\rangle \\
&= \sum_\delta m_{\beta\gamma}^\delta \langle e^\alpha, e_\delta\rangle \\
&= m_{\beta\gamma}^\alpha.
\end{aligned}$$

以上から (5.7) が示された． □

注意. $m_{rst}^\alpha, \mu_\beta^{uvr}$ を各々 $\langle e^\alpha, e_r e_s e_t\rangle, \mu_\beta^{uvr} = \langle \Delta^{(2)}(e^\beta), e^u \otimes e^v \otimes e^r\rangle$ で定める．m, μ の添え字が増えたものも以下同様に定義される．

補題 5.4. 対合射の逆像が $S^{-1}(e^k) = \sum_t \sigma_t^k e^t \quad k \in I$ となっているとする．このとき，

$$m_D(e^\alpha e_\beta) = \sum_{r,s,t,u,v} m_{rst}^\alpha \mu_\beta^{uvr} \sigma_u^t e_v e^s, \tag{5.8}$$
$$\Delta(e_\alpha e^\beta) = \sum_{r,s,u,v} \mu_\alpha^{rs} m_{uv}^\beta e_r e^v \otimes e_s e^u. \tag{5.9}$$

証明. 式 (5.9) は Δ_D の定義を書き換えたものに他ならない．式 (5.8) の証明は次の通り．

$$\begin{aligned}
&m_D(e^\alpha e_\beta) \\
&= \sum_{(e^\alpha)_2,(e_\beta)_2} \langle (e^\alpha)_{(0)}, (e_\beta)_{(2)}\rangle \langle S^{-1}((e^\alpha)_{(2)}), (e_\beta)_{(0)}\rangle [(e_\beta)_{(1)} \otimes (e^\alpha)_{(1)}] \\
&= \sum_{r,s,t,u,v,w} m_{rst}^\alpha \mu_\beta^{uvw} \langle e^r, e_w\rangle \langle S^{-1}(e^t), e_u\rangle e_v e^s \\
&= \sum_{r,s,t,u,v,w} m_{rst}^\alpha \mu_\beta^{uvw} \sigma_k^t \langle e^r, e_w\rangle \langle e^k, e_u\rangle e_v e^s \\
&= \sum_{r,s,t,u,v} m_{rst}^\alpha \mu_\beta^{uvr} \sigma_u^t e_v e^s.
\end{aligned}$$

□

(1) Δ_D が代数射であること:

$$\Delta(e^\alpha e_\beta) = \Delta(e^\alpha)\Delta(e_\beta) \tag{5.10}$$

を確認すれば十分である. まず右辺を計算する.

$$\begin{aligned}\Delta(e^\alpha)\Delta(e_\beta) &= \left(\sum_{ij} m^\alpha_{ij} e^j \otimes e^i\right)\left(\sum_{p,q} \mu^{pq}_\beta e_p \otimes e_q\right) \\ &= \sum_{i,j,p,q} m^\alpha_{ij}\mu^{pq}_\beta e^j e_p \otimes e^i e_q\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}e^j e_p &= \sum_{r,s,t,u,v} m^j_{rst}\mu^{uvr}_p \sigma^t_u e_v e^s, \\ e^i e_q &= \sum_{a,b,c,x,y} m^i_{abc}\mu^{xya}_q \sigma^c_x e_y e^b\end{aligned}$$

と展開して積の結合律, 余積の余結合律を用いることで

$$\begin{aligned}\Delta(e^\alpha)\Delta(e_\beta) &= \sum_{\substack{i,\,j,\,a,\,b,\,c,\,p,\,q,\\ r,\,s,\,t,\,u,\,v,\,x,\,y}} m^\alpha_{ij} m^j_{rst} m^i_{abc} \mu^{pq}_\beta \mu^{uvr}_p \mu^{xya}_q \sigma^t_u \sigma^c_x e_v e^s \otimes e_y e^b \\ &= \sum_{\substack{a,\,b,\,c,\\ r,\,s,\,t,\,u,\,v,\,x,\,y}} m^\alpha_{abcrst} \mu^{uvrxya}_\beta \sigma^t_u \sigma^c_x e_v e^s \otimes e_y e^b \\ &= \sum_{\substack{a,\,b,\,s,\,t,\\ u,\,v,\,y}} m^\alpha_{abst} \sigma^t_u \mu^{uvya}_\beta e_v e^s \otimes e_y e^b\end{aligned}$$

とまとまる. 最後の等式は以下で述べる補題を用いる.

補題 5.5. $\epsilon_k := \epsilon_H(e_k) \in k, \quad 1 = \sum_l E^l e_l \quad (E_l \in k,\ l \in I)$ とすれば

$$\sum_{i,j,t} \mu^{ij}_k \sigma^t_j m^l_{ti} = \epsilon_k E_l, \tag{5.11}$$

$$\sum_l E^l m^\alpha_{lij} = m^\alpha_{ij}, \quad \sum_k \mu^{ijk}_\alpha \epsilon_k = \mu^{ij}_\alpha \quad (i, j, \alpha \in I). \tag{5.12}$$

証明. $\sum_{i,j,t} \mu^{ij}_k \sigma^t_j m^l_{ti} = \epsilon_k E_l$ について:

$$\begin{aligned}m \circ (S^{-1} \otimes 1) \circ \Delta^{\mathrm{opp}}(e_k) =& m\left(\sum_{i,j} \mu^{ij}_k S^{-1}(e_j) \otimes e_i\right) \\ =& \sum_{i,j,t,l} \mu^{ij}_k \sigma^t_j m^l_{ti} e_l.\end{aligned}$$

一方で,

$$u \circ \epsilon(e_k) = \epsilon_k u(1) = \epsilon_k \sum_l E^l e_l$$

だから

$$\sum_{i,j} \mu^{ij}_k \sigma^t_j m^l_{ti} = \epsilon_k E^l.$$

$\underline{\sum_l E^l m^\alpha_{lij} = m^\alpha_{ij}}$ <u>について:</u>

$$1_H e_i e_j = \left(\sum_l E^l e_l\right)\left(\sum_q m^q_{ij} e_q\right) = \sum_{l,q,\alpha} E^l m^q_{ij} m^\alpha_{lq} e_\alpha = \sum_{l,\alpha} E^l m^\alpha_{lij} e_\alpha$$

と

$$e_i e_j = \sum_\alpha m^\alpha_{ij} e_\alpha$$

によって両辺を比べることで示したい式が得られる.

$\underline{\sum_k \mu^{ijk}_\alpha \epsilon_k = \mu^{ij}_\alpha \quad (i,j,\alpha \in I)}$ <u>について:</u>

余単位律から得られる等式

$$\Delta(e_k) = \sum_{jk} \mu_\alpha e_j \otimes e_k,$$
$$\Delta(e_k) = (\epsilon \otimes 1 \otimes 1) \circ \Delta^{(2)}(e_\alpha) = \sum_{i,j,k} \epsilon(e_i) \mu^{ijk}_\alpha e_j \otimes e_k$$

から

$$\sum_i \epsilon_i \mu^{ijk}_\alpha = \mu^{jk}_\alpha$$

を得る. □

さて, 上記の補題 5.5 によって

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a,b,c,p,q,\\ r,s,t,x,y}} m^\alpha_{abcrst} \mu^{uvrxya}_\beta \sigma^c_x \\
&= \sum_{\substack{a,b,c,i,j,k,l,\\ p,q,r,s,t,x,y}} \mu^{iya}_\beta \mu^{uvj}_i \mu^{rx}_j \sigma^c_x m^k_{cr} m^l_{kst} m^\alpha_{abl} \\
&= \sum_{\substack{a,b,i,j,k,l,\\ p,q,s,t,y}} \mu^{iya}_\beta \mu^{uvj}_i \epsilon_j E^k m^l_{kst} m^\alpha_{abl} \\
&= \sum_{\substack{a,b,i,k,l,\\ p,q,s,t,y}} \mu^{iya}_\beta \mu^{uv}_i m^l_{st} m^\alpha_{abl} \\
&= \sum_{\substack{a,b,s,t,\\ u,v,y}} \mu^{uvya}_\beta m^\alpha_{abst}
\end{aligned}$$

を示すことができたので,

$$\Delta(e^\alpha)\Delta(e_\beta) = \sum m^\alpha_{abst} \sigma^t_u \mu^{uvya}_\beta e_v \otimes e^s \otimes e_y e^b \tag{5.13}$$

がわかった. 一方で $\Delta(e^\alpha e_\beta)$ を計算すると

$$\sum_j m^\alpha_{ijk} m^j_{zw} = \sum_{j,r}, m^\alpha_{ir} m^r_{jk} m^j_{zw} = \sum_r m^\alpha_{ir} m^r_{zwk} = m^\alpha_{izwk},$$
$$\sum_q \mu^{pqi}_\beta \mu^{xy}_q = \sum_{q,s} \mu^{ps}_\beta \mu^{qi}_s \mu^{xy}_q = \sum_s \mu^{ps}_\beta \mu^{xyi}_s = \mu^{pxyi}_\beta$$

などから

$$\begin{aligned}\Delta(e^\alpha e_\beta) &= \sum_{\substack{i,\,j,\,k,\,p,\,q,\\ x,\,y,\,z,\,w}} m^\alpha_{i,j,k}\mu^{pqi}_\beta \sigma^k_p \mu^{xy}_q m^j_{zw} e_x e^w \otimes e_y e^z \\ &= \sum_{\substack{i,\,k,\,p,\,q,\,r,\\ x,\,y,\,z,\,w}} m^\alpha_{izwk}\sigma^k_p \mu^{pxyi}_\beta e_r e^w \otimes e_y e^z \\ &= \sum_{\substack{a,\,b,\,s,\,t,\\ u,\,v,\,y}} m^\alpha_{abst}\sigma^t_u \mu^{uvya}_\beta e_v e^s \otimes e_y e^b\end{aligned}$$

となる．最後の等式は

$$z \mapsto b, \quad i \mapsto a, \quad x \mapsto v, \quad k \mapsto t, \quad w \mapsto s, \quad p \mapsto u,$$

と和の走るパラメータを変更する．以上から

$$\Delta(e^\alpha e_\beta) = \Delta(e^\alpha)\Delta(e_\beta)$$

が従う．

<u>(2) $\epsilon_D([h\otimes\xi]) = \epsilon_H(h)\epsilon_{H^*}(\xi)$ が代数射を与えることについて:</u>

$$\epsilon_D(e^\alpha e_\beta) = \epsilon_D(e^\alpha)\epsilon_D(e_\beta) \quad \alpha, \beta \in I$$

を確認すればよい．

証明. 実際,

$$\begin{aligned}&\epsilon(e_v) = \epsilon_v, \quad \epsilon(e^s) = E^s, \\ &m^\alpha_{rst}E^s = \sum_a m^a_{rs}E^s m^\alpha_{at} = \sum_a \delta_{ra} m^\alpha_{at} = m^\alpha_{rt}, \\ &\mu^{uvr}_\beta \epsilon_v = \sum_b \mu^{uv}_b \epsilon_v \mu^{br}_\beta = \mu^{ur}_\beta\end{aligned}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}\epsilon_D\left(\sum_{r,s,t,u,v} m^\alpha_{rst}\mu^{uvr}_\beta \sigma^t_y e_v e^s\right) &= \sum_{r,s,t,u,v} m^\alpha_{rst}\mu^{uvr}_\beta \sigma^t_y \epsilon_v E^s \\ &= \sum_{r,s,t,u,v} m^\alpha_{rt}\mu^{ur}_\beta \sigma^t_u \qquad (5.14) \\ &= E^\alpha \epsilon_\beta = \epsilon_D(e^\alpha)\epsilon_D(e_\beta).\end{aligned}$$

最後から 2 番目の式 (5.14) は

$$\sum_\alpha m^\alpha_{rt}\sigma^t_u \mu^{ur}_\beta e_\alpha = m\circ(S^{-1}\otimes \mathrm{id})(e_\beta) = (u\circ\epsilon)(e_\beta) = \epsilon_\beta \sum_\alpha E^\alpha e_\alpha$$

から従う． □

<u>(3) S_D が対合射であることについて:</u>

$$m\circ(\mathrm{id}\otimes S)\circ\Delta([h\otimes\xi]) = u\circ\epsilon([h\otimes\xi]) = m\circ(S\otimes\mathrm{id})\circ\Delta([h\otimes\xi])$$

を示せばよい. 実際,

$$
\begin{aligned}
&m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta([h \otimes \xi]) \\
=&m \left(\sum_{(h)_1, (\xi)_1} [h_{(0)} \otimes \xi_{(1)}] \otimes S([h_{(1)} \otimes \xi_{(0)}]) \right) \\
=&\sum_{(h)_1} [h_{(0)} \otimes 1] \left(\sum_{(\xi)_1} [1 \otimes \xi_{(1)} S^{-1}(\xi_{(0)})] \right) [S(h_{(1)}) \otimes 1] \\
=&\epsilon(\xi) \sum_{(h)_1} [h_{(0)} S(h_{(1)} \otimes 1] = u \circ \epsilon([h \otimes \xi]).
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(\xi)_1} [1 \otimes \xi_{(1)} S^{-1}(\xi_{(0)})] = [1 \otimes u \circ \epsilon(\xi)] = \epsilon(\xi)[1 \otimes 1], \\
&\sum_{(h)_1} [h_{(0)} S(h_{(1)}) \otimes 1] = [u \circ \epsilon(h) \otimes 1] = \epsilon(h)[1 \otimes 1]
\end{aligned}
$$

を用いた.

$$
m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta([h \otimes \xi]) = u \circ \epsilon([h \otimes \xi])
$$

についても同様である.

5.5　有限次元ホップ代数の普遍 R 行列

定義 5.6. H を有限次元ホップ代数とする. H の基底 $\{e_i\}_{i \in I}$ を固定する. それに対する H^* の双対基底を $\{e^i\}$ と置くことにする. このとき $H \otimes H^*$ の標準元 (canonical element) を $D \otimes D$ に埋め込んで得られる元を

$$
\mathcal{R} = \sum_i [e_i \otimes 1] \otimes [1 \otimes e^i]
$$

とおく.

命題 5.7. $(D, \mathcal{R})$ は準三角ホップ代数である. すなわち, $\mathcal{R}$ は可逆で次を満たす.

$$
\begin{aligned}
&\tau \circ \Delta_D(d)\mathcal{R} = \mathcal{R}\Delta_D(d), \quad d \in D \\
&(\Delta_D \otimes 1)(\mathcal{R}) = R_{13}\mathcal{R}_{23}, \\
&(1 \otimes \Delta_D)(\mathcal{R}) = R_{13}\mathcal{R}_{12}.
\end{aligned}
$$

注意. $\tau : x \otimes y \mapsto y \otimes x$. ここでは, $e_i := [e_i \otimes 1]$, $e^i = [1 \otimes e^i]$ と略記する.

証明. $\tau\Delta_D(d) = \mathcal{R}\Delta_D(d)$ について $d = e_\alpha e^\beta$ の場合にいえばよい.

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\Delta(e_\alpha e^\beta) =& \mathcal{R}\Delta(e_\alpha)\Delta(e^\beta) \\
=& \left(\sum_k e_k \otimes e^k\right)\left(\sum_{pq} \mu_\alpha^{pq} e_p \otimes e_q\right)\left(\sum_{i,j} m_{ij}^\beta e^j \otimes e^i\right) \\
=& \sum_{i,j,k,p,q} m_{ij}^\beta \mu_\alpha^{pq} e_k e_p e^j \otimes e^k e_q e^i \\
=& \sum_{i,j,k,p,q,r,s,t,u,v} m_{ij}^\beta m_{kp}^l m_{rst}^k \sigma_u^t \mu_\alpha^{pq} \mu_q^{uvr} \mu_w^{si} e_l e^j \otimes e_v e^w \\
=& \sum m_{ij}^\beta m_{rstp}^l \sigma_u^t \mu_\alpha^{puvr} \mu_w^{si} e_l e^j \otimes e_v e^w \\
=& \sum m_{ij}^\beta m_{rsa}^l m_{tp}^a \sigma_u^t \mu_b^{pu} \mu_\alpha^{bvr} \mu_w^{si} e_l e^j \otimes e_v e^w \\
=& \sum m_{ij}^\beta m_{rsa}^l E^a \epsilon_b \mu_\alpha^{bvr} \mu_w^{si} e_l e^j \otimes e_v e^w \\
=& \sum m_{ij}^\beta m_{rs}^l \mu_\alpha^{vr} \mu_w^{si} e_l e^j \otimes e_v e^w \\
&.
\end{aligned}$$

一方で, $\Delta' = \tau \circ \Delta$ と置いたとき

$$\begin{aligned}
\Delta'(e_\alpha e^\beta)\mathcal{R} =& \Delta'(e^\alpha)\Delta'(e^\beta)\mathcal{R} \\
=& \left(\sum_{pq} \mu_\alpha^{pq} e_q \otimes e_p\right)\left(\sum_{r,s} m_{rs}^\beta e^r \otimes e^s\right)\left(\sum_t e_t \otimes e^t\right) \\
=& \sum_{p,q,r,s,t} \mu_\alpha^{pq} m_{rs}^\beta e_q e^r e_t \otimes e_p e^s e^t
\end{aligned}$$

となるが,

$$\begin{aligned}
e^s e^t &= \sum_w \mu_w^{st} e^w, \\
e^r e_t &= \sum_{i,j,k,u,v} m_{ijk}^r \mu_t^{uvi} \sigma_u^t e_v e^j, \\
e_q e_v &= \sum_l m_{qv}^l e_l
\end{aligned}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}
\Delta'(e_\alpha e^\beta) &= \sum_{p,q,r,s,t} \mu_\alpha^{pq} m_{rs}^\beta e_q e^r e_t \otimes e_p e^s e^t \\
&= \sum_{i,j,k,p,q,r,s,t,u,v} \mu_\alpha^{pq} \mu_t^{uvi} \mu_w^{st} \sigma_u^k m_{rs}^\beta m_{ijk}^r m_{qv}^l e_l e^j \otimes e_p e^w \\
&= \sum_{i,j,k,p,q,r,s,t,u,v} \mu_\alpha^{pq} \mu_w^{suvi} \sigma_u^k m_{ijks}^\beta m_{qv}^l e_l e^j \otimes e_p e^w \\
&= \sum_{i,j,k,p,q,s,t,u,v} \mu_\alpha^{pq} \mu_w^{vi} m_{ij}^\beta m_{qv}^l e_l e^j \otimes e_p e^w \\
&= \sum_{i,j,p,q,t,v} m_{ij}^\beta m_{qv}^l \mu_\alpha^{pq} \mu_w^{vi} e_l e^j \otimes e_p e^w \\
&= \sum_{i,j,p,q,t,v} m_{ij}^\beta m_{rs}^l \mu_\alpha^{pr} \mu_w^{si} e_l e^s \otimes e_p e^w.
\end{aligned}$$

最後の式は $v \leftrightarrow s,\ q \leftrightarrow r$ と和のパラメータを入れかえた. さらに $p \leftrightarrow v$ とすれば $\mathcal{R}\Delta(e^{\alpha}e_{\beta})$ と一致する.
$\underline{(\Delta\otimes \mathrm{id})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{23}\ について:}$

$$\begin{aligned}
(\Delta\otimes \mathrm{id})(\mathcal{R}) &= \sum_i \Delta(e_i)\otimes e^i \\
&= \sum_i \sum_{j,k} \mu_i^{jk} e_j \otimes e_k \otimes e^i \\
&= \sum_{j,k}(e_j\otimes e_k)\otimes \left(\sum_i \mu_i^{jk} e^i\right) \\
&= \sum_{j,k}(e_j\otimes e_k)\otimes e^j e^k \\
&= \sum_j (e_j \otimes 1 \otimes e^j)\left(\sum_k 1\otimes e_k \otimes e^k\right) \\
&= \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}.
\end{aligned}$$

$(1\otimes \Delta_D)(\mathcal{R}) = R_{13}\mathcal{R}_{12}$ も同様に示すことができる.
$\underline{\mathcal{R}\ が可逆であることについて:}$
次を示せばよい:

$$(S\otimes \mathrm{id})(\mathcal{R}) = (\mathrm{id}\otimes S_D^{-1})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}\otimes S_D^{-1})(\mathcal{R})\mathcal{R} &= \left(\sum_i e_i \otimes S_D^{-1}(e^i)\right)\left(\sum_j e_j\otimes e^j\right) \\
&= \left(\sum_j e_j\otimes e^j\right)\sum_{i,j} e_i e_j \otimes S_{H^*}(e^i)e^j \\
&= \sum_k e_k \otimes \sum_{i,j} m_{ij}^k S_{H^*}(e^i)e^j.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} m_{ij}^k S_{H^*}(e^i)e^j =& S_{H^*}\left(\sum_{i,j} m_{ij}^k S^{-1}(e_j)e^i\right) \\
=& S_{H^*}\left(m_H \circ (S_{H^*}^{-1}\otimes \mathrm{id})\circ \Delta^{\mathrm{opp}}(e^k)\right) \\
=& S_{H^*}\left(\epsilon(e^k)1_{H^*}\right) = \langle e^k, 1_H\rangle 1_H
\end{aligned}$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}\otimes S_D^{-1})(\mathcal{R})\mathcal{R} =& \sum_k e_k \otimes \langle e^k, 1_H\rangle 1_H \\
=& \sum_k \langle e^k, 1_H\rangle e_k \otimes 1_{H^*} = 1_H \otimes 1_{H^*}.
\end{aligned}$$

同様に $\mathcal{R}\left(\mathrm{id}\otimes S_D^{-1}\right)(\mathcal{R}) = 1_H \otimes 1_{H^*}$ も示すことができる. □

5.6 普遍 R 行列の構成 ($U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の場合)

有限次元ホップ代数 H とその双対 H^* のテンソル積 $D = H \otimes H^*$ は準三角ホップ代数になることを示した. R 行列を得るためこの方法を D が $U = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のときに適用したい. ここでは $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は

$$\text{生成元}: X^+, \quad X^-, \quad H.$$
$$\text{関係式}: [H, X^+] = 2X^+, \quad [H, X^-] = -2X^-, \quad [X^+, X^-] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

で定まる代数 $k(q)$ 上の代数とする. ただし, $K = q^H$ とし, $q = \exp(\hbar)$ とする. 定義 2.17 との違いは生成元を K でとるか $K = q^H$ なる H で取るかの違いだけである. H の余積, 余単位射, 対合射の像は各々次で定める:

$$\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad \epsilon(H) = 0, \quad S(H) = -H.$$

定義 5.8. U^+ を K と X^+ で生成される $U = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の部分代数, U^+ を K と X^- で生成される $U = U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の部分代数とおく. ここではこれらを $k(q)$ 上の代数と考えている. さらに $D = U^+ \otimes U^-$ とおく.

有限次元ホップ代数の議論と対応させると H と U^+ が, H^* と U^- が対応する. H と H^* には自然なペアリングがあったが, U^+ と U^- の間にもペアリング (双線形写像) を作ることができる.

命題 5.9. 次の条件を満たす $k(q)$ 上の双線形写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : U^+ \times U^- \to k(q)$ が一意に存在する:

$$\langle x, y_0 y_1 \rangle = \langle \Delta(x), y_0 \otimes y_1 \rangle, \quad x \in U^+, \ y_0, y_1 \in U^- \tag{5.15}$$
$$\langle zw, y \rangle = \langle w \otimes z, \Delta(y) \rangle, \quad z, w \in U^+, y \in U^- \tag{5.16}$$
$$\langle K^m, K^n \rangle = q^{-2mn} \quad m, n \in \{\pm 1\}, \tag{5.17}$$
$$\langle K^\pm, X^- \rangle = 0, \quad \langle X^+, K^\pm \rangle = 0, \tag{5.18}$$
$$\langle X^+, X^- \rangle = -\frac{1}{q - q^{-1}}. \tag{5.19}$$

ただし, (5.15), (5.16) の右辺は $\langle a \otimes b, a' \otimes b' \rangle = \langle a, a' \rangle \langle b, b' \rangle$ で定まるものとする.

一意性は U の生成元に対する像が上の条件で定まっていることから明らか. 以下, 存在を示すためにいくつか準備をする. $\phi_+, \phi_-, \eta \in (U^+)^*$ を次で定める. U^+ は $(X^+)^n K^m$ の形の元の線形和で与えられることに注意する.

$$\phi_+((X^+)^n K^m) = q^{-2m} \delta_{n,0}, \tag{5.20}$$
$$\phi_-((X^+)^n K^m) = q^{2m} \delta_{n,0}, \tag{5.21}$$
$$\eta((X^+)^n K^m) = \delta_{1,n} \tag{5.22}$$

とおく. 一般の元についてはこれを線形に拡張する.

補題 5.10. $\Phi : U^- \to (U^+)^*$ を

$$K^+ \mapsto \phi_+,$$
$$K^- \mapsto \phi_-,$$
$$X^- \mapsto -\frac{1}{q - q^{-1}} \eta$$

で定めると Φ は $k(q)$ 上の代数準同型. ただし, $(U^+)^*$ の代数構造は U^+ を余代数とみたとき $\mathrm{Hom}(U^+, k)$ に定まる代数構造とする.

証明. Φ が well-defined であること, すなわち, 関係式

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KX^-K^{-1} = q^{-2}X^-$$

を保つことを確認すればよい. このことは次を示せばい:

$$\phi_+ * \phi_{-1} = \epsilon, \quad \phi_+ * \left(-\frac{1}{q-q^{-1}}\right)\eta = -q^{-2}\frac{1}{q-q^{-1}}\eta * \phi_+.$$

$\phi_+ * \phi_{-1} = \epsilon$ について:
実際,

$$\Delta((X^+)^n K^m) = \sum_{\mu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \mu \end{bmatrix}_q q^{\mu(n-\mu)}(X^+)^\mu K^{n-\mu+m} \otimes (X^+)^n K^m$$

が成り立つこととで

$$\begin{aligned}
\phi_+ * \phi_-((X^+)^n k^m) =& \langle \phi_+ \otimes \phi_-, \Delta((X^+)^n K^m)\rangle \\
=& \sum_{\mu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \mu \end{bmatrix}_q q^{\mu(n-\mu)}\phi_+((X^+)^\mu K^{n-\mu+m}) \otimes \phi_-(X^+)^n K^m) \\
=& \sum_{\mu=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \mu \end{bmatrix}_q q^{\mu(n-\mu)}q^{-2(n-\mu+m)}\delta_{\mu 0} \otimes q^{2m}\delta_{n\mu} \\
=& \begin{cases} 0 & (n \neq 0), \\ 1 & (n = 0) \end{cases} \\
=& \epsilon((X^+)^n K^m).
\end{aligned}$$

$\phi_- * \phi_+ = \epsilon$ についても同様.
$\phi_+ * \left(-\frac{1}{q-q^{-1}}\right)\eta = -q^{-2}\frac{1}{q-q^{-1}}\eta * \phi_+$ について:

$\eta((X^+)^{n-\mu}K^m) = \delta_{1,n-\mu} = \delta_{\mu,n-1}$ だから

$$(\phi_+ * \eta)((X^+)^n K^m) = \begin{cases} 0 & (n \neq 1), \\ q^{-2(1+m)} & (n = 1). \end{cases}$$

一方で, $\eta((X^+)^\mu K^{n-\mu+m}) = \delta_{1,\mu}$, $\phi_+((X^+)^{n-\mu}K^m) = \delta_{n\mu}q^{-2m}$ に注意すれば.

$$(\eta * \phi_+)((X^+)^n K^m) = \begin{cases} 0 & (n \neq 1), \\ q^{-2m} & (n = 1). \end{cases}$$

$\square$

補題 5.11 ($\langle \cdot, \cdot \rangle : U^+ \times U^- \to k(q)$ の存在)**.** $x \in U^+$, $y \in U^-$ に対して, $\langle x, y \rangle = \Phi(y)(x)$ で定まる双線形写像は命題 5.9 の関係式 (5.15), (5.16), (5.17), (5.18), (5.19) をみたす.

証明. 生成元の像の計算 (5.17), (5.18) (5.19) は次の通り:

$$\begin{aligned}
\langle X^+, X^- \rangle &= \Phi(X^-)(X^+) = -\frac{\eta(X^+)}{q-q^{-1}} = -\frac{1}{q-q^{-1}}, \\
\langle X^+, K^\pm \rangle &= \Phi(X^-)(K^\pm) = \phi_\pm(X^+) = 0, \\
\langle K^\pm, X^- \rangle &= \Phi(X^-)(K^\pm) = -\frac{\eta(K^\pm}{q-q^{-1}} = 0, \\
\langle K^m, K^n \rangle &= \Phi(K^n)(K^m) = q^{-2mn}.
\end{aligned}$$

(5.15) について:

$$\begin{aligned}
&\langle x, y_0 y_1 \rangle = \Phi(y_0 y_1)(x) \\
=&(\Phi(y_0) \otimes \Phi(y_1))(\Delta(x)) \\
=&\sum_{(x)_1} \Phi(y_0)(x_{(0)})\Phi(y_1)(x_{(1)}) \\
=&\sum_{(x)_1} \langle x_{(0)}, y_0 \rangle \langle x_{(1)}, y_1 \rangle \\
=&\sum_{(x)_1} \langle x_{(0)} \otimes x_{(1)}, y_0 \otimes y_1 \rangle = \langle \Delta(x), y_0 \otimes y_1 \rangle.
\end{aligned}$$

(5.16) について:

$y \in U^-$ を生成元の積 $y = y_1 y_2 \dots y_p$ で書いたときの長さ p の帰納法で示す.

$$z = (X^+)^n K^m, w = (X^+)^{n'} K^{m'}$$

とする. まず $y = K$ の場合

$$\begin{aligned}
\langle zw, y \rangle =&\langle e^{n+n'} q^{2mm'} k^{m+m'}, k \rangle \\
=&q^{2mn'} \phi_+((X^+)^{n+n'} K^{m+m'}) \\
=&q^{2mn'} \delta_{n+n',0} q^{-2(m+m')}
\end{aligned}$$

となる. 一方で,

$$\begin{aligned}
\langle w \otimes z, \Delta(y) \rangle =&\phi_+(w)\phi_+(z) \\
=&\delta_{n',0} q^{-2m'} \delta_{n,0} q^{-2m} \\
=&\delta_{n+n',0} q^{-2(m+m')}.
\end{aligned}$$

したがって $y = K$ の場合は正しい. 次に $y = X^-$ の場合

$$\begin{aligned}
\langle (X^+)^n K^m (X^+)^{n'} K^{m'}, X^- \rangle =&\langle q^{2mn'} (X^+)^{n+n'} K^{m+m'}, X^- \rangle \\
=&-\frac{1}{q-q^{-1}} q^{2mn'} \delta_{n+n',1}
\end{aligned}$$

となる. 一方で

$$\begin{aligned}
&\langle (X^+)^{n'} K^{m'} \otimes (X^+)^n K^m, \Delta(X^-) \rangle \\
=&\langle (X^+)^{n'} K^{m'}, X^- \rangle \langle (X^+)^n K^m, K^{-1} \rangle + \langle (X^+)^{n'} K^{m'}, 1 \rangle \langle (X^+)^n K^m, X^- \rangle \\
=&-\frac{1}{q-q^{-1}} \delta_{n,0} \delta_{n',1} - \frac{1}{q-q^{-1}} \delta_{n',0} \delta_{n,1}
\end{aligned}$$

となるが, $(n,n')=(0,1),(1,0)$ とそうでない時で場合分けをすることで $y=X^-$ のときも正しいことがわかる. 以上で $p=1$ で正しいことが分かった. $p-1$ で正しいとし p の場合を示す. $y=y'y''$ とする. ここで y' は長さが 1, y'' は長さが $p-1$ の元とする.

$$\begin{aligned}\langle w\otimes z,\Delta(y)\rangle =&\langle w\otimes z,\Delta(y')\Delta(y'')\rangle\\ =&\langle w\otimes z,\sum_{(y)'_1,(y)''_1} {y'}_{(0)}{y''}_{(0)}\otimes {y'}_{(1)}{y''}_{(1)}\rangle\\ =&\sum\langle\Delta(w),{y'}_{(0)}\otimes {y''}_{(0)}\rangle\langle\Delta(z),{y'}_{(1)}{y''}_{(1)}\rangle\\ =&\sum\langle w_{(0)},y'_{(0)}\rangle\langle w_{(1)},{y''}_{(0)}\rangle\langle z_{(0)},y'_{(1)}\rangle\langle z_{(1)},{y''}_{(1)}\rangle\end{aligned}$$

となる. 一方,

$$\begin{aligned}\langle zw,y\rangle =&\langle\Delta(zw),y'\otimes y''\rangle\\ =&\sum\langle z_{(0)}w_{(0)},y'\rangle\langle z_{(1)}w_{(1)},y''\rangle\\ =&\sum\langle z_{(0)},y'_{(0)}\rangle\langle z_{(0)},{y'}_{(1)}\rangle\langle w_{(1)},{y''}_{(0)}\rangle\langle z_{(1)},{y''}_{(1)}\rangle\end{aligned}$$

以上で $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が満たす条件を確認できた. □

有限次元ベクトル空間 H の基底 $\{e_i\}$ を与えると, $\langle e_i,e^j\rangle=\delta_{ij}$ を満たすように H^* の基底 $\{e^i\}$ を与えることができた. 同様に U^+ の基底 $\{x_i\}$ と U^- の基底 $\{x^i\}$ で $\langle x_i,x^i\rangle$ を満たすようなものを構成する.

命題 5.12. 命題 5.9 で与えた双線形写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle:U^+\times U^-\to k(q)$ は次を満たす.

$$\langle (X^+)^nK^m,(X^-)^{n'}K^{m'}\rangle=\delta_{n,n'}q^{-2mm'}q^{-n(n-1)/2}[n]_q!\langle X^+,X^-\rangle^n.\quad (m,m'\in\mathbb{Z},n,n'\in\mathbb{Z}_{\geq 0})\tag{5.23}$$

これを示すためにいくつか補題を用意する.

補題 5.13.

$$\langle K^m,K^n\rangle=q^{-2mn}\quad (m,n\in\mathbb{Z}).\tag{5.24}$$

証明.

$$\begin{aligned}\langle K^m,K^n\rangle =&\langle K^m,KK^{n-1}\rangle\\ =&\langle\Delta(K)^m,K\otimes K^{n-1}\rangle\\ =&\langle K^m,K\rangle\langle K^m,K^{n-1}\rangle\end{aligned}$$

であることに注意して m と n に関する帰納法で簡単に示すことができる. □

補題 5.14. $n\neq 0$ ならば

$$\langle (X^+)^nK^m,K^{m'}\rangle=0\quad (n\in\mathbb{Z}_{\geq 0},m,m'\in\mathbb{Z}).\tag{5.25}$$

証明.

$$\begin{aligned}\langle (X^+)^nK^m,K^{m'}\rangle =&\langle K^m\otimes (X^+)^n,\Delta(K^{m'})\rangle\\ =&\langle K^m,K^{m'}\rangle\langle (X^+)^n,K^{m'}\rangle.\end{aligned}$$

ここで $n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\langle (X^+)^n, K^{m'}\rangle =&\langle (X^+)^{n-1}X^+, K^{m'}\rangle \\ =&\langle X^+ \otimes (X^+)^{n-1}, \Delta(K^{m'})\rangle \\ =&\langle X^+, K^{m'}\rangle\langle (X^+)^{n-1}, K^{m'}\rangle.\end{aligned}$$

m' についての帰納法で

$$\langle X^+, K^m\rangle = 0$$

が示せるため

$$\langle X^+, K^{m'}\rangle = 0$$

となる. □

補題 5.15.

$$\langle (X^+)^n K^m, (X^-)^{n'}\rangle = \langle (X^+)^n, (X^-)^{n'}\rangle \quad (n, n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m \in \mathbb{Z}). \tag{5.26}$$

証明.

$$\begin{aligned}&\langle (X^+)^n K^m, (X^-)^{n'}\rangle \\ =&\langle K^m \otimes (X^+)^n, \Delta(X^-)^{n'}\rangle \\ =&\sum_{\nu=0}^{n'}\langle K^m \otimes (X^+)^n, \begin{bmatrix} n' \\ \nu \end{bmatrix}_q q^{\nu(n'-\nu)}(1 \otimes (X^-)^\nu)((X^-)^{n'-\nu} \otimes K^{-(n'-\nu)})\rangle \\ =&\sum_{\nu=0}^{n'}\begin{bmatrix} n' \\ \nu \end{bmatrix}_q q^{\nu(n'-\nu)}\langle K^m, (X^-)^{n'-\nu}\rangle\langle (X^+)^m, (X^-)^\nu K^{-(n'-\nu)}\rangle. \\ =&\langle (X^+)^n, (X^-)^{n'}\rangle.\end{aligned}$$

ただし, $n' \neq 0$ のとき $\langle K^m, (X^-)^{n'}\rangle = 0$ に注意した. 証明は前補題と同様な計算を行えばよい. □

補題 5.16.

$$\langle (X^+)^m, (X^-)^n\rangle = \delta_{mn}\langle X^+, X^-\rangle^n \quad (m, n \geq 0) \tag{5.27}$$

証明.

$$\begin{aligned}&\langle (X^+)^m, (X^-)^n\rangle \\ =&\langle \Delta((X^+)^m), X^- \otimes (X^-)^{n-1}\rangle \\ =&\sum_{\mu=0}^{m}\begin{bmatrix} m \\ \mu \end{bmatrix}_q \langle (X^+)^\mu K^{m-\mu}, X^-\rangle\langle (X^+)^{m-\mu}, (X^-)^{n-1}\rangle.\end{aligned}$$

ここで $\mu\ \geq 2$ のときと $\mu = 0$ の項は 0 になる. 実際, $\mu\ \geq 2$ の場合

$$\begin{aligned}&\langle (X^+)^\mu K^{m-\mu}, X^-\rangle \\ =&\langle (X^+)^\mu, X^-\rangle \\ =&\langle X^+ \otimes e^{\mu-1}, X^- \otimes K^{-1} + 1 \otimes X^-\rangle \\ =&\langle X^+, X^-\rangle\langle (X^+)^{\mu-1}, K^{-1}\rangle + \langle X^+, 1\rangle\langle (X^+)^{\mu-1}, X^-\rangle = 0.\end{aligned}$$

最後の等式は $\langle (X^+)^m, X^-\rangle = 0$ に注意した．これは簡単な帰納法で示すことができる．したがって

$$\langle (X^+)^m, (X^-)^n\rangle = [m]_q q^{m-1}\langle X^+, X^-\rangle\langle (X^+)^{m-1}, (X^-)^{n-1}\rangle.$$

ところで, $m > n$ のとき

$$\langle (X^+)^m, (X^-)^n\rangle = \overbrace{\langle X^+, X^-\rangle\cdots\langle X^+, X^-\rangle}^{n}\langle (X^+)^{m-n}, 1\rangle = 0.$$

また $m < n$ のとき

$$\langle (X^+)^m, (X^-)^n\rangle = \overbrace{\langle X^+, X^-\rangle\cdots\langle X^+, X^-\rangle}^{m}\langle 1, (X^-)^{n-m}\rangle = 0.$$

以上の計算から

$$\langle (X^+)^m, (X^-)^n\rangle = \delta_{mn}[n]!q^{n(n-1)/2}\langle X^+, X^-\rangle^n$$

がわかった． □

準備が整ったので

$$\langle (X^+)^n K^m, (X^+)^{n'} K^{m'}\rangle \quad m, m' \in \mathbb{Z},\ n, n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

を計算すると

$$\begin{aligned}
&\langle (X^+)^n K^m, (X^+)^{n'} K^{m'}\rangle\\
=&\langle \Delta((X^+)^n K^m), (X^-)^{n'} \otimes K^{m'}\rangle\\
=&\sum_{\nu}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \nu \end{bmatrix}_q q^{\nu(n-\nu)}\langle (X^+)^\nu K^{n-\nu+m}, (X^-)^{n'}\rangle\langle e^{n-\nu}K^m, K^{m'}\rangle\\
=&\langle (X^+)^n, (X^-)^{n'}\rangle\langle K^m, K^{m'}\rangle \qquad (\text{補題 } 5.14,\ \text{補題 } 5.15)\\
=&q^{-2mm'}\langle (X^+)^n, (X^-)^{n'}\rangle\\
=&\delta_{m,n}q^{-2mm'}q^{n(n-1)/2}\langle X^+, X^-\rangle^n[n]_q! \qquad (\text{補題 } 5.16)
\end{aligned}$$

以上から

$$\langle (X^+)^n K^m, (X^-)^{n'} K^{m'}\rangle = \delta_{n,n'}q^{-2mm'}q^{-n(n-1)/2}[n]_q!\langle X^+, X^-\rangle^n. \quad (m, m' \in \mathbb{Z}, n, n' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{5.28}$$

が示された．

注意． H を含むペアリングの値は次で定義される．

$$\langle H, H\rangle = -2\hbar^{-1}, \quad \langle H, X^-\rangle = \langle X^+, H\rangle = 0, \quad \langle 1, 1\rangle = 1.$$

$K = q^H$ に注意すると $\langle K^m, K^n\rangle = q^{-2mn}$ を得る．また

$$\begin{aligned}
&\langle (X^+)^n H^l, (X^-)^{n'} H^{l'}\rangle = \langle (X^+)^n, (X^-)^{n'}\rangle\langle H^l, H^{l'}\rangle,\\
&\langle H^m, H^n\rangle = \delta_{m,n}n!\langle H, H\rangle^n.
\end{aligned}$$

以上の考察のもとで U^+ の基底を

$$X_{m,n} = (X^+)^m H^n, \tag{5.29}$$

U^- の基底を

$$X^{m,n} = C_{m,n}(X^-)^m H^n \tag{5.30}$$

にとる．そして

$$C_{m,n}^{-1} = q^{m(m-1)/2}[m]!(-(q-q^{-1}))^{-m} n!(-2\hbar^{-1})^n. \tag{5.31}$$

このとき $\langle X_{mn}, X^{m'n'}\rangle = \delta_{(m,n),(m',n')}$ がなりたつ．そして

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} =& \sum_{m,n} X_{m,n} \otimes X^{m,n} \\
=& \left(\sum_m \frac{q^{-m(m-1)/2}}{[m]!}(-(q-q^{-1})X^+ \otimes X^-)^m\right)\left(\sum_n \frac{1}{n!}\left(-\frac{\hbar}{2}H \otimes H\right)^n\right) \\
=& \exp_q(-(q-q^{-1})X^+ \otimes X^-)q^{-H\otimes H/2}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

となる (式 (4.10) を参照せよ)．これは $U^+ \otimes U^-$ の無限和を許した完備化に属している．

命題 5.17. $(U_q(\mathfrak{sl}_2), \mathcal{R})$ は準三角ホップ代数である．すなわち, $\mathcal{R}$ は可逆で次を満たす．

$$\tau\Delta(x)\mathcal{R} = \mathcal{R}\Delta(x) \quad x \in U_q(\mathfrak{sl}_2), \tag{5.33}$$

$$(\Delta \otimes 1)(\mathcal{R}) = R_{13}\mathcal{R}_{23}, \tag{5.34}$$

$$(1 \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = R_{13}\mathcal{R}_{12}. \tag{5.35}$$

証明. $\tau\Delta(x) = \mathcal{R}\Delta(x)$ については $x = X^+, X^-, K$ の場合にのみ示せば十分．$(\Delta \otimes 1)(\mathcal{R}) = R_{13}\mathcal{R}_{23}$ については $x_1 = -(q-q^{-1})X^+ \otimes 1 \otimes X^-$, $x_2 = -(q-q^{-1})K \otimes X^+ \otimes X^-$ とおいたとき $x_2x_1 = q^2x_1x_2$ が成り立つことに注意しよう．q-指数関数の性質から

$$\exp_q(x_1 + x_2) = \exp_q(x_1)\exp_q(x_2)$$

がなりたつ．よって

$$\begin{aligned}
&(\Delta \otimes 1)\mathcal{R} \\
=& \exp_q(-(q-q^{-1})\Delta(X^+) \otimes X^-)q^{-\Delta(H)\otimes H/2} \\
=& \exp_q(x_1 + x_2)q^{-H\otimes 1\otimes H/2}q^{-1\otimes H\otimes H/2} \\
=& \exp_q(x_1)\exp_q(x_2)q^{-H\otimes 1\otimes H/2}q^{-1\otimes H\otimes H/2} \\
=& \exp_q(x_1)q^{-H\otimes 1\otimes H/2}\exp_q(1 \otimes X^+ \otimes X^-)q^{-1\otimes H\otimes H/2} \\
=& \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}.
\end{aligned}$$

同様に $(1 \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$ も示せる．□

6 普遍 R 行列の積公式

$\mathfrak{g}$ を A, D, E 型の $\mathbb{C}$ 上の単純リー代数とする．一般の量子展開環 $U_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{g})$ についても $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と同様に R 行列が構成できることを示そう ([CP] Chapter 8).

6.1 記号の準備

$\mathfrak{g}$ を $\mathrm{A}, \mathrm{D}, \mathrm{E}$ 型の有限次元リー代数, $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ を $\mathfrak{g}$ に付随する対称なカルタン行列とする．$U_q = U_q(\mathfrak{g})$ を

$$\begin{aligned}
&\text{生成元} \;:\; X_i^+, X_i^-, H_i \quad 1 \le i \le n. \\
&\text{関係式} \;:\; [H_i, X_j] = \pm a_{ij} X_j^{\pm}, \\
&\qquad\qquad [H_i, H_j] = 0\,, \\
&\qquad\qquad [X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}} \\
&\qquad\qquad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_q (X_i^{\pm})^{1-a_{ij}-k} X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^k = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

で定まる $\mathbb{C}[[h]]$ 上の代数とする．ただし, $K_i = q^{H_i}$, $q = \exp(\hbar)$ とする．

$U_q(\mathfrak{g})$ は次で定まる余積 $\Delta : U_q \to U_q \otimes U_q$ をもつ:

$$\begin{aligned}
\Delta(H_i) &= H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i, \\
\Delta(X_i^+) &= X_i^+ \otimes e^{\hbar H_i} + 1 \otimes X_i^+, \\
\Delta(X_i^-) &= e^{-\hbar H_i} \otimes X_i^- + X_i^- \otimes 1 \quad (i = 1, \ldots, n).
\end{aligned}$$

6.2 組みひも群

定義 6.1. $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $T_i \in \mathrm{Aut}(U_q(\mathfrak{g}))$ を次で定める:

$$T_i(X_i^+) = -X_i^- K_i, \tag{6.1}$$

$$T_i(X_i^-) = -K_i^{-1} X_i^+, \tag{6.2}$$

$$T_i(H_j) = H - a_{ij} H_i, \tag{6.3}$$

$$T_i(X_j^+) = \sum_{r=0}^{\cancel{1}-a_{ij}} (-1)^{r-a_{ij}} q^{-r} (X_i^+)^{(-a_{ij}-r)} X_j (X_i)^{(r)}, \tag{6.4}$$

$$T_i(X_j^-) = \sum_{r=0}^{\cancel{1}-a_{ij}} (-1)^{r-a_{ij}} q^r (X_i^+)^{(r)} X_j (X_i)^{(-a_{ij}-r)}. \tag{6.5}$$

ただし

$$(X_i^+)^{(r)} = (X_i^+)^r / [r]_q! \tag{6.6}$$

と置いてある．

W を $\mathfrak{g}$ のワイル群, s_i を単純ルート α_i に対応する鏡映とする．s_{Max} を W の中での最長元としそれの最短表示を一つ固定する．

例. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ の場合. $W=\langle s_1,s_2\rangle$, $s_{\mathrm{Max}}=s_1s_2s_1$ ととれる.

定義 6.2. s_{Max} の最短表示 $s_{\mathrm{Max}}=s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_N}$ を一つ固定する. このとき N は $\mathfrak{g}$ の正ルートの数に等しいことに注意する. ルートベクトルを次で定義する.

$$X^+_{\beta_r}=T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_{r-1}}(X^+_{i_r}), \tag{6.7}$$
$$X^-_{\beta_r}=T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_{r-1}}(X^-_{i_r}), \tag{6.8}$$
$$H_{\beta_r}=T_{i_1}T_{i_2}\dots T_{i_{r-1}}(H_{i_r}). \tag{6.9}$$

これらは $\mathrm{Ad}(q^{H_j})$ $(j=1,\dots,n)$ の同時固有ベクトルであり, その意味で $\mathfrak{g}$ のルートベクトルの類似である.

このとき $\vec{s}=(s_1,\dots,s_N),\vec{t}=(s_1,\dots,s_n)\quad(s_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0},t_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ に対して,

$$(X_+)^{\vec{s}}=(X^+_{\beta_N})^{s_N}\dots(X^+_{\beta_1})^{s_1}, \tag{6.10}$$
$$(X_-)^{\vec{s}}=(X^-_{\beta_N})^{s_N}\dots(X^-_{\beta_1})^{s_1}, \tag{6.11}$$
$$H^{\vec{t}}=H_1^{t_1}H_2^{t_2}\dots H_n^{t_n} \tag{6.12}$$

と置いて $U_q(\mathfrak{g})$ の元を定める.

例 6.3. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$ の場合. $s_{\mathrm{Max}}=s_1s_2s_1$ とすれば

$$X^+_{\beta_1}=X^+_1,\quad X^+_{\beta_2}=T_1(X^+_2)=-X^+_1X^+_2+q^{-1}X^+_2X^+_1,\quad X_{\beta_3}=X^+_2.$$

このようにルートベクトルを作るとルートベクトルの余積の計算がしやすくなる. それを見るために一度, $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の話に戻る.

6.3 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合

$m\geq 0$ とする. $V_m=\bigoplus_{s=0}^m\mathbb{C}v_s^{(m)}$ を $U_q=U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の $m+1$ 次元既約表現空間とする ([神保-1] § 3). 加群としてみたとき, U_q の V_m への作用は次の通りである.

$$H\cdot v_s^{(m)}=(m-2s)v_s^{(m)}, \tag{6.13}$$
$$X^+\cdot v_s^{(m)}=[m-s+1]_q v_{s-1}^{(m)}, \tag{6.14}$$
$$X^-\cdot v_s^{(m)}=[s+1]_q v_{s+1}^{(m)}. \tag{6.15}$$

ここで, 一般の元 $x\in U_q$ に対して

$$x\cdot v_s^{(m)}=\sum_{r=0}^m C_{rs}^{(m)}(x)v_r^{(m)} \tag{$*$}$$

となっているとする. $C_{rs}^{(m)}\in U_q^*$ と思うことができる. 定義から $r,s=0,1,\dots,m$ に対して

$$\langle X^+,C_{rs}^{(m)}\rangle=[m-s+1]_q\delta_{r,s-1},\quad\langle X^-,C_{rs}^{(m)}\rangle=[s+1]_q\delta_{r,s+1},\quad\langle H,C_{rs}^{(m)}\rangle=(m-2s)\delta_{r,s}$$

が従う.

補題 6.4. 式 $(*)$ の $C_{rs}^{(m)}\in U_q^*$ $(n,s,m\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ について,

$$\Delta(C_{rs}^{(m)})=\sum_{t=0}^m C_{rt}^{(m)}\otimes C_{ts}^{(m)}\in U_q^*\otimes U_q^*.$$

証明.
$$\langle \Delta(C^{(m)}_{rs}), x\otimes y\rangle = \langle C^{(m)}_{rs}, xy\rangle$$

であって

$$\begin{aligned}\sum_r C^{(m)}_{rs}(xy)v^{(m)}_r =&(xy)\cdot v^{(m)}_s\\ =&x(y\cdot v^{(m)}_s)\\ =&x\sum_t C^{(m)}_{ts}(y)v^{(m)}_t\\ =&\sum_{t,r} C^{(m)}_{ts}(y)C^{(m)}_{rt}(x)v^{(m)}_r\end{aligned}$$

に注意すると
$$\Delta(C^{(m)}_{rs}) = \sum_t C^{(m)}_{rt}\otimes C^{(m)}_{ts}$$

が従う. □

$C^{(m)}_{rs}$ は U_q^* をベクトル空間として生成すると考えられる ([CP]).
ここで $w\in U_q^{**}$ を
$$w(C^{(m)}_{rs}) = \delta_{r+s,m}(-1)^r q^{r+\frac{1}{4}m^2} \tag{6.16}$$

で定義する. w は $C^{(m)}_{rs}$ の張る空間上で可逆である.

命題 6.5. $(U_q^*)^*$ で次の等式が成立する.
$$wX^+w^{-1} = -qX^-, \tag{6.17}$$
$$wX^-w^{-1} = -q^{-1}X^+, \tag{6.18}$$
$$wHw^{-1} = -H. \tag{6.19}$$

証明. U_q^* の元 $C^{(m)}_{rs}$ とのペアリングを取ることで確かめる.
<u>$wX^+w^{-1} = -qX^-$ について:</u>

$$\begin{aligned}&\langle wX^+, C^{(m)}_{rs}\rangle\\ =&\langle w\otimes X^+, \Delta(C^{(m)}_{rs})\rangle\\ =&\sum_t \langle w, C^{(m)}_{rt}\rangle\langle X^+, C^{(m)}_{ts}\rangle\\ =&\sum_t \delta_{r+t,m}(-1)^r q^{r+\frac{1}{4}m^2}[m-s+1]_q\delta_{t,s-1}\\ =&\delta_{r+s,m+1}(-1)^r q^{\frac{1}{4}m^2+r}[m-s+1]_q.\end{aligned}$$

一方で

$$\begin{aligned}-q\langle X^{-1}, C^{(m)}_{rs}\rangle =&-q\sum_t\langle X^-, C^{(m)}_{rs}\rangle\langle w, C^{(m)}_{ts}\rangle\\ =&\sum_t [t+1]\delta_{r,t+1}\delta_{r+s,m}(-1)^r q^{\frac{1}{4}m^2+t}\\ =&\delta_{r+s,m+1}(-1)^r[m-s+1]_q q^{\frac{1}{4}m^2+r}.\end{aligned}$$

以上から $wX^+w^{-1} = -qX^-$ が分かった.
<u>$wHw^{-1} = H$ について:</u>

$$\begin{aligned}\langle wH, C^{(m)}_{rs}\rangle =& \sum_t \langle w, C^{(m)}_{rt}\rangle\langle H, C^{(m)}_{ts}\rangle \\ =& \sum_t \delta_{r+t,m}(-1)^r q^{\frac{1}{4}m^2+r}(m-2s).\end{aligned}$$

一方で

$$\begin{aligned}\langle Hw, C^{(m)}_{rs}\rangle =& \sum_t \langle H, C^{(m)}_{rt}\rangle\langle H, C^{(m)}_{ts}\rangle \\ =& \sum_t \delta_{r,t}(m-2t)\delta_{t+s,m}(-1)^t q^{\frac{1}{4}m^2+t} \\ =& \delta_{r+s,m}(m-2r)(-1)^r q^{\frac{1}{4}m^2+r} \\ =& -\delta_{r+s,m}(m-2s)(-1)^r q^{\frac{1}{4}m^2+r}.\end{aligned}$$

$wHw^{-1} = H$ が証明された. □

命題 6.6. $\tilde{w} = wq^{\frac{H^2}{4}} = q^{\frac{H^2}{4}}w$ とおく. このとき $T \in \mathrm{Aut}(U_q)$ に対して

$$T(a) = \tilde{w}a\tilde{w}^{-1} \quad a \in U_q. \tag{6.20}$$

証明. $a = X^+, X^-, H$ の場合に確認すればよい.
$a = H$ の場合は

$$\tilde{w}H\tilde{w}^{-1} = q^{\frac{H^2}{4}}wHw^{-1}q^{-\frac{H^2}{4}} = -H = T(H).$$

$a = X^+$ の場合は

$$\begin{aligned}\tilde{w}H\tilde{w}^{-1} =& q^{\frac{H^2}{4}}wX^+w^{-1}q^{-\frac{H^2}{4}} \\ =& -qq^{\frac{H^2}{4}}X^-q^{-\frac{H^2}{4}} \\ =& -qX^-q^{H-1} = -X^-K = T(X^+).\end{aligned}$$

□

命題 6.7. $U_q \otimes U_q$ の形式的な無限和で

$$\mathcal{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2}(1-q^2)^n}{[n]!} q^{H\otimes H/2}(X^+)^n \otimes (X^-)^n$$

とおく. このとき

$$\Delta(w) = \mathcal{R}^{-1}(w \otimes w) \tag{6.21}$$

となる ([CP]).

$$\begin{aligned}\Delta(T(a)) =& \Delta(\tilde{w}a\tilde{w}^{-1}) \\ =& \mathcal{R}^{-1}(w\otimes w)\Delta(q^{\frac{H^2}{4}})\Delta a\Delta(q^{-\frac{H^2}{4}})(w\otimes w)^{-1}, \\ \Delta(q^{\frac{H^2}{4}}) =& (q^{\frac{H^2}{4}} \otimes q^{\frac{H^2}{4}})q^{H\otimes H/2}\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}\Delta(T(a)) &= \mathcal{R}^{-1}q^{H\otimes H/2}(\tilde{w}\otimes\tilde{w}^{-1})\Delta(a)(\tilde{w}\otimes\tilde{w}^{-1})^{-1}q^{-H\otimes H/2}\mathcal{R} \\ &= \tilde{\mathcal{R}}^{-1}(T\otimes T)(\Delta(a))\tilde{\mathcal{R}}.\end{aligned}$$

ここで $\tilde{\mathcal{R}} = q^{-H\otimes H/2}\mathcal{R}$ とおいた.

注意. 一般の場合, $\mathfrak{g}$ を複素数体上の有限次元単純リー代数とする. U_i を X_i^+, X_i^- K_i で生成される $U_q = U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数とする. $U_i \simeq U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とによって各 U_i において定まる $w, \tilde{w}$ などを w_i, $\tilde{w}_i = w_i q^{\frac{H_i^2}{4}}$ とおく. このとき式 (6.20), (6.21) は次のように一般化できる.

$$T_i(a) = \tilde{w}_i a \tilde{w}_i^{-1}, \tag{6.22}$$

$$\Delta(w_i) = \tilde{\mathcal{R}}_i^{-1}(w_i\otimes w_i) \tag{6.23}$$

ただし

$$\tilde{R}_i = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{-2})^n}{[n]_q!}q^{n(n+1)/2}(X_i^+)^n\otimes(X_i^-)^n \tag{6.24}$$

とおいた.

6.4 ルートベクトルの余積の計算

以上の準備の下で定義 6.2 で定めた $X_{\beta_r}^+$ の余積 $\Delta(X_{\beta_r}^+)$ の計算をする. $r=2$ の場合 $p, q\in U_q$ について

$$\begin{aligned}(\tilde{w}_{i_1}\otimes\tilde{w}_{i_1})(p\otimes q)(\tilde{w}_{i_1}^{-1}\otimes\tilde{w}_{i_1}^{-1}) =& (\tilde{w}_{i_1}p\tilde{w}_{i_1}^{-1})\otimes\tilde{w}_{i_1}q\tilde{w}_{i_1}^{-1} \\ =& T_{i_1}(p)\otimes T_{i_1}(q)\end{aligned}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}\Delta(X_{\beta_2}^+) &= \Delta(T_{i_1}(X_{i_2}^+)) \\ &= \Delta(\tilde{w}_{i_1})\Delta(X_{i_2}^+)\Delta(\tilde{w}_{i_1}^{-1}) \\ &= \tilde{\mathcal{R}}_{i_1}^{-1}(\tilde{w_{i_1}}\otimes\tilde{w_{i_1}})(X_{i_2}^+\otimes K_{i_2}+1\otimes X_{i_2}^+)(\tilde{w_{i_1}}^{-1}\otimes\tilde{w_{i_1}}^{-1})\tilde{\mathcal{R}}_{i_1} \\ &= \tilde{\mathcal{R}}_{i_1}^{-1}(T_{i_1}(X_{i_2}^+)\otimes T_{i_1}(K_{i_2})+1\otimes T_{i_1}(X_{i_2}^+))\tilde{\mathcal{R}}_{i_1} \\ &= \tilde{\mathcal{R}}_{i_1}^{-1}(X_{\beta_2}^+\otimes K_{\beta_2}+1\otimes X_{\beta_2}^+)\tilde{\mathcal{R}}_{i_1}.\end{aligned}$$

一般の場合は次で与えられる:

命題 6.8. $r, k = 1, \ldots, N$ に対して $U_q\widehat{\otimes}U_q$ の元を

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_k} &= (T_{i_1}\cdots T_{i_{k-1}})^{\otimes 2}(\tilde{R}_k), \\ \tilde{\mathcal{R}}_{<r} &= \tilde{\mathcal{R}}_{\beta_{r-1}}\cdots\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_1}.\end{aligned}$$

とおく. このとき

$$\Delta(X_{\beta_r}^+) = \tilde{\mathcal{R}}_{<r}(X_{\beta_r}^+\otimes K_{\beta_r}+1\otimes K_{\beta_r})\tilde{\mathcal{R}}_{<r}$$

となる.

証明. まず,

$$
\begin{aligned}
\Delta(X^+_{\beta_r}) &= \Delta(T_{i_1}\circ T_{i_2}\circ\cdots\circ T_{i_{r-1}}(X^+_{\beta_r}))\\
&= \Delta(\tilde{w}_{i_1})\Delta(\tilde{w}_{i_2})\cdots\Delta(\tilde{w}_{i_{r-1}})\Delta(X^+_{i_r})\Delta(\tilde{w}^{-1}_{i_{r-1}})\Delta(\tilde{w}^{-1}_{i_{r-2}})\cdots\Delta(\tilde{w}^{-1}_{i_1})
\end{aligned}
$$

である.

$$
\Delta(\tilde{w}_{i_{r-1}})\Delta(X^+_{i_r})\Delta(\tilde{w}^{-1}_{i_{r-1}}) = \tilde{\mathcal{R}^{-1}}_{i_{r-1}}(T_{i_{r-1}}\otimes T_{i_{r-1}})(X^+_{i_r})\tilde{\mathcal{R}}_{i_{r-1}}
$$

に左から $\Delta(w_{i_{r-2}})$, 右から $\Delta(w^{-1}_{i_{r-2}})$ をかけると

$$
\begin{aligned}
&\Delta(w_{i_{r-2}})\Delta(w_{i_{r-1}})\Delta(X^+_{i_r})\Delta(w^{-1}_{i_{r-1}})\Delta(w^{-1}_{i_{r-2}})\\
=&\tilde{\mathcal{R}}^{-1}_{i_{r-2}}T^{\otimes 2}_{i_{r-2}}(\tilde{R}^{-1}_{i_{r-1}})(T_{i_{r-2}}T_{i_{r-1}})^{\otimes 2}\Delta(X^+_{i_r})T^{\otimes 2}_{i_{r-2}}(\tilde{R}_{i_{r-1}})\tilde{\mathcal{R}}_{i_{r-2}}.
\end{aligned}
$$

以下順に

$$
\begin{gathered}
\Delta(w_{i_{r-3}})\Delta(w_{i_{r-2}})\Delta(w_{i_{r-1}})\Delta(X^+_{i_r})\Delta(w^{-1}_{i_{r-1}})\Delta(w^{-1}_{i_{r-2}})\Delta(w^{-1}_{i_{r-3}}),\\
\Delta(w_{i_{r-4}})\Delta(w_{i_{r-3}})\Delta(w_{i_{r-2}})\Delta(w_{i_{r-1}})\Delta(X^+_{i_r})\Delta(w^{-1}_{i_{r-1}})\Delta(w^{-1}_{i_{r-2}})\Delta(w^{-1}_{i_{r-3}})\Delta(w^{-1}_{i_{r-4}}),\\
\vdots
\end{gathered}
$$

を計算することで

$$
\begin{aligned}
\Delta(X^+_{\beta_r}) &= \tilde{\mathcal{R}}^{-1}_{i_1}T^{\otimes 2}_{i_1}(\tilde{\mathcal{R}}^{-1}_{i_2})(T_{i_1}T_{i_2})^{\otimes 2}(\mathcal{R}^{-1}_{i_3})\cdots(T_{i_1}\cdots T_{i_{r-2}})^{\otimes 2}(\tilde{\mathcal{R}}^{-1}_{i_{r-1}})\\
&\qquad\times(T_{i_1}\cdots T_{i_{r-1}})^{\otimes 2}(\Delta(X^+_{i_r})(T_{i_1}\cdots T_{i_{r-2}})^{\otimes 2}(\tilde{\mathcal{R}}_{i_{r-1}})\cdots T^{\otimes 2}_{i_1}(\tilde{\mathcal{R}}_{i_2})\tilde{\mathcal{R}}_{i_1}\\
&= \tilde{\mathcal{R}}^{-1}_{\beta_1}\tilde{\mathcal{R}}^{-1}_{\beta_2}\cdots\tilde{\mathcal{R}}^{-1}_{\beta_{r-1}}(T_{i_1}\cdots T_{i_r})^{\otimes 2}(\Delta(X^+_{i_r})\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_{r-1}}\cdots\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_2}\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_1}\\
&= \tilde{\mathcal{R}}_{<r}(X^+_{\beta_r}\otimes K_{\beta_r}+1\otimes K_\beta)\tilde{\mathcal{R}}_{<r}
\end{aligned}
$$

を得る. □

6.5 $U_q(\mathfrak{g})$ の普遍 R 行列の構成 ($\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ のとき)

有限次元ホップ代数 H に対して $D=D(H)=H\otimes H^*$ に代数構造を入れてその中での普遍 R 行列を与えた. それを一般の $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純リー代数でも考える. $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合で考える.

命題 6.9. U_q^+ を X^+ と H で生成される $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の部分代数とする. U_q^+ の双対の元を ξ,η を次で定めることにする.

$$
\xi(H^s(X^+)^t)=\delta_{s1}\delta_{t,0}\hbar^{-1},\quad \eta(H^s(X^+)^t)=\delta_{s0}\delta_{t1}\hbar^{-1}\quad(s,t\geq 0) \tag{6.25}
$$

ここで $\hbar$ は $q=\exp(\hbar)$ なる複素数である. このとき, ξ,η で U_q^+ の双対は生成され, 自然なペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle$ のもとで次が成立する.

$$
\langle\xi^s\eta^t,H^{s'}(X^+)^{t'}\rangle=\langle\xi^s,H^{s'}\rangle\langle\eta^t,(X^+)^{t'}\rangle=\delta_{ss'}\delta_{tt'}s!q^{-t(t-1)/2}[t]_q!\quad(s,s',t,t'\geq 0) \tag{6.26}
$$

この命題は後で一般の場合で示す.

命題 6.10. ξ と η の関係式および余積は次で与えられる.

$$
[\xi,\eta]=-\eta, \tag{6.27}
$$

$$
\Delta(\xi)=\xi\otimes 1+1\otimes\xi, \tag{6.28}
$$

$$
\Delta(\eta)=\eta\otimes e^{-2\hbar\xi}+1\otimes\eta. \tag{6.29}
$$

証明. $[\xi,\eta]=-\eta$ について:
まず $\langle \xi\eta, H^s(X^+)^t\rangle = \langle \eta\otimes\xi, \Delta(H)^s\Delta(X^+)^t\rangle \neq 0$ という s,t を探すと $s,t\in\{0,1\}$ となる. 実際, $s\geq 2$ ならば

$$\Delta(H)^s = \sum_{p+q=s}\binom{s}{p} H^p\otimes H^q.$$

$p\geq 1$ のとき $H^p\otimes H^q$ の項は η の寄与によって 0 になる. 同様の議論を X^+ にも行うことで $t\leq 1$ を得る. あとは $\langle \eta\xi, H^s(X^+)^t\rangle$ の値が非自明な場合に各々計算する.

- $(s,t)=(0,0)$ の場合.
$$\langle \eta\xi, H^s(X^+)^t\rangle = 0.$$
- $(s,t)=(1,0)$ の場合.
$$\langle \eta\xi, H^s(X^+)^t\rangle = \langle \eta\otimes\xi, H\otimes 1 + 1\otimes H\rangle = 0.$$
- $(s,t)=(0,1)$ の場合.
$$\langle \eta\xi, X^+\rangle = \langle \eta\otimes\xi, X^+\otimes K + 1\otimes X^+\rangle = \langle \eta\otimes\xi, X^+\otimes K\rangle = \hbar^{-2}.$$
- $(s,t)=(1,1)$ の場合.
$$\begin{aligned}\langle \eta\xi, HX^+\rangle =& \langle \eta\otimes\xi, (H\otimes 1+1\otimes H)(X^+\otimes K+1\otimes X^+)\rangle\\ =& \langle \eta, X^+\rangle\langle \xi, HK\rangle = \langle \eta, X^+\rangle\langle \xi, H\rangle = h^{-2}\end{aligned}$$

これから $\eta\xi=\xi\eta+\eta$ がわかり, $[\xi,\eta]=-\eta$ がわかる. □

$D(U_q^+)$ の代数構造を確認する. $x\in U_q$ と $\alpha\in U_q^*$ に対して

$$\alpha\cdot x = \sum \langle \alpha_{(0)}, x_{(2)}\rangle\langle \alpha_{(2)}, S^{-1}(x_{(0)}\rangle x_{(1)}\alpha_{(1)} \tag{6.30}$$

で定まる.

命題 6.11. X^+,ξ,η $D(U_q^+)$ の関係式は次の通りである.

$$\begin{aligned}[X^+,\eta] &= \frac{e^{\hbar H}-e^{-2\hbar\xi}}{\hbar},\\ [X^+,\xi] &= -X^+,\\ [H,\eta] &= -2\eta,\quad [H,\xi]=0.\end{aligned}$$

証明. $[X^+,\eta]=\frac{e^{\hbar H}-e^{-2\hbar\xi}}{\hbar}$ について:

$$\begin{aligned}&(S^{-1}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\Delta^{(2)}(X^+)\\ =&(S^{-1}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(X^+\otimes K\otimes K+1\otimes X^+\otimes K+1\otimes 1\otimes X^+)\\ =&-K^{-1}X^+\otimes K\otimes K+1\otimes X^+\otimes K+1\otimes 1\otimes X^+.\end{aligned}$$

一方で

$$\Delta^{(2)}(\eta) = \eta\otimes e^{-2\hbar\xi}\otimes e^{-2\hbar\xi} + 1\otimes\eta\otimes e^{-2\hbar\xi} + 1\otimes 1\otimes\eta.$$

よって

$$\begin{aligned}\eta X^+ &= \langle \eta, X^+\rangle\langle e^{-2\hbar\xi}, 1\rangle e^{-2\hbar\xi} + \langle 1, K\rangle\langle e^{-2\hbar\xi}, 1\rangle X^+\eta - \langle 1, K\rangle\langle \eta, K^{-1}X^+\rangle K \\ &= \hbar^{-1}e^{-2\hbar\xi} + X^+\eta - \hbar^{-1}K.\end{aligned}$$

ゆえに

$$[X^+, \eta] = \frac{K - e^{-2\hbar\xi}}{\hbar^{-1}}.$$

$[X^+, \xi] = -X^+$ について:

$$\begin{aligned}(S^{-1}\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})\Delta^{(2)}(X^+) &= -KX^+\otimes K\otimes K + 1\otimes X^+\otimes K + 1\otimes 1\otimes X^+ \\ \Delta(\xi) &= \xi\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes\xi\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes\xi\end{aligned}$$

によって

$$\xi X^+ = \langle 1, 1\rangle\langle \xi, K\rangle X^+ + \langle 1, K\rangle\langle 1, 1\rangle X^+\xi = X^+ + X^+\xi.$$

よって $[X^+, \xi] = -X^+$.
$[H, \eta] = -2\eta$ について:

$$\begin{aligned}(S^{-1})\otimes 1\otimes 1)\Delta^{(2)}(H) &= -H\otimes 1\otimes 1 + 1\otimes H\otimes 1 + 1\otimes 1\otimes H\Delta^{(2)}(\eta) \\ &= \eta\otimes e^{-2\hbar\xi}\otimes e^{-2\hbar\xi} + 1\otimes\eta\otimes e^{-2\hbar\xi} + 1\otimes 1\otimes\eta\end{aligned}$$

によって

$$\eta H = -\langle 1, 1\rangle\langle e^{-2\hbar\xi}, H\rangle\eta + \langle 1, 1\rangle\langle e^{-2\hbar\xi}, 1\rangle H\eta = 2\eta H\eta.$$

ゆえに $[H, \eta] = -2\eta$.

$[H, \xi] = 0$ について: $(S^{-1}\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id})(H)$, $\Delta(\xi)$ の計算によって

$$\xi H = \langle \xi, H\rangle\langle 1, 1\rangle + \langle 1, 1\rangle\langle 1, 1\rangle H\xi - \langle 1, 1\rangle\langle \xi, H\rangle$$

□

命題 6.11 から $\phi : D(U_q^+) \to U_q$ を

$$\begin{aligned}X^+ &\mapsto X^+, \\ H &\mapsto H, \\ \xi &\mapsto \frac{1}{2}H, \\ \eta &\mapsto \frac{q - q^{-1}}{\hbar}X^-\end{aligned}$$

で定めると, これは well-defined である. さて

$$\langle \xi\eta, H^{s'}(X^+)^{t'}\rangle = \delta_{ss'}\delta_{tt'}s!q^{-t(t-1)/2}[t]!$$

であるから, 基底 $\{H^s(X^+)^t\}$ に対応する双対基底を

$$\left\{\frac{\hbar^{s+t}q^{t(t-1)}}{s![t]!}\xi^s\eta^t\right\} \tag{6.31}$$

でとることによって $D(U_q^+)$ における 普遍 R 行列は

$$\sum_{s,t}^{\infty}\frac{\hbar^{s+t}}{s![t]!}q^{t(t-1)}(H^s(X^+)^t\otimes\xi^s\eta^t)$$

となる. これを 上で定めた ϕ によってうつすことで U_q の普遍 R 行列を再び得ることができる ((5.32) を参照せよ).

$$(\phi\otimes\phi)(\mathcal{R})=\left(\sum_s\frac{\hbar^s}{s!}\frac{1}{2^s}(H^s\otimes H^s)\right)\left(\sum_t\frac{q^{(t(t-1)/2}}{[t]!}(q-q^{-1})^t(X^+)^t\otimes(X^-)^t\right). \tag{6.32}$$

6.6 $U_q(\mathfrak{g})$ の普遍 R 行列の構成 (一般の場合)

$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ で行った議論を一般化する.

命題 6.12. 次をみたす自然なペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle:(U_q^+)^*\otimes U_q^+\to\mathbb{C}$ が存在し次が成り立つ (命題 6.9 を参照).

$$\begin{aligned}\langle\xi^{\vec{s}}\eta^{\vec{t}},H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{t'}}\rangle&=\langle\xi_1^{s_1}\dots\xi_n^{s_n}\eta_{\beta_N}^{t_N}\dots\eta_{\beta_1}^{t_1},H_1^{s'_1}\dots H_n^{s'_n}(X_{\beta_N}^+)^{t'_N}\dots(X_{\beta_1}^+)^{t'_1}\rangle\\&=\delta_{\vec{s}\vec{s'}}\delta_{\vec{t}\vec{t'}}\hbar^{-|s|-|t|}s_1!\dots s_n!\prod_{r=1}^{N}qq^{-t_r(t_r-1)}[t_r]_q!.\end{aligned}$$

これを示すためにいくつか補題を用意する.

補題 6.13.

$$\langle\xi^{\vec{s}},H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{t'}}\rangle=\delta_{\vec{t'},0}\langle\xi^{\vec{s}},H^{\vec{s'}}\rangle, \tag{6.33}$$

$$\langle\eta^{\vec{t}},H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{t'}}\rangle=\delta_{\vec{s'},0}\langle\eta^{\vec{t}},(X^+)^{\vec{t'}}\rangle\quad(\vec{s},\vec{s'}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^n,\vec{t},\vec{t'}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^N). \tag{6.34}$$

この補題とルートベクトルの余積の計算

$$\Delta(X_{\beta_r})=\tilde{\mathcal{R}}_{<r}^{-1}(X_{\beta_r}^+\otimes e^{d_{i_r}H_{i_r}\hbar}+1\otimes X_{\beta_r})\tilde{\mathcal{R}}_{<r}$$

によって

$$\langle\xi^{\vec{s}}\eta^{\vec{t}},H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{t'}}\rangle=\quad\langle\xi^{\vec{s}}\otimes\eta^{\vec{t}},\Delta(H^{\vec{s'}})\Delta((X^+)^{\vec{t'}})\rangle=\langle\xi^{\vec{s}}\otimes\eta^{\vec{t}},H^{\vec{s'}}\otimes(X^+)^{\vec{t'}}\rangle=\quad\langle\xi^{\vec{s}},H^{\vec{s'}}\rangle\langle\eta^{\vec{t}},(X^+)^{\vec{t'}}\rangle.$$

さらに計算を続けるためには次を計算すればよい.

補題 6.14. $\vec{s},\vec{s'}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^n,\vec{t},\vec{t'}\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^N$ に対して

$$\langle\xi^{\vec{s}},H^{\vec{s'}}\rangle=\delta_{\vec{s},\vec{s'}}s_1!\cdots s_n!\hbar^{-|\vec{s}|}, \tag{6.35}$$

$$\langle\eta^{\vec{t}},(X^+)^{\vec{t'}}\rangle=\delta_{\vec{t},\vec{t'}}\prod_{r=1}^{N}q^{-(t_r(t_r-1)}[t_r]! \tag{6.36}$$

ここで, $|\vec{s}|=s_1+\cdots+s_n$ とおいた.

ゆえに命題の証明は上で述べた補題 6.13, 6.14 を示すことに帰着される.

証明. $\underline{\langle \xi^{\vec{s}}, H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{r'}})\rangle}$ の計算:
まず

$$\langle \xi^{\vec{s}}, H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{r'}})\rangle = \langle \xi_1^{s_1} \otimes \cdots \xi_n^{s_n}, \Delta^{(n-1)}(H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{t'}})\rangle$$

に注意する.

$$\Delta^{(n-1)}(X^+_{\beta_r}) = \sum a_{(0)} \otimes \cdots \otimes a_{(n)}$$

としたときに $a_{(0)}, a_{(1)}, \ldots, a_{(n)}$ のどれかには $X^+_{\beta_r}$ を含む因子が存在する. $\langle \xi_i, X^+_{\beta_j}\rangle = 0 \quad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots N$ だから $\vec{r'} \neq 0$ ならば $\langle \xi^{\vec{s}}, H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{r'}}\rangle = 0$ でないといけない.
$\underline{\langle \xi^{\vec{s}}, H^{\vec{s'}}\rangle}$ の計算:
まず

$$\langle \xi^{\vec{s}}, H^{\vec{s'}}\rangle = \langle \xi_1^{s_1} \otimes \cdots \otimes \xi^{s_n}, \Delta^{(n-1)}(H^{\vec{s'}})\rangle$$

に注意する. さらに一般に

$$\Delta^{(m)}(H_i) = H_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes H_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + \cdots 1 \otimes \cdots 1 \otimes H_i$$

であることと, 異なる i, j に対して $\langle \xi, H_j\rangle = 0$ だから

$$\begin{aligned}
&\langle \xi^{\vec{s}}, H^{\vec{s'}}\rangle \\
=&\langle \xi_1^{s_1} \otimes \ldots \otimes \xi_n^{s_n}, (H_1^{s'_1} \otimes 1 \ldots \otimes 1)(1 \otimes H_2^{s'_2} \otimes 1 \ldots \otimes 1) \ldots (1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes H_n^{s'_n})\rangle \\
=&\langle \xi_1^{s_1}, H_1^{s'_1}\rangle \ldots \langle \xi_n^{s_n}, H_n^{s'_n}\rangle
\end{aligned} \tag{6.37}$$

である以下簡単のために $i = 1, \ldots, n$ を一つ固定して $\xi = \xi_i$, $H = H_i$ とおいて $\langle \xi^s, H^t\rangle$ を計算する.
$\underline{\langle \xi^s, H^t\rangle}$ の計算:
まず

$$\langle \xi, H^t\rangle = \langle \overbrace{\xi \otimes \ldots \otimes \xi}^{s}, \Delta^{(s-1)}(H^t)\rangle$$

であることに注意する. $s = t$ の場合 $\Delta^{(s-1)}(H)^s$ に出てくる $\overbrace{H \otimes \cdots \otimes H}^{s}$ の係数は $s!$ である. 一方で, $s \neq t$ ならば $\Delta^{(s-1)}(H)^t$ に $\overbrace{H \otimes \cdots \otimes H}^{s}$ という項が無いので $\langle \xi^s, H^t\rangle = 0$. したがって

$$\langle \xi, H^t\rangle = \delta_{st} s! \langle \xi, H\rangle^s. \tag{6.38}$$

$\underline{\langle \eta^{\vec{r}}, H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{t'}}\rangle}$ の計算:
まず $\langle \eta^{\vec{r}}, H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{t'}}\rangle = \langle \eta_{\beta_N}^{r_N} \otimes \cdots \otimes \eta_{\beta_1}^{r_1}, \Delta^{(N-1)}(H^{\vec{s}}(X^+)^{\vec{t'}})\rangle$ である. $\vec{s'} \neq 0$ のとき

$$\Delta^{(N-1)}(H^{\vec{s}}(X^+)^{\vec{t'}}) = \sum a_{(0)} \otimes \cdots \otimes a_{(N-1)}$$

としたとき $a_{(0)}, \ldots, a_{(N)}$ のどれかには H の因子が出る. $\langle \eta_{\beta_i}, H_j\rangle = 0$ なので

$$\langle \eta^{\vec{r}}, H^{\vec{s'}}(X^+)^{\vec{t'}}\rangle = \delta_{\vec{s'},0} \langle \eta^{\vec{t}}, (X^+)^{\vec{t'}}\rangle. \tag{6.39}$$

$\langle \eta^{\vec{r}}, (X^+)^{\vec{r'}} \rangle$ の計算:

$$\langle \eta^{\vec{r}}, (X^+)^{\vec{r'}} \rangle = \langle \eta_{\beta_N}^{r_N} \otimes \cdots \otimes \eta_{\beta_1}^{r_1}, \Delta^{(N-1)}((X_{\beta_N}^+)^{r'_N}) \cdots \Delta^{(N-1)}((X_{\beta_N}^+)^{r'_N}) \rangle$$

であって相異なる i, j について $\langle \eta_{\beta_i}, X_{\beta_j}^+ \rangle = 0$ だから

$$\begin{aligned}
&\langle \eta^{\vec{r}}, (X^+)^{\vec{r'}} \rangle \\
=&\langle \eta_N^{r_N} \otimes \cdots \otimes \eta_1^{r_1}, ((X_{\beta_N}^+)^{r'_N} \otimes K_{\beta_N} \otimes \cdots \otimes K_{\beta_N}) \\
&\qquad (1 \otimes (X_{\beta_{N-1}}^+)^{r'_{N-1}} \otimes K_{\beta_{N-1}} \otimes \cdots \otimes K_{\beta_{N-1}}) \cdots (1 \otimes \cdots \otimes (X_{\beta_1}^+)^{r'_1}) \rangle \\
=&\langle \eta_N^{r_N} \otimes \cdots \otimes \eta_1^{r_1}, (X_{\beta_N}^+)^{r'_N} \otimes \cdots \otimes (X_{\beta_1}^+)^{r'_1} \rangle \\
=&\langle \eta_{\beta_N}^{r_N}, (X_{\beta_N}^+)^{r'_N} \rangle \cdots \langle \eta_{\beta_1}^{r_1}, (X_{\beta_1}^+)^{r'_1} \rangle.
\end{aligned}$$

$\langle \eta_{\beta_r}^t, (X_{\beta_r}^+)^{t'} \rangle$ の計算:
$\eta = \eta_{\beta_r}$, $X_\beta^+ = X_{\beta_r}^+$ とおいて計算する. $K_\beta = \exp(\hbar H_{\beta_r})$ とおいたとき

$$\langle \eta^t, (X_\beta^+)^{t'} \rangle = \langle \eta \otimes \cdots \otimes \eta, (X_\beta^+ \otimes K_\beta \otimes \cdots \otimes K_\beta + 1 \otimes X_\beta^+ \otimes K_\beta \otimes \cdots \otimes K_\beta + 1 \otimes \cdots \otimes X_\beta^+)^{t'} \rangle.$$

$t \neq t'$ のとき, X_β^+ についての斉一次の項

$$X_\beta^+ \otimes K_\beta X_\beta^+ \otimes K_\beta^2 X_\beta^+ \otimes \cdots \otimes K_\beta^{r-1} X^+$$

が出ないので $\langle \eta^t, (X^+)^{t'} \rangle = 0$. 次に $t = t'$ の場合について考えればよい.

$$\begin{aligned}
a_1 &= X_\beta^+ \otimes K_\beta \otimes \cdots \otimes K_\beta, \\
a_2 &= 1 \otimes X_\beta^+ \otimes K_\beta \otimes \cdots \otimes K_\beta, \\
&\cdots \\
a_t &= 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes X_\beta^+
\end{aligned}$$

と置いたとき $(a_1 + \cdots + a_t)^t$ の $a_1 \cdots a_t$ の係数を c_t と置く.

$$\langle \eta^t, (X^+)^t \rangle = c_t \langle \eta, X_\beta^+ \rangle^t$$

となる. 以上をまとめると

$$\langle \eta^t, (X^+)^{t'} \rangle = \delta_{t,t'} c_t \langle \eta, X_\beta^+ \rangle^t \quad (t, t' \geq 0) \tag{6.40}$$

である.

$c_t \quad (t \geq 0)$ の計算:
$c_t = [t]! q^{-t(t-1)/2}$ が成り立つことを t についての帰納法で示す. $t = 1$ の場合は明らか. $t-1$ で成立するとして t の場合をしめす. $i < j$ のとき $a_i a_j = q^2 a_j a_i$ が成り立つことに注意する. $x = a_1 + \cdots + a_{t-1}$, y_t とおく. $xy = q^2 yx$ だから

$$(a_1 + \cdots + a_t)^t = (x+y)^t = \sum_k^t \begin{bmatrix} t \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(t-k)} y^k x^{t-k}$$

となるが, 右辺の和において $k = 1$ の項

$$\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}_q q^{t-1} y x^{t-1}$$

のなかに $a_1,\ldots,a_t$ の積に関する項がすべて入る事に注意する．それだけを取り出すと帰納法の仮定を用いることで

$$\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}_q q^{t-1} a_t c_{t-1} a_1 \cdots a_{t-1} = [t] q^{-t(t-1)} c_{t-1} a_1 \cdots a_t. \tag{6.41}$$

ゆえに

$$c_t = [t] q^{-t(t-1)} c_{t-1} = \cdots = [t]! q^{t(t-1)}.$$

□

以上により, 基底 $\{H^{\vec{s}}(X^+)^{\vec{t}}\}$ に対応する双対基底は

$$\frac{\hbar^{|\vec{s}|+|\vec{t}|}}{s_1!\cdots s_n!}\left(\prod_{r=1}^{N} q^{-t_r(t_r-1)/2}[t_i]!\right)^{-1} \xi^{\vec{s}}\eta^{\vec{t}} \quad (\vec{s}\in(\mathbb{Z})^n, \vec{t}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^N)$$

となる．よって $D(U_q^+)$ における普遍 R 行列は

$$\mathcal{R} = \sum_{\vec{s},\vec{t}} \frac{\hbar^{|\vec{s}|+|\vec{t}|}}{s_1!\cdots s_n!} \prod_{r=1}^{N} \frac{q^{t_r(t_r-1)/2}}{[t_r]!} (H^{\vec{s}}(X^+)^{\vec{t}} \otimes \xi^{\vec{s}}\eta^{\vec{t}})$$

で与えられる．さて, β_k が単純ルート α_i となるとき $\eta_i = \eta_{\beta_k}$ とおく．

命題 6.15. $\eta_j, \xi_i \in (U_h(\mathfrak{g}))^*$ について

$$\begin{aligned}
[\xi_i, \eta_j] &= \delta_{ij}\eta_j, \\
\Delta(\xi_i) &= \xi_i \otimes 1 + 1 \otimes \xi_i, \\
\Delta(\eta_i) &= \eta_i \otimes \exp\left(-\hbar \sum_j a_{ji}\xi_j\right) + 1 \otimes \eta_i.
\end{aligned}$$

が成立する．

証明. 最初の二つの式は $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときと同様. 最後の等式だけ確認する. $\langle \Delta(\eta_i), H^{\vec{s}}(X^+)^{\vec{t}} \otimes H^{\vec{s'}}(X^+)^{t'} \rangle \neq 0$ という場合を見つける．$1 \otimes X_i^+, X_i^+ \otimes H^{\vec{s}}$ の形の場合に限る．

$$\begin{aligned}
&\langle \Delta(\eta_i), X_i^+ \otimes H^{\vec{s}} \rangle \\
=&\langle \eta_i, (H_1 - a_{1i})^{s_1} \cdots (H_n - a_{ni})^{s_n} X_i^+ \rangle \\
=&(-a_{1i})^{s_1} \cdots (-a_{ni})^{s_n} \hbar^{-1}.
\end{aligned}$$

である．一方で

$$\langle \eta_i \otimes e^{-\hbar \sum_j a_{ji}\xi_j}, X_i^+ \otimes H^{\vec{s}} \rangle = \langle \eta_i, X_i^+ \rangle \langle e^{-\hbar \sum_j a_{ji}\xi_j}, \otimes H^{\vec{s}} \rangle$$

であって,

$$\begin{aligned}
&\langle e^{-\hbar \sum_j a_{ji}\xi_j}, \otimes H^{\vec{s}} \rangle \\
=&\prod_j \langle e^{-\hbar a_{ji}\xi_j}, H_j^{s_j} \rangle \\
=&(-a_{1i})^{s_1} \cdots (-a_{ni})^{s_n}
\end{aligned}$$

となるので

$$\Delta(\eta_i) = \eta_i \otimes e^{-\hbar \sum_j a_{ji}\xi_j} + 1 \otimes \eta_i$$

が従う．

□

このことから代数同型 $U_q^- \simeq (U_q^+)^*$ をつくることができる．ただし $(U_q^+)^*$ には余積の構造を $\Delta^{\mathrm{opp}} = \tau\circ\Delta$ で考えていることにする．

命題 6.16. $\mathfrak{sl}_2$ での議論と同様に $D(U_q^+) = (U_q^+)^* \otimes U_q^+$ の代数構造は次のようになる．

$$\begin{aligned}
[X_i^+, \eta_j] &= \delta_{ij}\frac{e^{\hbar H_i} - e^{2\hbar\xi_i}}{\hbar}, \\
[X_i^+, \xi_j] &= -\delta_{ij}X_j^+, \\
[H_i, \eta_j] &= -\delta_{ij}a_{ij}\eta_j, \\
[H_i, \xi_j] &= 0, \\
[X_{\beta_r}^+, X_{\beta_r}^-] &= \frac{e^{\hbar H_{\beta_r}} - e^{-\hbar H_{\beta_r}}}{q - q^{-1}} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n, \quad r = 1, 2, \dots, N)
\end{aligned}$$

命題 6.16 から, カルタン行列 A の逆行列の第 (i, j) 成分を b_{ij} とおいたときに,

$$H_i \mapsto H_i, \quad \eta_{\beta_r} \mapsto \frac{q - q^{-1}}{\hbar}X_\beta^-, \quad \xi_i \mapsto \sum_j b_{ij}H_j \tag{6.42}$$

で定める全射準同型 $\phi\colon D(U_q^+) \to U_q^+$ を得る．これを用いて U_q での普遍 R 行列を得る．

$$\begin{aligned}
(\phi\otimes\phi)(\mathcal{R}) &= \exp(\hbar\sum_{ij} b_{ij}H_i \otimes H_j) \\
&\quad \times \sum_{t_N}\left(\frac{q^{t_N(t_N-1)/2}}{[t_N]!}(q - q^{-1})^{t_N}(X_{\beta_N}^+)^{t_N} \otimes (X_{\beta_N}^-)^{t_N}\right) \\
&\quad\quad \cdots \sum_{t_1}\left(\frac{q^{t_1(t_1-1)/2}}{[t_1]!}(q - q^{-1})^{t_1}(X_{\beta_1}^+)^{t_1} \otimes (X_{\beta_1}^-)^{t_1}\right) \\
&= \exp(\hbar\sum_{ij} b_{ij}H_i \otimes H_j)\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_N}\cdots\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_1}.
\end{aligned}$$

定理 6.17 (普遍 R 行列の積公式)**.** A, D, E 型の $\mathbb{C}$ 上の単純リー代数 $\mathfrak{g}$ の量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ における普遍 R 行列は

$$\exp(\hbar\sum_{ij} b_{ij}H_i \otimes H_j)\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_N}\cdots\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_1}. \tag{6.43}$$

で与えられる．ここで b_{ij} は $\mathfrak{g}$ に付随するカルタン行列の逆行列の第 (i, j) 成分である．$\tilde{\mathcal{R}}_{\beta_r}$ は定義 6.8 を参照.

注意. ここでの余積の与え方は有限次元ホップ代数における余積 Δ をねじった $\Delta^{\mathrm{opp}} = \tau\circ\Delta$ に等しい. 余積の構造によって $\mathcal{R}$ の形は若干かわるが, $(H, \mathcal{R})$ が準三角ホップ代数ならば $(H^{\mathrm{opp}}, \mathcal{R}^{-1})$ も準三角ホップ代数になることに注意して容易に読み替えることができる.

7 普遍 R 行列の積公式の応用

アフィン型量子群の普遍 R 行列の積公式を紹介し, その応用について述べる. アフィン型の場合, 正ルートの数が有限でないため以上の構成ではまだ不足ではあるが, 類似の積公式が知られている.

定義 7.1 (定義 2.21 の再掲)**.** q を 0,±1 でない複素数の元とする. $U_q = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ は以下で定まる代数である.

$$\begin{aligned}
\text{生成元：}\quad & X_i^+,\ X_i^-,\ K_i,\ K_i^{-1} \quad (i=0,1),\ c,\ d \\
\text{基本関係式：}\quad & K_0K_1 = K_1K_0 = q^c, \quad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1 \quad (i=0,1), \\
& [c, U_q(\widehat{sl}_2)] = 0, \quad [d, X_i^{\pm}] = \pm\delta_{i,0}X_i^{\pm}, \quad (i=0,1) \\
& K_iX_i^{\pm} = q^{\pm 2}X_i^{\pm}K_i, \quad (i=0,1), \quad K_iX_j^{\pm} = q^{\mp 2}X_j^{\pm}K_i, \quad (i,j=0,1,\ i\neq j) \\
& \left[X_i^+, X_j^-\right] = \delta_{i,j}\frac{K_i - K_j^{-1}}{q-q^{-1}} \quad (i,j=0,1,\ i\neq j), \\
& [X_i^{\pm}, [X_i^{\pm}, [X_i^{\pm}, X_j^{\pm}]_{q^2}]_{q^0}]_{q^{-2}} = 0 \quad (i,j=0,1,\ i\neq j).
\end{aligned} \tag{7.1}$$

ここで $[X,Y]_q = XY - qYX$ である.

7.1 アフィン型量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の普遍 R 行列

定理 7.2 ([KT], [伊藤])**.** アフィン型量子群 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の普遍 R 行列は次の形であたえられる:

$$\mathcal{R} = \Theta q^{-T}. \tag{7.2}$$

ここで, $T = \frac{1}{2}h_1 \otimes h_1 + c\otimes d + d\otimes c$, $q^{h_i} = K_i$ である. 以下では Θ の具体的な表示式を記す. これが ($U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の場合における) 簡約 R 行列の積公式である.

定義 7.3.

$$\begin{aligned}
\Theta &= \overrightarrow{\prod_{n\geq 0}}\Theta_{\alpha_1+n\delta} \times \overleftarrow{\prod_{n\geq 1}}\Theta_{n\delta} \times \overleftarrow{\prod_{n\geq 1}}\Theta_{n\delta-\alpha_1} \\
&= (\Theta_{\alpha_1}\Theta_{\alpha_1+\delta}\Theta_{\alpha_1+2\delta}\cdots) \times (\ldots\Theta_{3\delta}\Theta_{2\delta}\Theta_{\delta}) \times (\cdots\Theta_{3\delta-\alpha_1}\Theta_{2\delta-\alpha_1}\Theta_{\delta-\alpha_1}).
\end{aligned} \tag{7.3}$$

正ルート α に対して各 Θ_α は q-指数関数, および指数関数を用いて次のように書ける. 正ルートについては例 2.40 を参照する.

$$\Theta_{\alpha_1+n\delta} = \exp_q\left(-(q-q^{-1})E_{\alpha_1+n\delta}\otimes F_{\alpha_1+n\delta}\right), \tag{7.4}$$

$$\Theta_{n\delta-\alpha_1} = \exp_q\left(-(q-q^{-1})E_{n\delta-\alpha_1}\otimes F_{n\delta-\alpha_1}\right), \tag{7.5}$$

$$\Theta_{n\delta} = \exp\left(-\frac{n(q-q^{-1})}{[2m]_q}A_n\otimes B_n\right), \tag{7.6}$$

ただし, E_α, F_α は 正実ルート α に対して定まる U_q の元である. これらをルートベクトルといい以下で定義

される.

$$E_{\alpha_i} = X_i^+, \quad \Phi_1 = E_{\alpha_0}E_{\alpha_1} - q^{-2}E_{\alpha_1}E_{\alpha_0}, \tag{7.7}$$

$$E_{\alpha_1+n\delta} = \left(\frac{1}{[2]_q}\mathrm{ad}\Phi_1\right)^n E_{\alpha_1}, \tag{7.8}$$

$$E_{(n+1)\delta-\alpha_1} = \left(-\frac{1}{[2]_q}\mathrm{ad}\Phi_1\right)^n E_{\alpha_0}, \tag{7.9}$$

$$\Phi_m = E_{\alpha_0}E_{\alpha_1+(m-1)\delta} - q^{-2}E_{\alpha_1+(m-1)\delta}E_{\alpha_0}. \tag{7.10}$$

虚ルート $n\delta$ に対応するルートベクトル A_n $(n \geq 1)$ を定義する. これは 次で与える $A(X)$ を母関数に持つ U_q の元の列である.

$$A(X) = (q - q^{-1})\sum_{m\geq 1} A_m X^m, \tag{7.11}$$

式 (7.10) を用いて

$$\Phi(X) = (q - q^{-1})\sum_{m\geq 1} \Phi_m X^m \tag{7.12}$$

と置くとき

$$A(X) = \log(1 + \Phi(X)) = \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m}(\Phi(X))^m \tag{7.13}$$

を満たすものとする. 以上で虚ルートベクトル A_n と 正ルートベクトル E_α が定義できた. $\Omega\colon U_q \longrightarrow U_q$ を

$$E_i \mapsto F_i,\ F_i \mapsto E_i,\ K_i \mapsto K_i^{-1},\ q \mapsto q^{-1} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

で定める $\mathbb{Q}$ 上の反代数準同型とする. 反代数準同型というのは和に関しては加法準同型であり, 積に関して $\Omega(xy) = \Omega(y)\Omega(x)$ $(x, y \in U_q)$ を満たす写像のことである. この Ω を用いて $B_n \in U_q$ および正実ルート α に対して定まる $F_\alpha \in U_q$ を次で定める:

$$F_{\alpha_1+n\delta} = \Omega(E_{\alpha_1+n\delta}),\ F_{(n+1)\delta-\alpha_1} = \Omega(E_{(n+1)\delta-\alpha_1}),\ B_n = \Omega(A_n).$$

記号の定義が長くなってしまったが, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の普遍 R 行列 (または普遍簡約 R 行列) を定義することができた.

7.2 積公式の応用 (壁越え公式)

簡約 R 行列の積公式の応用例を紹介する.

7.2.1 表現の準備

U^+ を X_i^+, $K_i^\pm$, c, d で生成される U_q の部分代数, U^- を X_i^-, $K_i^\pm$, c, d で生成される U_q の部分代数とする. $\mathbb{C}[e^{\pm\alpha_0}, e^{\pm\alpha_1}]$, を 文字 $e^{\pm\alpha_i}$ で生成される多項式環と置く.

命題 7.4.

(1) 次で定める U^+, U^- の表現 ρ^+, ρ^- が存在する.

$$\begin{aligned}
&\rho^+ : U^+ \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}[e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1}]) \\
&\quad X_0^+ \mapsto e_0 := q^{\partial\varepsilon_0} e^{\alpha_0}, X_1^+ \mapsto e_1 := q^{-\partial\varepsilon_1} e^{\alpha_1}, \\
&\rho^- : U^- \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}[e^{-\alpha_0}, e^{-\alpha_1}]) \\
&\quad X_0^- \mapsto f_0 := q^{-\partial\varepsilon_0} e^{-\alpha_0}, f_1 := X_1^- \mapsto q^{\partial\varepsilon_1} e^{-\alpha_1}.
\end{aligned}$$

ここで, $\partial\varepsilon$ は $e^\alpha \mapsto (\alpha, \varepsilon) e^\alpha$ で定める差分とする. また ε は カルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ の元で $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{i.j}$ を満たすとする.

(2) (1) の自己準同型環 $\mathrm{End}(\mathbb{C}[e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1}])$ のなかで

$$e_1 e_0 = q^2 e_0 e_1, \quad f_1 f_0 = q^2 f_0 f_1 \tag{7.14}$$

が成り立つ.

証明はいずれも計算により容易である. 以下では e_i, f_i の具体的な表示は使わず, (7.14) の関係式のみを使う. そのような仮定が空でないことをこの命題は示している. 上で定めた表現は (7.14) を満たす関係式を持つ代数への準同型の例にすぎない.

7.2.2 表現の像の計算その一

(7.3) の Θ の $\rho^+ \otimes \rho^-$ による像を計算する. 定義により

$$\rho^+(\Phi_1) = \rho^+(E_{\alpha_0} E_{\alpha_1} - q^{-2} E_{\alpha_1} E_{\alpha_0}) = e_0 e_1 - q^{-2} e_1 e_0 = 0$$

このことからほとんどのルートベクトルが $\rho^+ \otimes \rho^-$ で潰れる (ゼロになる). よって

$$\begin{aligned}
(\rho^+ \otimes \rho^-)(\Theta) &= (\rho^+ \otimes \rho^-)(\Theta_{\alpha_1})(\rho^+ \otimes \rho^-)(\Theta_{\alpha_0}) \\
&= \exp_q(-(q - q^{-1}) e_1 \otimes f_1) \exp_q(-(q - q^{-1}) e_0 \otimes f_0) \\
&= \mathbf{E}(-(q - q^{-1})^2 e_1 \otimes f_1) \mathbf{E}(-(q - q^{-1})^2 e_0 \otimes f_0).
\end{aligned} \tag{7.15}$$

ここで最後の等式 (7.15) は命題 1.6 をもちいた.

7.2.3 表現の像の計算その二

U_q の生成元と基本関係式を眺めてみると, 生成元の番号の入れ替えの対称性を持つ. 番号を入れ替えて得られるルートベクトル E_α, A_n などの記号にすべて $'$ をつけて E'_α, A'_n などと表記する. それらから構成された簡約 R 行列を Θ' とおくと

$$\Theta' = \Theta \tag{7.16}$$

となる. 以下では Θ' の $\rho^+ \otimes \rho^-$ による像を計算する.

$$\Phi'_1 = E'_{\alpha_0} E'_{\alpha_1} - q^{-2} E'_{\alpha_1} E'_{\alpha_0} = E_{\alpha_1} E_{\alpha_0} - q^{-2} E_{\alpha_0} E_{\alpha_1} \xmapsto{\rho^+} (q^2 - q^{-2}) e_0 e_1$$

だから $\rho^+ \otimes \rho^-$ の像で消えない. このことに注意して各々のルートベクトルの表現の像を計算していく. 以下では $\xmapsto{\rho^+}$ を $\longmapsto$ と略記する.

$$E'_{\alpha_0} = E_{\alpha_1} \mapsto e_1, \quad E'_{\alpha_1} = E_{\alpha_0} \mapsto e_0, \tag{7.17}$$

$$\Phi'_1 \mapsto (q^2 - q^{-2}) e_0 e_1. \tag{7.18}$$

となる.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{[2]}[\Phi_1', E_1'] \longmapsto & \frac{1}{[2]}(q^2-q^{-2})[e_0e_1, e_0] \\
&= \frac{1}{[2]}(q^2-q^{-2})(1-q^{-2})e_0e_1e_0 \\
&= q^{-1}(q-q^{-1})^2 e_0e_1e_0.
\end{aligned} \tag{7.19}
$$

これによって

$$
E'_{\alpha_1+n\delta} \longmapsto e'_{\alpha_1+n\delta} := q^{-n}(q-q^{-1})^{2n}(e_0e_1)^n e_0 \quad (n \geq 1). \tag{7.20}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{[2]}[\Phi_1', E_0'] \longmapsto & -\frac{1}{[2]}(q^2-q^{-2})[e_0e_1, e_1] \\
&= -\frac{1}{[2]}(q^2-q^{-2})(1-q^{2})e_0e_1e_0 \\
&= q(q-q^{-1})^2 e_0e_1e_0.
\end{aligned} \tag{7.21}
$$

これによって

$$
E'_{(n+1)\delta-\alpha_1} \longmapsto e'_{(n+1)\delta-\alpha_1} := q^{n}(q-q^{-1})^{2n}(e_0e_1)^n e_0 \quad (n \geq 0). \tag{7.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_n' =& E_0'E'_{\alpha_1+(n-1)\delta} - q^{-2}E'_{\alpha_1+(n-1)\delta}E_0' \\
&\longmapsto q^{-(n-1)}(q-q^{-1})^{2(n-1)}(e_1(e_0e_1)^{n-1}e_0 - q^{-2}(e_0e_1)^{n-1}e_0e_1) \\
&= q^{-(n-1)}(q-q^{-1})^{2(n-1)}(q^{2n}-q^{-2})(e_0e_1)^n.
\end{aligned} \tag{7.23}
$$

次に虚ルート A_n の像を計算したい. 文字 $a := (q-q^{-1})^2e_0e_1$ とおくと.

$$
\phi_n' := \rho^+(\Phi_n') = \frac{q}{(q-q^{-1})^2}(qa)^n - \frac{q^{-1}}{(q-q^{-1})^2}(q^{-1}a)^n. \tag{7.24}
$$

これから

$$
\begin{aligned}
\rho^+(1+\Phi'(X)) = 1 + (q-q^{-1})\sum_{n=n}^{\infty}\phi_n' X^n &= 1 + \frac{q}{q-q^{-1}}\frac{qaX}{1-qaX} - \frac{q^{-1}}{q-q^{-1}}\frac{q^{-1}aX}{1-q^{-1}aX} \\
&= \frac{1}{(1-qaX)(1-q^{-1}aX)}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\log(\rho^+(1+\Phi'(X))) = -\log(1-qaX) - \log(1-q^{-1}aX) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}((qa)^n + (q^{-1}a)^n)X^n.
$$

ゆえに

$$
a_n := \rho^+(A_n) = \frac{(qa)^n + (q^{-1}a)^n}{n(q-q^{-1})}.
$$

以上の結果をまとめると $n \geq 1$ について

$$
e'_{\alpha_1+n\delta} = q^{-n}(q-q^{-1})^{2n}(e_0e_1)^n e_0, \tag{7.25}
$$

$$
e'_{(n+1)\delta-\alpha_1} = q^{n}(q-q^{-1})^{2n}(e_0e_1)^n e_0, \tag{7.26}
$$

$$
a_n = \frac{(qa)^n + (q^{-1}a)^n}{n(q-q^{-1})}, \quad a = (q-q^{-1})^2 e_0e_1 \tag{7.27}
$$

$\omega(e_i)=f_i,\omega(f_i)=e_i,\omega(q)=q^{-1}\quad(i=0,1)$ と置くと $\omega\rho^{\pm}=\rho^{\pm}\Omega$ である. Ω が反代数射であったことに注意すると

$$f'_{\alpha_1+n\delta}:=\rho^{-}(F'_{\alpha_1+n\delta})=q^n(q-q^{-1})^{2n}(f_0f_1)^nf_0, \tag{7.28}$$

$$f'_{(n+1)\delta-\alpha_1}:=\rho^{-}(F'_{(n+1)\delta-\alpha_1})=q^{3n}(q-q^{-1})^{2n}(f_0f_1)^nf_0, \tag{7.29}$$

$$b_n:=\rho^{-}(B_n)=-\frac{(qb)^n+(q^{-1}b)^n}{n(q-q^{-1})}\quad b=(q-q^{-1})^2f_1f_0=q^2(q-q^{-1})f_0f_1. \tag{7.30}$$

7.2.4 表現の像の計算その二 (続)

正ルート α に対応した Θ_α の計算を行う

$$\begin{aligned}
\prod_{n>0}^{\leftarrow}\Theta'_{n\delta}&=\prod_{n>0}\exp\left(-\frac{n(q-q^{-1})}{[2n]}a_n\otimes b_n\right)\\
&=\prod_{n>0}\exp\left(-\frac{n(q-q^{-1})}{[2n]}\frac{(qa)^n+(q^{-1}a)^n}{n(q-q^{-1})}\otimes(-1)\frac{(qb)^n+(q^{-1}b)^n}{n(q-q^{-1})}\right)\\
&=\prod_{n>0}\exp\left(\frac{1}{n(q^{2n}-q^{-2n})}(q^n+q^{-n})^2(a\otimes b)^n\right)\\
&=\prod_{n>0}\exp\left(-\frac{q^n}{n(1-q^{2n})}(q^n+q^{-n})(a\otimes b)^n\right)\\
&=(a\otimes b\,;q^2)_\infty(q^2a\otimes b\,;q^2)_\infty. && (7.31)\\
&=\mathbf{E}(-q^{-1}a\otimes b)^{-1}\mathbf{E}(-qa\otimes b)^{-1} && (7.32)
\end{aligned}$$

(7.31) では命題 1.8 を用いた. 記号 a,b などは (7.27),(7.30) を参照すること. また

$$\begin{aligned}
\Theta_{\alpha_1+n\delta}&=\exp_q(-(q-q^{-1})e_{\alpha_1+n\delta}\otimes f_{\alpha_1+n\delta})\\
&=\mathbf{E}(-(q-q^{-1})^{4n+2}(e_0e_1)^ne_0\otimes(f_0f_1)^nf_0), && (7.33)\\
\Theta_{(n+1)\delta-\alpha_1}&=\exp_q(-(q-q^{-1})e_{(n+1)\delta-\alpha_1}\otimes f_{(n+1)\delta-\alpha_1})\\
&=\mathbf{E}(-q^4(q-q^{-1})^{4n+2}(e_0e_1)^ne_1\otimes(f_0f_1)^nf_1). && (7.34)
\end{aligned}$$

となる. 以上の事から $(\rho^+\otimes\rho^-)(\Theta')$ が計算できたことになるが, まとめる前にいくつか記号を用意して見通しの良い形に修正する.

$$y_i=-(q-q^{-1})^2e_i\otimes f_i\quad(i=0,1) \tag{7.35}$$

とおき

$$y_{m,n}=q^{2mn}y_0^my_1^n=q^{-2mn}y_1^ny_0^m \tag{7.36}$$

とおく. $(y_0y_1)^n=q^{2n(n-1)}y_0^ny_1^n$ に注意すると

$$\begin{aligned}
a\otimes b=q^2(q-q^{-1})^4e_0e_1\otimes f_0f_1=q^2y_0y_1=y_{1,1},\\
-(q-q^{-1})^{4n+2}(e_0e_1)^ne_0\otimes(f_0f_1)^nf_0=y_{n+1,n},\\
q^4(q-q^{-1})^{4n+2}(e_0e_1)^ne_1\otimes(f_0f_1)^nf_1=y_{n.n+1}.
\end{aligned}$$

以上の記号の整理のもとで等式

$$(\rho^+\otimes\rho^-)(\Theta)=(\rho^+\otimes\rho^-)(\Theta') \tag{7.37}$$

から次の等式が得られることになる:

定理 7.5 (壁越え公式)**.** y_1, y_0 を $y_1y_0 = q^4y_0y_1$ が成り立つ文字とする. $\mathbf{E}(x) = (-qx\,;q^2)_\infty^{-1}$, $y_{ij} = q^{-2ij}y_0^iy_1^j$ $(i,j \geq 0)$ とおく. このとき, 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(y_1)\mathbf{E}(y_0) &= \prod_{n\geq 0}^{\rightarrow}\mathbf{E}(y_{n+1,n}) \times \mathbf{E}(q^{-1}y_{1,1})\mathbf{E}(qy_{1,1}) \times \prod_{n\geq 0}^{\leftarrow}\mathbf{E}(y_{n,n+1}) \\ &= (\mathbf{E}(y_0)\mathbf{E}(y_{2,1})\mathbf{E}(y_{3,2})\mathbf{E}(y_{4,3})\mathbf{E}(y_{5,4})\cdots) \\ &\qquad \times \mathbf{E}(-q^{-1}y_{1,1})^{-1}\mathbf{E}(-qy_{1,1})^{-1} \times (\cdots\mathbf{E}(y_{4,5})\mathbf{E}(y_{3,4})\mathbf{E}(y_{2,3})\mathbf{E}(y_{1,2})\mathbf{E}(y_1)).\end{aligned} \tag{7.38}$$

注意. 定理 7.5 は [DGS], [KS] における考察で得られた壁越え公式 (Wall Crossing Formula) の一つである.

7.2.5 その他の等式

命題 7.6 ([DGS])**.** x_0, x_1 を $x_1x_0 = q^2x_0x_1$ を満たす文字とする. $\mathbf{U}_{m,n} = \mathbf{E}(q^{-mn}x_1^mx_0^n)$ と置いたとき

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{2,-1}\mathbf{U}_{0,1} =& (\mathbf{U}_{0,1}\mathbf{U}_{2,1}\mathbf{U}_{4,1}\cdots) \\ &\times \mathbf{E}(-q^{-1}x_1^2)^{-1}\mathbf{E}(-qx_1^2)^{-1} \\ &\qquad \times (\cdots\mathbf{U}_{6,-1}\mathbf{U}_{4,-1}\mathbf{U}_{2,-1}).\end{aligned} \tag{7.39}$$

式 (7.39) において $x^2 = y_{1,1}$, $x_0 = y_0$ と変換すれば定理 7.5 の式 (7.38) と完全に一致する. 命題 7.6 は物理学的な考察で得られたものであるが, 定理 7.5 はその考察の結果が数学的にも正しい事を主張している. また [DGS] では次の等式も成り立つと述べられている.

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{1,-1}\mathbf{U}_{1,0}\mathbf{U}_{0,1} =& (\mathbf{U}_{0,1}\mathbf{U}_{1,1}\mathbf{U}_{2,1}\mathbf{U}_{3,1}\cdots)\mathbf{U}_{1,0}^2 \\ &\times \mathbf{E}(-q^{-1}x_1^2)^{-1}\mathbf{E}(-qx_1^2)^{-1} \\ &\qquad \times (\cdots\mathbf{U}_{3,-1}\mathbf{U}_{2,-1}\mathbf{U}_{1,-1}),\end{aligned} \tag{7.40}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{1,-1}^2\mathbf{U}_{0,-1}^2 =& (\mathbf{U}_{0,1}^2\mathbf{U}_{1,1}^2\mathbf{U}_{2,1}^2\mathbf{U}_{3,1}^2\cdots) \\ &\times \mathbf{U}_{1,0}^4\mathbf{E}(-q^{-1}x_1^2)^{-1}\mathbf{E}(-qx_1^2)^{-1} \\ &\qquad \times (\cdots\mathbf{U}_{3,-1}\mathbf{U}_{2,-1}\mathbf{U}_{1,-1}),\end{aligned} \tag{7.41}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{1,-2}\mathbf{U}_{0,1}^4 =& (\mathbf{U}_{0,1}^4\mathbf{U}_{1,2}\mathbf{U}_{1,1}^4\mathbf{U}_{3,2}\mathbf{U}_{2,1}\cdots) \\ &\times \mathbf{U}_{1,0}^6\mathbf{E}(-q^{-1}x_1^2)^{-1}\mathbf{E}(-qx_1^2)^{-1} \\ &\qquad \times (\mathbf{U}_{2,-1}^4\mathbf{U}_{3,-2}\mathbf{U}_{1,-1}^4\mathbf{U}_{1,-2}).\end{aligned} \tag{7.42}$$

各々の式 (7.40), (7.41), (7.42) は $\mathrm{A}_2^{(1)}$, $\mathrm{A}_3^{(1)}$, $\mathrm{D}_4^{(1)}$ の型の量子群の普遍 R 行列の積公式から導出されると予想される.

7.3 積公式の応用 (三角関数解の構成)

π_z を定義 4.6 で述べた $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ の表現とする. テンソル積表現の像 $(\pi_z \otimes \pi_w)(\mathcal{R})$ を求めよう.

命題 7.7. $(\pi_z \otimes \pi_w)(\mathcal{R})$ は定数倍を除いて

$$\begin{bmatrix} qz - q^{-1}w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z - w & (q-q^{-1})w & 0 \\ 0 & (q-q^{-1})z & z - w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & qz - q^{-1}w \end{bmatrix} \tag{7.43}$$

に等しい. これは (4.21) と一致する.

証明. $i, j = 1, 2$ に対して e_{ij} を (i, j) 成分が 1 その他が 0 の行列単位と置く．このとき

$$\pi_z(E_{\alpha_0}) = ze_{21}, \quad \pi_z(F_{\alpha_0}) = z^{-1}e_{12}, \quad \pi_z(E_{\alpha_1}) = e_{12}, \quad \pi_z(F_{\alpha_1}) = e_{21}, \quad \pi_z(c) = 0$$

となることに注意する.

7.3.1 実ルートベクトルの像の計算

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= E_{\alpha_0}E_{\alpha_1} - q^{-2}E_{\alpha_1}E_{\alpha_0} \\ &= ze_{21}e_{12} - q^{-2}ze_{12}e_{21} \\ &= ze_{22} - q^{-2}ze_{11} = q^{-1}z(qe_{22} - q^{-1}e_{11}).\end{aligned} \tag{7.44}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{[2]_q}[\Phi, E_{\alpha_1}] &\xmapsto{\pi_z} \frac{q^{-1}z}{[2]_q}[qe_{22} - q^{-1}e_{11}, e_{12}] \\ &= \frac{q^{-1}z}{[2]_q}(-q^{-1}e_{12} - qe_{12}) \\ &= -\frac{1}{[2]_q}q^{-1}z(q + q^{-1})e_{12} = -q^{-1}ze_{12}.\end{aligned} \tag{7.45}$$

これから

$$E_{\alpha_1+n\delta} \xmapsto{\pi_z} (-q^{-1}z)^n e_{12}, \quad F_{\alpha_1+n\delta} \xmapsto{\pi_z} (-qz^{-1})^n e_{21}$$

となる．また

$$\begin{aligned}\frac{1}{[2]_q}[\Phi, E_{\alpha_0}] &\xmapsto{\pi_z} \frac{q^{-1}z}{[2]_q}[q^{-1}e_{11} - qe_{22}, ze_{21}] \\ &= \frac{q^{-1}z}{[2]_q}(-qze_{21} - q^{-1}ze_{21}) \\ &= -q^{-1}z(ze_{21}).\end{aligned} \tag{7.46}$$

これから

$$E_{(n+1)\delta-\alpha_1} \xmapsto{\pi_z} (-q^{-1}z)^n ze_{21}, \quad F_{(n+1)\delta-\alpha_1} \xmapsto{\pi_z} (-qz^{-1})^n z^{-1}e_{12}$$

となる.

7.3.2 虚ルートベクトルの像の計算

$$\begin{aligned}\Phi_n =& E_{\alpha_0}E_{\alpha_1+(n-1)\delta} - q^{-2}E_{\alpha_1+(n-1)\delta}E_{\alpha_0} \\ \xmapsto{\pi_z}& (-q^{-1}z)^n(q^{-1}e_{11} - qe_{22})\end{aligned} \tag{7.47}$$

だから

$$\begin{aligned}
1+\Phi(X) &= I_2+(q-q^{-1})(q^{-1}e_{11}-qe_{22})\sum_{n=1}^{\infty}(-q^{-1}z)^n X^n \\
&= I_2-(q-q^{-1})(q^{-1}e_{11}-qe_{22})\frac{q^{-1}zX}{1+q^{-1}zX} \\
&= \frac{(1+q^{-1}zX)(e_{11}+e_{22})-q^{-1}zX(q-q^{-1})(q^{-1}e_{11}-qe_{22})}{1+q^{-1}zX} \\
&= \frac{(1+q^{-3}zX)e_{11}+(1+qzX)e_{22}}{1+q^{-1}zX} \\
&= \frac{1}{1+q^{-1}zX}\left(I_2+q^{-1}zX\begin{bmatrix} q^{-2} & 0 \\ 0 & q^2 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned} \tag{7.48}$$

したがって

$$\log(1+\Phi(X))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-q^{-1}z)^n}{n(q-q^{-1}}\begin{bmatrix} 1-q^{-2n} & 0 \\ 0 & 1-q^{2n} \end{bmatrix}. \tag{7.49}$$

よって

$$\pi_z(A_n)=\frac{(-q^{-1}z)^n}{n(q-q^{-1})}\begin{bmatrix} 1-q^{-2n} & 0 \\ 0 & 1-q^{2n} \end{bmatrix},\quad \pi_z(B_n)=\frac{-(-qz^{-1})^n}{n(q-q^{-1})}\begin{bmatrix} 1-q^{2n} & 0 \\ 0 & 1-q^{-2n} \end{bmatrix} \tag{7.50}$$

となる.

7.3.3 Θ の像の計算

$$\begin{aligned}
(\pi_z\otimes\pi_w)(\Theta_{n\delta}) &= \exp\left(-\frac{n(q-q^{-1})}{[2n]_q}\pi_z(A_n)\otimes\pi_w(B_n)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{(q^2z/w)^n}{n(1-q^{4n})}\begin{bmatrix} 1-q^{-2n} & 0 \\ 0 & 1-q^{2n} \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 1-q^{2n} & 0 \\ 0 & 1-q^{-2n} \end{bmatrix}\right).
\end{aligned} \tag{7.51}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1-q^{-2n} & 0 \\ 0 & 1-q^{2n} \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 1-q^{2n} & 0 \\ 0 & 1-q^{-2n} \end{bmatrix} \\
=&\mathrm{diag}((q^{-2n}-1)(q^{2n}-1),(q^{-2n}-1)(q^{-2n}-1),(q^{2n}-1)(q^{2n}-1),(q^{2n}-1)(q^{-2n}-1)) \\
=&\mathrm{diag}(2-q^{-2n}-q^{2n},1-2q^{-2n}+q^{-4n},1-2q^{2n}+q^{4n},2-q^{-2n}-q^{2n}) \\
=&\mathrm{diag}(2,0,0,2)-\mathrm{diag}(q^{-2n},0,0,q^{-2n})-\mathrm{diag}(q^{2n},0,0,q^{2n}) \\
&+\mathrm{diag}(0,1,1,0)-2\mathrm{diag}(0,q^{-2n},q^{2n},0)+\mathrm{diag}(0,q^{-4n},q^{4n},0)
\end{aligned} \tag{7.52}$$

によって $x=q^2z/w$ と置くと

$$
\begin{aligned}
&(\pi_z\otimes\pi_w)\left(\prod_{n=1}^{\infty}\Theta_{n\delta}\right)\\
=&\prod_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^n}{n(1-q^{4n})}\begin{bmatrix}q^{-2n}-1 & 0\\ & q^{2n}-1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}q^{2n}-1 & 0\\ 0 & q^{-2n}-1\end{bmatrix}\right)\\
=&\left(x\mathrm{diag}(1,0,0,1)\,;\,q^4\right)_\infty^2\left(x\mathrm{diag}(q^{-2},0,0,q^{-2})\,;\,q^4\right)_\infty^{-1}\left(x\mathrm{diag}(q^2,0,0,q^2)\,;\,q^4\right)_\infty^{-1}\\
&\times\left(x\mathrm{diag}(0,1,1,0)\,;\,q^4\right)_\infty\left(x\mathrm{diag}(0,q^{-2},q^2,0)\,;\,q^4\right)_\infty^{-2}\left(x\mathrm{diag}(0,q^{-4},q^4,0)\,;\,q^4\right)_\infty\\
=&\mathrm{diag}((x\,;\,q^4)_\infty,1,1,(x\,;\,q^4)_\infty)\mathrm{diag}((q^{-2}x\,;\,q^4)_\infty^{-1},1,1,(q^{-2}x\,;\,q^4)_\infty))\mathrm{diag}((q^2x\,;\,q^4)_\infty^{-1},1,1,(q^2x\,;\,q^4)_\infty))\\
&\times\mathrm{diag}(1,(x\,;\,q^4)_\infty,(x\,;\,q^4)_\infty,1)\mathrm{diag}(1,(q^{-2}x\,;\,q^4)_\infty^{-2},(x\,;\,q^4)_\infty^{-2},1)\mathrm{diag}(1,(q^{-4}x\,;\,q^4)_\infty,(q^4x\,;\,q^4)_\infty,1)\\
=&\mathrm{diag}\left(\frac{(x\,;\,q^4)_\infty^2}{(q^{-2}x\,;\,q^4)_\infty(q^2x\,;\,q^4)_\infty},\frac{(q^{-4}x\,;\,q^4)_\infty(x\,;\,q^4)_\infty}{(q^{-2}x\,;\,q^4)_\infty^2},\frac{(x\,;\,q^4)_\infty(q^4x\,;\,q^4)_\infty}{(q^2x\,;\,q^4)_\infty^2},\frac{(x\,;\,q^4)_\infty^2}{(q^{-2}x\,;\,q^4)_\infty(q^2x\,;\,q^4)_\infty}\right)\\
=&\frac{(x\,;\,q^4)_\infty^2}{(q^{-2}x\,;\,q^4)_\infty(q^2x\,;\,q^4)_\infty}\mathrm{diag}\left(1,\frac{1-q^{-4}x}{1-q^{-2}x},\frac{1-q^{-2}}{1-x},1\right)
\end{aligned}\tag{7.53}
$$

となる．また，

$$
\begin{aligned}
(\pi_z\otimes\pi_w)\left(\prod_{n=1}^{\infty}\Theta_{\alpha+n\delta}\right)&=(\pi_z\otimes\pi_w)\left(\prod_{n=1}^{\infty}\exp_q(-(q-q^{-1})E_{\alpha_1+n\delta}\otimes F_{\alpha+n\delta})\right)\\
&=(\pi_z\otimes\pi_w)\left(\prod_{n=1}^{\infty}(q(q-q^{-1})^2E_{\alpha_1+n\delta}\otimes F_{\alpha+n\delta}\,;\,q^2)_\infty^{-1}\right)\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}(q(q-q^{-1})^2(z/w)^ne_{12}\otimes e_{21}\,;\,q^2)_\infty^{-1}\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}\left(I_2+(q-q^{-1})(z/w)^ne_{12}\otimes e_{21}\right)_\infty^{-1}\\
&=I_2-\frac{q-q^{-1}}{1-z/w}e_{12}\otimes e_{21}.
\end{aligned}\tag{7.54}
$$

ここで $x^2=0$ なる文字に対して

$$
(x\,;\,q^2)_\infty=1+\frac{x}{q(q-q^{-1})},\quad (1+x)^{-1}=1-x
$$

が成り立つことに注意した．同様にして

$$
(\pi_z\otimes\pi_w)\left(\prod_{n=0}^{\infty}\Theta_{(n+1)\delta-\alpha_1}\right)=I_2-\frac{q-q^{-1}}{1-z/w}\cdot\frac{z}{w}e_{21}\otimes e_{12}.
$$

が成立する．以上から

$$
\begin{aligned}
&(\pi_z\otimes\pi_w)(\Theta)\\
=&\frac{(x;q^4)_\infty^2}{(q^{-2}x;q^4)_\infty(q^2x;q^4)_\infty}\left(I_2-\frac{q-q^{-1}}{1-z/w}e_{12}\otimes e_{21}\right)\\
&\times\mathrm{diag}\left(1,\frac{1-q^{-2}z/w}{1-z/w},\frac{1-z/w}{1-q^2z/w},1\right)\left(I_2-\frac{q-q^{-1}}{1-z/w}\frac{z}{w}e_{21}\otimes e_{12}\right).
\end{aligned}\tag{7.55}
$$

ヤン・バクスター方程式の解は定数倍を除いてもよいので

$$\frac{(x;q^4)_\infty^2}{(q^{-2}x;q^4)_\infty(q^2x;q^4)_\infty}$$

などの項は無視してよい.

$$\alpha=-\frac{q-q^{-1}}{1-z/w},\quad \beta=-\frac{q-q^{-1}}{1-z/w}\frac{z}{w}=\alpha z/w\ ,\quad \gamma_1=\frac{1-q^{-2}z/w}{1-z/w},\quad \gamma_2=\frac{1-z/w}{1-q^2z/w}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&\left(I_2-\frac{q-q^{-1}}{1-z/w}e_{12}\otimes e_{21}\right)\\
&\qquad\qquad\times\operatorname{diag}\left(1,\frac{1-q^{-2}z/w}{1-z/w},\frac{1-z/w}{1-q^2z/w},1\right)\left(I_2-\frac{q-q^{-1}}{1-z/w}\frac{z}{w}e_{21}\otimes e_{12}\right)\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&\alpha&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\gamma_1&0&0\\0&0&\gamma_2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&\beta&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\gamma_1+\alpha\beta\gamma_2&\alpha\gamma_2&0\\0&\gamma_2\beta&\gamma_2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1-z/w}{1-q^2z/w}&-\frac{q-q^{-1}}{1-q^2z/w}&0\\0&-\frac{q-q^{-1}}{1-q^2z/w}\frac{z}{w}&\frac{1-z/w}{1-q^2z/w}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}
\end{aligned}\tag{7.56}$$

となる. よって $(\pi_z\otimes\pi_w)(\Theta)$ は定数倍を除いて

$$\begin{bmatrix}qz-q^{-1}w&0&0&0\\0&q^{-1}(z-w)&q^{-1}(q-q^{-1})w&0\\0&q^{-1}(q-q^{-1})z&q^{-1}(z-w)&0\\0&0&0&qz-q^{-1}w\end{bmatrix}$$

と等しい.

7.3.4 q^{-T} の像の計算

$$(\pi_z\otimes\pi_w)(q^{-T})=q^{-H\otimes H/2}=\begin{bmatrix}q^{-1/2}&0&0&0\\0&q^{1/2}&0&0\\0&0&q^{1/2}&0\\0&0&0&q^{-1/2}\end{bmatrix}\tag{7.57}$$

だが, これは定数倍を除いて

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&q&0&0\\0&0&q&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

と等しい.

7.3.5 $\mathcal{R}$ の像の計算

以上から $(\pi_z \otimes \pi_w)(\mathcal{R})$ は定数倍を除いて

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} qz-q^{-1}w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1}(z-w) & q^{-1}(q-q^{-1})w & 0 \\ 0 & q^{-1}(q-q^{-1})z & q^{-1}(z-w) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & qz-q^{-1}w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} qz-q^{-1}w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z-w & (q-q^{-1})w & 0 \\ 0 & (q-q^{-1})z & z-w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & qz-q^{-1}w \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.58}
$$

と等しい. □

参考文献

[伊藤] 伊藤健. アフィン・リー代数の正ルート系上の凸順序の分類と量子展開代数の凸基底の構成及び普遍 R 行列の積公式. 名古屋大学学位論文. 2005 年 3 月

[神保-1] 神保道夫. 量子群とヤン・バクスター方程式. シュプリンガー・フェアラーク東京.1990. viii+134 pp.

[神保-2] M. Jimbo. A q-difference analogue of U($\mathfrak{g}$) and Yang-Baxter equation. Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63-69

[谷崎] 谷崎俊之. 量子群と R 行列. 1991 年 5 月 28 日から 31 日の東北大学における集中講義.

[武部] 武部尚志 著, 関谷信寛 記. 可解格子模型と共形場理論の話題から. 上智大学数学講究録. No.47.

[CP] V.Chari and A.Pressley. A Guide to Quantum Groups. Cambridge Universal Press, 1994. xv+651 pp.

[Dri] Drinfel'd, V. G. Quantum groups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798-820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[DGS] Dimofte,T.,Gukov,S.,Soibelman,Y.:Quantum wall crossing in $\mathcal{N} = 2$ gauge theories.Lett. Math/Phys. 95(2011), no. 1, 1-25.

[Kac] Kac VG. Infinite dimensional Lie algebra (2nd edn). Cambridge University Press. (1985)

[KS] Kontsevich, M., Soibelman, Y.: Stability structures, motivic donaldson-thomas invariants and cluster transformations (2008, preprint). arXiv:0811.2435

[KT] Khoroshkin, S. M.; Tolstoy, V. N. The Cartan-Weyl basis and the universal R-matrix for quantum Kac-Moody algebras and superalgebras. Quantum symmetries (Clausthal, 1991), 336-351, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1993.