

博士論文

一方向FRTPのマルチスケール解析に向けた
異方性粘弾性・塑性・損傷材料挙動の特徴付けと
構成則の構築

Characterization and material constitutive model considering
anisotropic visco elastic and plastic and damage for the purpose
of multiscale analysis of unidirectional FRTP

東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

山本 晃司

Koji YAMAMOTO

2020年 8月

Copyright © 2020 by Koji YAMAMOTO

寺田 賢二郎 教授
(主 査)

平山 紀夫 教授

京谷 孝史 教授

山川 優樹 准教授

Characterization and material constitutive model considering anisotropic visco elastic and plastic and damage for the purpose of multiscale analysis of unidirectional FRTP

ABSTRACT : In this study, macroscopic inelastic material property of carbon fiber reinforced thermoplastics (CFRTP) is observed in detail and anisotropic material constitute law is developed in order to realize multiscale analysis. CFRTP is attracting attention because of its excellent characteristics of high specific rigidity and strength, which can contribute to the weight reduction. In addition, thermoplastic resin can be re-melted by heating, which make them highly recyclable. However it is not easy to design a product made by CFRTP due to anisotropic mechanical property. To make matters more troublesome, CFRTP has also characteristics that combines various types of inelastic behavior since thermoplastic resin has a temperature dependent inelastic behavior. It is also important to design the CFRTP considering its inelastic behavior in order to use CFRTP in various applications. In this paper, three types of inelastic behaviors, visco elasticity, plasticity and damage which are important for the practical use of CFRTP are discussed.

In order to realize multiscale analysis, it is necessary to accurately characterize the anisotropic macroscopic material behavior of CFRTP and express it by the macroscopic material constitutive law. Macroscopic material behavior is observed by material testing in FEM simulation using micro scale model based on homogenization theory (NMT : Numerical material testing). The inelastic behavior of the resin constructing micro scale model of CFRTP is measured by real material testing. The inelastic behavior does not necessarily appear as a mixture of all features and only specific inelastic behavior can be made manifest by setting

the appropriate test conditions. So, we study each type of inelastic behavior separately.

Firstly, viscoelastic behavior of CFRTP is focused in chapter 2. The viscoelastic behavior of the resin can be independently observed by performing a vibration load test in a tiny strain range (DMA test). The temperature dependent viscoelastic properties are measured by performing DMA real test under various temperature conditions. The results indicated that the thermoplastic resin show strong temperature dependence not only on viscous properties which has been considered to be the main focus of the previous studies but also on the elastic modulus. Anisotropic stress relaxation characteristics of CFRTP is observed in NMT using a micro model that defines such temperature dependent properties for the resin. Two characteristics of the temperature dependence of CFRTP were revealed. First, the temperature dependence of the viscosity properties was confirmed to be isotropic and characteristic of the resin intact even when the resin is reinforced by carbon fiber. On the other hand, the temperature dependence of the modulus not only showed a strong anisotropy but also depends on the observation time. Material constitutive law is constructed to represent such temperature dependent of modulus by adding individual proportional multipliers for each coefficient of the elastic matrix that makes up anisotropic generalized Maxwell model. The effectiveness of the constitutive law is demonstrated by confirming the good fitting of the macroscopic stress relaxation properties obtained in NMT.

Anisotropic elastoplastic hardening behavior of CFRTP is discussed in chapter 3. It is confirmed that the thermoplastic resin has an almost isotropic hardening behavior from the results of tensile and compression cyclic load real test. In order to observe macroscopic initial yield surface of CFRTP, NMT are performed under several conditions where the stress ratio of in-plane shear and fiber perpendicular components is kept constant. In addition, the same analysis is performed for the state hardened by uniaxial tensile and shear pre-stress

in order to observe yield surface after hardening. It is confirmed that initial yield surface has bale like shape which is agreement with the shape predicted by the theory of Bimodal Plasticity. On the other hand, the macroscopic hardening behavior of CFRTP is found to be very unique despite the resin has isotropic hardening characteristic. The yield surface is expanded almost isotopically after pure shearing pre-stress, whereas yield surface changed to be hardened with a large overhang only in the pre-stressed direction in the case of pre-stress for fiber perpendicular direction. In other words, CFRTP has anisotropic hardening behavior that depends on the stress component and is characterized by the collapse of similarity of the yield surface. Based on these finding, new constitutive law that combines Bimodal Plasticity with anisotropic hardening is proposed. The yield surface is represented by a combination of multiple functions in Bimodal Plasticity. The anisotropic hardening behavior is expressed by developing back stress for only a specific yield function depended on the stress state. It is confirmed that the post hardening yield surfaces shown by the proposed constitutive law show good agreement with those obtained by NMT.

Lastly in chapter 4, integrated constitutive law that combines the anisotropic viscoelasticity and plasticity discussed so far in addition to damage is built in order to extend it to the most general purpose applications. The macroscopic material constitutive law discussed in this chapter is formulated for the plane stress problem because CFRTP is generally used in the form of thin laminated sheets. The damage is expressed by multiplying the damage variable by the modulus of elasticity that constitutes the generalized Maxwell model. Results of NMT suggest that CFRTP has anisotropic damage behavior. In macroscopic material constitutive law, the damage anisotropy is expressed by multiplying each coefficient of the elasticity matrix by a differently weighted damage variable. An example of macro structural analysis and localization analysis using stacked shell elements is also presented.

The analysis is performed under various fiber orientations and stacking sequence and the relative comparison of magnitudes of reaction force qualitatively confirmed that the macro analysis correctly reflected the defined fiber orientation. Furthermore, the distribution of the equivalent mechanical strain in the thickness direction is confirmed by both macroscopic and microscopic point of view. As a result, it is confirmed that the layer where the maximum equivalent mechanical strain occurs (first ply failure) is different between macroscopic analysis and localization analysis. In other words, it is important to evaluate the results from the microscopic point of view because the result from the macroscopic analysis may lead to misjudgment of the position for first ply failure.

In summary, this paper provides a more accurate insight into the anisotropic inelastic behavior of undirected CFRTP by NMT base on the homogenization method. We have succeeded in transferring macroscopic material behavior characterized by microscopic analysis to a macroscopic analytical model by constructing a material constitutive law to express it analytically. The anisotropic material behavior of CFRTP can be known only by taking advantage of the NMT and providing a wide variety of test conditions. In composite materials, it is not realistic to design products relying only on real test data and important to work together with NMT as in this study. Multi scale analysis is an excellent method that can contribute to a wide range of phases of product development from material design to product design. Since the benefits of composite materials have a significant impact on the solution of global environmental problems, they are expected to be used in a wider variety of application in the future. I expect that the knowledge of various inelastic behaviors and analytical approaches presented in this study will be of great use in product design in many fields.

謝 辞

本論文にまとめられた研究成果は、多くの方々からのご協力の上に成り立っております。

まずは、大学への入学当時、私の所属するサイバネットシステム株式会社の社長であった田中邦明さんと、営業部長であった深川司亮さんに深く感謝申し上げます。サイバネットシステムでは、博士号の取得を目指す社員を支援するための仕組みを策定することが検討されており、そのための試験運用として、沢山の候補者の中から私を選んでもくださいました。研究活動を開始するにあたって大変身の引き締まる思いでした。同社の統合管理統括部の深野健さん、中山始さん、古坂智子さんには、私の研究の進捗が思わしくない時期には、大変ご心配をおかけしてしまったと思いますが、いつも温かい目で見守ってくださいました。いつも私を気にかけてくださった同社の徳永祐一さん、松本真周さん、糸井豊さん、秋山誠さん、林垣新さん、佐々木隆宏さんに感謝いたします。研究に集中するための時間を確保するために有給休暇を連続して頂戴する場面も何度かありましたが、業務管理面で多大なフォローをしていただきました。私が入社時の上司であった石田智裕さんには、本研究に関係する多くの方々のつながりを作るきっかけを提供してくださいました。思い返すと、全てのはじまりは石田さんとの出会いにありました。そして、私と同じ製品を担当していた柚木和徳さん、Arief Gunawan さんには、私が上司として十分なフォローができない時期もありましたが、いつも丁寧に仕事を全うしてくれました。毎日の定時後に研究を進められたのは、現場の皆さんのお力添えがあったからこそです。ありがとうございました。

そして、研究室配属当初からの長きにわたり、多大なご指導をいただきました東北大学教授の寺田賢二郎先生と日本大学教授の平山紀夫先生に深く感謝いたします。平

日・祝日問わずに、いつも親身に研究の相談に乗っていただきました。また、打ち合わせのために、私の所属する会社の東京オフィスにまでご足労いただくことも多々ありました。尊敬するお二人のご指導のもとで研究できたことは一生の誇りです。また、本論文で使用する実験データは、当時平山先生の研究室に所属されていた学生の皆様にご協力いただきました。ご自身の学業や研究が忙しい中にご対応いただいた、染宮聖人さん(現日本大学)、田口尚輝さん(現日本精工株式会社)、土田翔夢さん(現株式会社アシックス)に感謝申し上げます。名古屋大学助教の松原成志朗先生には、材料構成則の定式化に関して沢山の助言を頂戴いたしました。ありがとうございました。

副査を引き受けてくださった東北大学教授の京谷孝史先生と、東北大学准教授の山川優樹先生に感謝申し上げます。中間発表会や論文下見会などでご意見をいただくたびに、論文の質が徐々に高まっていくことを実感いたしました。第3章の弾塑性に関する研究は、山川先生から頂戴したコメントをきっかけに急速に進展させることができました。株式会社くいと代表取締役の石井恵三会長にも大変お世話になりました。お食事にもお誘いいただきました。ご自身の博士号取得時のご経験などを聞かせていただき、とても為になっただけでなく、思うように研究がはかどらず弱気になっていた自分を鼓舞してもらいました。今思えば、あのお食事会が研究を進める上でのターニングポイントでした。ご馳走していただいたケーキの味は忘れません。いつか恩返しさせてください。秘書の芳賀麻由美さんには事務的な手続きをフォローしていただきました。いつもご丁寧にご対応してくださりありがとうございました。私と同じく社会人として入学された石橋慶輝さんとは、研究テーマが近いこともあって一緒に研究活動に取り組ませていただきました。キャンパスと離れて孤独に研究を続ける中で、同じような環境で切磋琢磨している仲間がいることがとても心強かったです。授業や研究のことで沢山のことを相談させてもらいました。ありがとうございました。最後に家族のみんなに感謝いたします。特に妻の絢子は、共働きしているにも関わらず、毎

日の家事のほとんどを引き受けてくれました。自宅でも研究に没頭できる環境を整えてくれたことに深く感謝いたします。

入学から論文を書き終えるまでの数年間をふりかえって、本当に多くの人達に支えられてきたことを改めて感じております。ご協力いただいた全ての皆様に重ねて御礼申し上げます。

令和2年8月

東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

計算安全工学研究室

山本 晃司

目 次

| | | |
|--------------|--------------------------------------|-----------|
| 第 1 章 | 序論 | 1 |
| 1.1 | 産業が直面する社会問題とその対策としての複合材料 | 1 |
| 1.2 | 本研究が対象とする複合材料の概要 | 4 |
| 1.3 | マルチスケール解析による複合材料解析 | 7 |
| 1.4 | マクロ材料構成則に関する先行研究 | 15 |
| 1.5 | 本研究の位置づけと目的 | 24 |
| 第 2 章 | 温度依存性の弾性率を考慮した異方性粘弾性の特徴づけと構成則 | 29 |
| 2.1 | 熱可塑性樹脂の粘弾性特性 | 30 |
| 2.1.1 | 供試材 | 30 |
| 2.1.2 | 実材料試験の条件 | 30 |
| 2.1.3 | 樹脂の粘弾性構成則 | 32 |
| 2.1.4 | 樹脂の応力発展の時間離散化 | 35 |
| 2.2 | 樹脂の材料物性値同定解析フロー | 36 |
| 2.3 | ポリカーボネート樹脂の材料特性 | 39 |
| 2.3.1 | ポリカーボネート樹脂のマスターカーブ | 39 |
| 2.3.2 | ポリカーボネート樹脂の粘弾性パラメータの同定 | 42 |
| 2.4 | 異方性の粘弾性構成則 | 44 |
| 2.4.1 | 異方性の一般化 Maxwell モデルとシフト関数 | 44 |

| | | |
|------------|---------------------------------|-----------|
| 2.4.2 | 応力発展の時間離散化 | 46 |
| 2.4.3 | パラメータの同定 | 47 |
| 2.5 | 数値材料試験によるマクロ材料挙動の特徴づけ | 49 |
| 2.5.1 | 解析条件 | 50 |
| 2.5.2 | 解析結果 | 51 |
| 2.6 | まとめ | 57 |
| 第3章 | 異方硬化を考慮した異方性弾塑性の特徴づけと構成則 | 61 |
| 3.1 | 異方性の降伏関数 | 62 |
| 3.1.1 | Hillの降伏関数 | 62 |
| 3.1.2 | バイモーダル塑性理論の降伏関数 | 64 |
| 3.2 | 熱可塑性エポキシ樹脂の弾塑性特性の同定 | 67 |
| 3.2.1 | 実材料試験の条件 | 67 |
| 3.2.2 | 実材料試験結果とカーブフィッティング | 69 |
| 3.3 | CFRTPの数値材料試験と弾塑性挙動の特徴づけ | 70 |
| 3.3.1 | 解析条件 | 70 |
| 3.3.2 | マクロ降伏点の評価方法 | 71 |
| 3.3.3 | 解析結果 | 73 |
| 3.4 | マクロ弾塑性構成則の定式化 | 76 |
| 3.4.1 | 降伏関数と異方硬化関数 | 77 |
| 3.4.2 | 各物理変数の発展則 | 83 |
| 3.4.3 | 構成則の時間離散化 | 84 |
| 3.4.4 | 面外方向のひずみ | 87 |
| 3.4.5 | 材料物性値の同定フロー | 91 |
| 3.5 | マクロ材料構成則の性能検証 | 93 |

| | | |
|--------------|-----------------------------------|------------|
| 3.6 | Off-Axis 試験による妥当性検証 | 108 |
| 3.6.1 | 角度をつけた CFRTP 材の実材料試験 | 108 |
| 3.6.2 | 仮想材料試験のための解析 | 110 |
| 3.6.3 | 実材料試験と解析結果の比較 | 112 |
| 3.7 | マルチスケール解析：マクロ解析および局所化解析 | 116 |
| 3.8 | まとめ | 122 |
| 第 4 章 | 平面応力問題に対応した異方性粘弾性・塑性・損傷構成則 | 127 |
| 4.1 | 熱可塑性樹脂の等方性損傷材料モデル | 128 |
| 4.2 | 等方性粘弾性・弾塑性・損傷の統合材料構成則 | 130 |
| 4.3 | ポリカーボネート樹脂の材料特性 | 134 |
| 4.3.1 | 実材料試験の条件 | 134 |
| 4.3.2 | 実材料試験結果とカーブフィッティング結果 | 134 |
| 4.4 | 異方性の損傷構成則 | 136 |
| 4.5 | 異方性粘弾性・塑性・損傷の統合材料構成則 | 137 |
| 4.5.1 | 平面応力状態の粘弾性構成則 | 137 |
| 4.5.2 | 弾性マトリクスの縮退 | 138 |
| 4.5.3 | 面外方向のひずみの発展 | 140 |
| 4.5.4 | 応力発展式 | 142 |
| 4.5.5 | 面内塑性変形のリターンマッピング方程式 | 143 |
| 4.5.6 | 面外ひずみ成分のリターンマッピング | 144 |
| 4.5.7 | リターンマッピング方程式の解 | 145 |
| 4.6 | CFRTP のマクロ構成則の性能検証 | 156 |
| 4.6.1 | 数値材料試験の条件 | 156 |
| 4.6.2 | 数値材料試験結果とカーブフィット | 157 |

| | | |
|------------|-------------------------------|------------|
| 4.7 | 積層理論を用いたマクロ解析と局所化解析 | 165 |
| 4.7.1 | 解析条件 | 166 |
| 4.7.2 | マクロ解析結果 | 167 |
| 4.7.3 | 局所化解析結果 | 172 |
| 4.8 | まとめ | 175 |
| 第5章 | 結論 | 183 |
| 補遺 A | 本研究で用いるユニットセルモデルの選定 | 189 |
| 参考文献 | | 197 |

表 目 次

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Young's modulus and density for steel, carbon fiber and typical resin. Carbon fiber has an-isotropic characteristics and shows high value only for longitudinal direction. | 5 |
| 1.2 | Overview of contents in each chapter. | 27 |
| 2.1 | Frequency and temperature levels for dynamic viscoelastic tests. | 31 |
| 3.1 | Material constants for pure thermoplastic epoxy resin. | 70 |
| 3.2 | Yield stress in tension and compression. Compression state in shearing mode is defined as $\sigma_{12} < 0$ | 74 |
| 3.3 | Input and output of physical information in material constitutive law for two types of stress states. | 89 |
| 3.4 | Identified material constants for two types of material constitutive law. | 94 |
| 3.5 | Angle of oblique tab for each fiber orientaion. | 109 |
| 4.1 | Material constants of polycarbonate resin considering damage characteristic as a results of curvefitting analysis. | 136 |
| 4.2 | Identified material constants related to plastic and damage characteristics. Visco-elastic properties have been already identified by DMA test shown in Chapter.2. | 161 |

目 次

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Microstructure of composite material reinforced by unidirectional fibers. Unidirectional reinforcement is the most basic form and used for many types of composite materials. | 7 |
| 1.2 | The change of density and orientation of fiber during press forming process. | 9 |
| 1.3 | The change of density and orientation of fiber during press forming process. | 10 |
| 1.4 | Conceptual diagram of multiscale analysis based on homogenization technique. | 14 |
| 1.5 | Five types of proposed shape for hardening by plastic deformation. | 22 |
| 1.6 | Yield surface made by function of Limeson of Pascal. | 23 |
| 1.7 | Rheology model proposed in this study. | 28 |
| 1.8 | Conceptual diagram for identification of material constants. | 28 |
| 2.1 | Configuration of dynamic viscoelastic test. | 31 |
| 2.2 | Generalized Maxwell model for anisotropic viscoelasticity. | 32 |
| 2.3 | Schematics of error functions to determine the shift functions for master curves. The gray area indicates the range for evaluating the error. The loss tangent and the storage modulus are used to identify horizontal and vertical shift values, respectively. | 38 |
| 2.4 | Master curves of storage modulus obtained with horizontal and vertical shift operations. | 40 |
| 2.5 | Master curves of loss modulus and loss tangent obtained with horizontal and vertical shift operations. | 41 |
| 2.6 | Evaluated shift properties for relaxation time and modulus: (a) Horizontal shift factor; (b) Vertical shift factor. Reference temperature is set at 150 degrees. | 42 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.7 | Fitting result of storage modulus with identified relaxation times and elastic moduli. | 43 |
| 2.8 | Finite element model for numerical material testing. | 50 |
| 2.9 | Components of macroscopic relaxation moduli tensor of CFRTP model. The responses of material model proposed in this study show good agreement with numerical test results. | 54 |
| 2.10 | Components other than those shown in previous page of macroscopic relaxation moduli tensor of CFRTP model. | 55 |
| 2.11 | Macroscopic horizontal shift property for each direction of CFRP model. | 55 |
| 2.12 | Macroscopic vertical shift property for each direction of CFRP model. All the components of vertical shift factors b_{ij}^{∞} are much smaller than that of the pure resin. Anisotropic behavior is observed for the vertical shift factors of the non-equilibrium parts b_{ij}^v and its tendency is not in agreement with the relaxation modulus. | 56 |
| 2.13 | Ratios of relaxation moduli of 30 [°C] to 150 [°C]. | 56 |
| 2.14 | Percentages of elastic moduli in equilibrium part with respect to relaxation moduli. The result of pure resin shows the C_{11} component as a representative. The fact that C_{11}^{∞}/C_{ij} is close to 100 % implies that the elastic property in the equilibrium part mostly contributes. | 57 |
| 3.1 | Geometry of conjugate slip systems under bi-axial stress state by σ_{22} and σ_{12} | 65 |
| 3.2 | Initial yield surface for Bimodal plasticity suggested by Dvorak et.all. | 67 |
| 3.3 | Stress strain curve for pure thermoplastic epoxy resin obtained by real material testing. Fitting result is also displayed for tension test. | 69 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.4 | Boundary conditions for numerical material tests. Tests for 32 types of stress ratio were carried out in order to create yield function. | 71 |
| 3.5 | Definition of plastic work. | 73 |
| 3.6 | Stress strain curve under cyclic loading for σ_{22} uniaxial and σ_{12} pure shearing deformation mode. | 74 |
| 3.7 | Yield surface for initial and hardened state after pre-load by shear stress σ_{12} | 76 |
| 3.8 | Yield surface for initial and hardened state after pre-load by normal stress σ_{22} | 76 |
| 3.9 | Initial yield surface for Bimodal plasticity | 79 |
| 3.10 | Yield surface after isotropic hardening behavior. | 82 |
| 3.11 | Yield surface after combination of isotropic and kinematic behavior. | 82 |
| 3.12 | Stress and strain history as a results of numerical material test for uniaxial and pure shearing test. | 90 |
| 3.13 | Parameter identification flow at first half for proposed elasto plastic constitutive law. | 92 |
| 3.14 | Parameter identification flow at second half for proposed elasto plastic constitutive law. | 93 |
| 3.15 | Results of numerical material test and curve fitting under the condition of cyclic loading for 22 direction. | 95 |
| 3.16 | Results of numerical material test and curve fitting under the condition of cyclic loading for 12 direction. | 95 |
| 3.17 | Stress strain curve under biaxial stress conditions for stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ is 11.25° | 96 |
| 3.18 | Stress strain curve under biaxial stress conditions for stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ is 22.50° and 33.75° | 97 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.19 | Stress strain curve under biaxial stress conditions for stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ is 45.00° and 56.25° | 98 |
| 3.20 | Stress strain curve under biaxial stress conditions for angle of stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ is 67.50° and 78.75° | 99 |
| 3.21 | Yield surface for initial and hardening state after pre-pstress by shear of 12 component, displayed on Fiber Dominant Mode. | 100 |
| 3.22 | Yield surface for initial and hardening state after pre-pstress by shear of 12 component, displayed on Matrix Dominant Mode. | 102 |
| 3.23 | Yield surface for initial and hardening state after pre-pstress by shear of 22 component, displayed on Matrix Dominant Mode. | 103 |
| 3.24 | Stress strain curve under the boundary condition of biaxial stress after hardening by normal stress σ_{22} . Stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ after hardening is 22.5° and 45.0° | 104 |
| 3.25 | Stress strain curve under the boundary condition of biaxial stress after hardening by normal stress σ_{22} . Stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ after hardening is 90.0° and 146.25° | 105 |
| 3.26 | Stress strain curve under the boundary condition of biaxial stress after hardening by shear stress σ_{12} . Stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ after hardening is 0.0° and 22.5° | 106 |
| 3.27 | Stress strain curve under the boundary condition of biaxial stress after hardening by shear stress σ_{12} . Stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ after hardening is 45.0° and 146.25° | 107 |
| 3.28 | Overview of CF RTP specimen for real material test. Specimen reinforced by fiber oriented to 22.5 degrees is displayed. | 109 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.29 | Overview of FE and results for the model simulating real test condition. Contour map is showing the distribution of equivalent total mechanical strain. | 111 |
| 3.30 | Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 0 degrees. | 113 |
| 3.31 | Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 22.5 degrees. | 114 |
| 3.32 | Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 45.0 degrees. | 114 |
| 3.33 | Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 67.5 degrees. | 115 |
| 3.34 | Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 90.0 degrees. | 115 |
| 3.35 | Overview of boundary conditions and FE model for macroscopic analysis. | 118 |
| 3.36 | Contour map for y component of displacement as a result of macroscopic analysis. | 118 |
| 3.37 | Contour map for hoop stress as a result of macroscopic analysis. | 119 |
| 3.38 | Contour map for in-plane shear stress as a result of macroscopic analysis. | 119 |
| 3.39 | Stress strain curve of 12 and 22 component at around the center of macroscopic model. Material response means the output of virtual material testings which is shown at figure 3.19 | 120 |
| 3.40 | Equivalent stress and strain distribution in microstructure as a result of localization analysis focused on around the center of macroscopic model. | 121 |
| 4.1 | Mechanism of damage occurrence in micro scale view point. | 129 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.2 | Rheology model of anisotropic material constitutive law integrating with visco elastic, plastic and damage.. | 132 |
| 4.3 | Results of real testing and fitting analysis for polycarbonate resin. | 135 |
| 4.4 | Five types of scenario which drive plastic and damage development. Plastic strain does not develop without damage. | 147 |
| 4.5 | Stress strain curve of CFRTP obtained by virtual material test for pure shearing mode of 12 direction. | 158 |
| 4.6 | Stress strain curve of CFRTP obtained by virtual material test for uniaxial mode of 22 direction. | 158 |
| 4.7 | Curve fitting results by proposed material model for uniaxial test. | 162 |
| 4.8 | Curve fitting results by proposed material model for pure shearing test. | 162 |
| 4.9 | Curve fitting results by proposed material model for biaxial test. | 163 |
| 4.10 | Curve fitting results by proposed material model for biaxial test. | 164 |
| 4.11 | History of strain for elastic element of pure term and maxwell term during virtual testing. | 165 |
| 4.12 | Overview of FE model and boundary conditions for macroscale analysis. | 167 |
| 4.13 | Equivalent stress distribution in the case that material axis angle is 0 degrees. Stacking sequence is $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{\text{sym}}$ | 168 |
| 4.14 | Plastic strain distribution in specimen for different stacking sequence. Angle of material principal axis is fixed as 45 [deg.]. | 170 |
| 4.15 | History of reaction force in the case of stacking sequence $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{\text{sym}}$ and $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_{\text{sym}}$ | 171 |
| 4.16 | History of reaction force in the case of stacking sequence $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{\text{sym}}$ | 172 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.17 | Equivalent strain distribution for thickness direction at center of the specimen. Localization analysis in graph means maximum equivalent strain in microstructure. | 174 |
| A.1 | Macroscopic stress strain curve obtained by virtual material test for uniaxial tension-compression mode of 22 direction. | 192 |
| A.2 | Macroscopic stress strain curve obtained by virtual material test for pure shearing mode of 12 direction. | 193 |
| A.3 | Four types of FE model in order to decide the thickness of unit cell for fiber oriented direction. | 194 |
| A.4 | Result comparison of numerical material testing for four types of FE models shown at FigureA.3. Boundary conditions for pure sharing mode are defined. | 195 |

写 真 目 次

第1章 序論

1.1 産業が直面する社会問題とその対策としての複合材料

我々人類の生活水準の向上の歴史をさかのぼると、工業の発展が大きく寄与していることに疑う余地はない。特に18世紀に登場した蒸気機関による動力源が我々の生活に与えたインパクトはすさまじく、世界の工業化に向けた動きが一気に加速し、社会構造までも変革された。俗に言う第一次産業革命である。その一翼を担ったのは、蒸気船や鉄道をはじめとした陸路・海路を活用する輸送機器であった。これにより社会活動を行う上での物理的な距離の制約は大きく改善された。このような人力を超えた動力により我々が恩恵を受けている構図は、それから300年程度を経た今でも、利用方法が多様化しているとはいえ基本的には変わらない。当初の時代背景は工業の利用という点に注目されることが一般的であるが、やがてパフォーマンスや安全性が重要視されはじめた。第2次産業革命の内燃機関がそれにあたる。内燃機関の実現には、高い圧力を保持するための高剛性・高強度を持つ金属材料が望まれた。同じく時代を席卷した電球は、発光素子であるフィラメントの高寿命化を実現するために、適した材料の探索に大変な試行錯誤がなされた。どのような時代であっても人類のアイデアを具現化するための鍵は「材料」にある。

一方、現代では第4次産業革命の時代と言われる。ドイツ政府が発案した Industry 4.0¹⁾ と呼ばれる「デジタル技術を用いた製造業の自動化」を旗印としてあげたプロジェクトがことの発端である。製造プロセスは、より一層自動化・効率化されて量産体制

に拍車がかかるであろう。電化製品はデジタル化され、インターネットに接続されることでその利便性はさらに増すであろうし、運用中のセンサー情報をリアルタイムで分析する Digital Twin 技術が実現すれば、メンテナンス性や安全性もまた増していくであろう。我々の生活をより便利にそして豊かにするため、科学技術の発展は留まることを知らない。

このように工業の発達によって我々は多様な恩恵を受けており、もはや工業なくして我々の生活は成り立たない時代に突入している。しかしながらその一方で、工業がもたらしてきた負の側面、しかも近年になって急速に顕在化している問題を決して無視してはならない。地球環境問題である。汚染はその最たる例である。地球に捨てられた人工的なプラスチック素材は、紫外線などによる風化の影響によって細かく砕かれるが、自然分解されることはなく、我々がトレースできないレベルにまで地球上の至る場所に蓄積あるいは浮遊している^{2,3)}。このようなマイクロプラスチックは、次第に海へと流れ込み、魚介類や食塩にも含まれていた事実は、世界中を震撼させた出来事として記憶に新しい⁴⁾。第3次産業革命の主役であった半導体産業では、電子デバイスと配線基板を機械的・電氣的に接合するために低融点の共晶はんだが用いられてきた。ところが後に、廃棄されたはんだに含まれる鉛が、人体や環境に悪影響を及ぼされることが指摘されて大きな社会問題に発展した。地球温暖化問題もまた深刻である。日本は亜熱帯化し海水温が上昇することによって、たび重なる豪雨や巨大台風に見舞われる状況が頻発している。近年の猛暑はもはや災害レベルといっても過言ではない。温暖化は温室効果ガスである CO₂ やメタン、フロンなどが主要因であると考えられている。特に CO₂ はその原因の大きな割合を占めており、石炭・石油・天然ガスなどの燃料が燃焼することにより大量に発生することから工業の発展との相関がとても高い。自動車等の輸送機器は、燃料の燃焼エネルギーが動力源として利用されてきたし、電化製品の動作源である電気エネルギーは、火力発電に代表される燃焼を利用した発電

技術によって供給されている。CO₂の削減効果を持つ森林が伐採されていることも相まってこの問題にはさらに拍車がかかっているのが現状である。

このような地球規模の環境問題が表面化するにつれて、我々の経済活動は大量生産・大量消費型のスタイルからの脱却を余儀なくされるようになった。いわゆるグリーンエコノミー、環境配慮型スタイルへのシフトである。政策面での動きとして、欧州では先に述べた汚染問題への対策のために RoHS 指令と呼ばれる法案が可決された。これにより、鉛や水銀、カドミウムなどの有害物質の利用が厳しく制限されたため、製品の輸出に向けて世界中の製造業者がその対策を義務づけられることになった⁵⁾。

対温暖化政策では、脱炭素社会を目指した国際条約である京都議定書やパリ協定が採択されたことが歴史上の大きなインパクトを残している。条約内にはCO₂排出量削減の目標値が明確に定められており、国際情勢が環境配慮型へ大きく舵を切るきっかけとなった。その成果は徐々に現れており、具体的な改善報告があるが⁶⁾、地球全体のCO₂量は以前として増加の一途を辿っているのが現状である^{7,8)}。近年は、シェアリングエコノミーも普及しており、工業製品の消費量を減らす取り組みも盛んである。また、電気エネルギーを生み出す発電施設は、風力、水力、波力といった自然由来のクリーンなエネルギーを利用したものへと代替されようとしているが、すべてを代替できるほど十分な発電量ではなく、発電効率を大幅に改善しなければ、環境リスクの高い原子力や火力発電の依存体質から脱却することは難しい。いずれの発電機構も、タービンの回転エネルギーを電気エネルギーへと変換しているため、発電効率の鍵を握るのはやはり構造物の軽量化である。

一方、製品の省エネ性能を高め、使用時の消費電力量を下げることでCO₂排出量を根本的に減らすことも精力的に行われている。特に輸送機器が環境に与えている影響は甚大であり、燃費改善に向けた対策が強く望まれている。その具体的な対策として期待されているのも軽量化である。製品が持つ本来の利用目的を維持するためには、形

状を大きく変更することは現実的ではないため、より軽い材料を用いることが対策に向けての必須条件となっている。かつて我々は、工業製品のパフォーマンス向上や生産性向上という側面ばかりに目を向けて「材料」を選択してきたが、今後は軽量性が材料選択の重要な指針であり、工業製品の製品価値を大きく左右する鍵が「材料」だといえよう。

1.2 本研究が対象とする複合材料の概要

本研究が対象とする複合材料は、炭素繊維で強化された熱可塑性樹脂（以下、CFRTPと呼ぶ（CFRTP : Carbon Fiber Reinforced Thermo Plastics））である。炭素繊維は一般的な金属材料と比較して非常に高い比剛性、比強度を有していることが一番の特長であり、構造物の軽量化を目的とした工業製品への適用が加速している。構造部材としての複合材料は熱硬化性樹脂をマトリックスとした繊維強化プラスチック（以下、FRPと呼ぶ（FRP : Fiber Reinforced Plastics））が主流であるが、再利用が難しい点では前述した環境負荷低減に向けての課題が残る。熱可塑性樹脂は、再加熱によって再熔融することからリサイクル性があり、環境配慮型経済との親和性が高い点が大きなメリットであるが、その反面、温度依存性や複雑な非線形性を有した機械特性を持つため、工業製品への応用には金属材料とは異なる特別な配慮が必要になる。

複合材料を用いる有用性を定量的に示すために、炭素繊維およびそれと組み合わせられる代表的な樹脂の弾性率と密度について鋼と比較して Table 1.1 にまとめた。炭素繊維の剛性は、原材料や熱処理をはじめとした製造プロセスによってばらつきはあるものの、いくつかの研究例を参考にすれば⁹⁻¹¹⁾、軸方向の縦弾性率はおおよそ一般的な鋼と同レベルの 200~400 [GPa] 程度であるが、密度には大きな違いがあるため軽量化の効果は絶大である。樹脂についても密度は炭素繊維と同等かそれ以下であるから、仮に同じ体積で製品の材料を置換したとしても、1/4 もの軽量化が実現できることにな

る。しかしながら、炭素繊維そのものは強い異方性を有しており、軸方向以外の弾性率は比較的小さく、かつ繊維単体では、その小さな断面積ゆえに軸力以外の荷重に対してほとんど剛性を持たない。そのため、繊維を樹脂で固めてCFRTP化しても非常に強い剛性の異方性を持つことになる。つまり、CFRTPが鋼と同等の剛性を有するのは、あくまで繊維が配向している方向のみであるため、金属材料をCFRTPに置換する際には、製品が運用時に受けるであろう応力状態を事前に検討し、高い剛性が必要な方向に繊維を向けるよう慎重な製品設計を行うことが要求される。

Table- 1.1 Young's modulus and density for steel, carbon fiber and typical resin. Carbon fiber has an-isotropic characteristics and shows high value only for longitudinal direction.

| Material | Young's modulus [GPa] | Density [g/cm ³] |
|---------------|--|------------------------------|
| Steel | 200 | 8.0 |
| Carbon Fiber | 200-400 (E _L), 20-30 (E _R) | 2.0 |
| Nylon (PA6) | 2.6 | 1.13 |
| Polycarbonate | 2.4 | 1.20 |
| Epoxy | 2.4 | 1.30 |
| Polyurethane | 0.3 | 1.1 |
| Phenol | 6.0 | 1.4 |

成形と製造が同時に行われることもまた複合材料の特徴であり大きなメリットである。特にシート状に配置されたドライな炭素繊維に樹脂を含浸させたプリプレグは、持ち運びが容易でかつ賦形性が高く、施工現場にてその場に適した形状に容易に成形できるメリットもあわせ持つことから、様々な土木・建築インフラの補強材としても重宝される。日本では高度経済成長期に大量施工された橋やトンネルが、同時多発的に老朽化を迎える問題が懸念されているが、その補強・補修工法における主材料として

使用されている。特に熱可塑性樹脂は粘性的性質も合わせもつため、優れた制振性能を有し耐震補強の用途として期待されている。土木・建築分野における材料の軽量化は、輸送コストの削減に直結し、大型構造物になるほど輸送コスト、またそれに付随してCO₂削減にも貢献を見込むことができる。このような背景から、土木・建築業界における複合材料の需要は非常に大きい。世界の製造分野別のFRPに対する期待度を定量化しランキング付けすると、航空宇宙業界、自動車業界に次いで土木・建築分野が3番目に位置するとも報告されている。この傾向は2013年¹²⁾～2018年¹³⁾の間でほとんど変わっておらず、土木・建築分野におけるニーズは継続して高いことがわかる。さらに、輸送機器が主要産業ではない国々、例えばトルコでは、国内のCFRPの実に19%もの割合が土木建築分野で消費されている¹⁴⁾。

自動車分野において複合材料は、もっぱらパフォーマンス向上を目的としてスポーツカーに適用されることが多かったが、環境負荷低減に向けてコンシューマ製品への適用ニーズも加速しており、最近ではBMWが世界ではじめてモノコックボディにCFRPを採用した大衆車がリリースされた。ここで用いられたCFRPはノンクリンプファブリック（NCF: Non Crimped Fabric）と呼ばれる一方向に揃った繊維束をステッチで厚み方向に仮縫いした繊維基材をRTM成形（RTM: Resin Transfer Molding）することで製造されている。彼らの成功によって、今後のCFRP市場においてNCF材料とRTM成形の注目は高まっていることが予想される。尚、このようなクリンプされていないCFRPの構造は、繊維の軸方向剛性を最大限に利用できる強化形態であり、最適な繊維配向を決めることに技術力は要求されるものの、繊維基材のポテンシャルに引き出すことのできる複合材料であると言える。その他にも強度部材に適用される複合材料の繊維基材としては、平織や綾織あるいは朱子織のような意匠性にも好評のある織物材や、円筒形状との相性が良く圧力容器などに用いられるブレード材（組物材）など多数存在するが、いずれの構造も複数の繊維束から構成されており、その微視構造はや

はり一方向強化材である (Figure-1.1 参照)。したがって、材料挙動を把握するためには、この最も基本的かつ汎用的な微視構造を持った一方向強化材の特性を把握することが重要である。そのような背景から、本論文ではこれまでに実用化されている FRP の構造体の中で、最も基本的であり、最も適用実績の多い一方向に強化された CFRTP を研究対象とした。

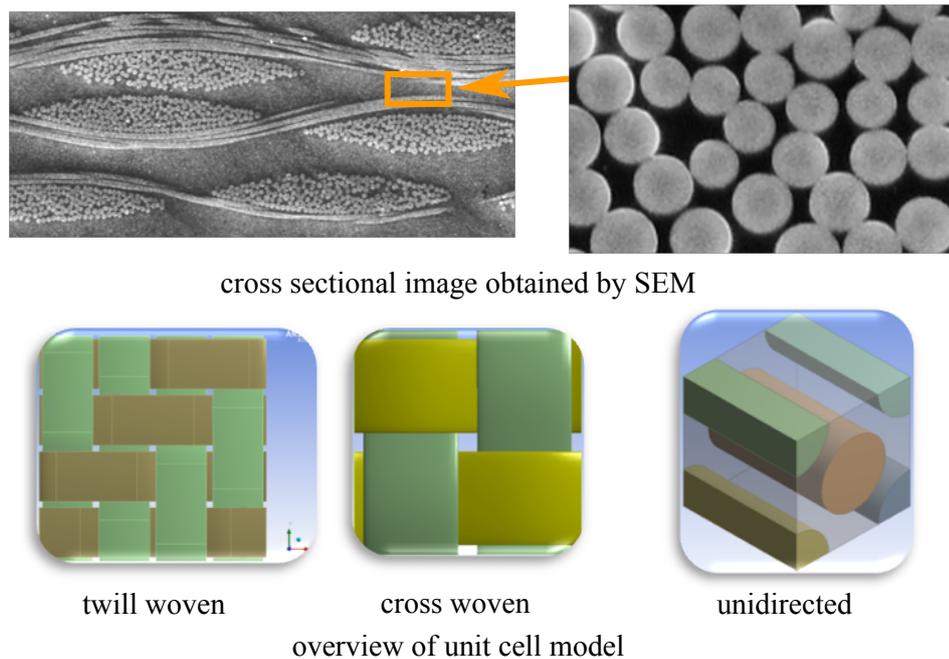


Figure- 1.1 Microstructure of composite material reinforced by unidirectional fibers. Unidirectional reinforcement is the most basic form and used for many types of composite materials.

1.3 マルチスケール解析による複合材料解析

複合材料を用いた構造物を対象にした有限要素法（以下、FEM と呼ぶ）解析では、一般的な金属材料を対象にした解析では表面化されない、いくつかの特有の問題に直面する。そのうちの代表的なものを以下に3つリストアップする。

1. 材料データベースの不足

複合材料の物性値は組み合わせる素材の種類・配合・形さらには成形履歴に依存して材料特性が劇的に変化する。材料設計の自由度が高い側面だけを見ればメリットであるが、その高すぎる柔軟性ゆえに汎用的な材料データベースを構築して運用することが困難である。また、異方性挙動を示すために、1回の単軸引張の材料試験のみでは材料の本質を完全には把握できず、材料挙動の全体像を把握するのに多大な労力を必要とする。それゆえに、FEM解析の入力物性値そのものが材料メーカーのノウハウの一つとされ、一般ユーザーへと展開されないケースも存在する。

2. 破壊基準の把握

複合材料の破壊形態は金属と比較して複雑で、微視構造内部で発生する繊維とマトリクス間の層間剥離やマトリクス内の亀裂進展など様々な要因が複合的に合わさった結果として、人間が視覚的に認識できるレベルのマクロ的な破壊挙動として現れる。材料挙動に異方性を有する繊維系の複合材料では、材料強度にもまた異方性があるため、金属材料の解析では慣例的に使用されてきたフォンミーゼスやトレスカの相当応力のみで破壊判定をすることはできず、応力テンソルの成分を参照して破壊判定を行う必要がある。

3. 製造プロセス

繊維配向が成形履歴に依存するため、異方性材料物性が成形品内で一様ではなく、かつ事前に把握がしづらい。特に不連続な繊維が混合された複合材料では、成形時の流動状況に強く依存するため、樹脂流動解析によって事前に繊維配向を予測する手段がとられる。また、連続繊維で強化されたFRPにおいても、成形履歴によって繊維の粗密や配向角、交差角などが変化する (Figure-1.2 参照)。その程度は比較的小さいものの、構造部材として強度・剛性に高い信頼性が要求される

ようなケースでは無視するべきではない。

これらの問題点間の関係性を Figure-1.3 にもまとめた。CAE 解析技術者の立場でこれら 3 つの問題を見れば、FRP 構造物の数値解析における問題は、いずれも解析プログラムに対して既知量として与えるべき材料情報、すなわち材料物性値の問題に帰着する。

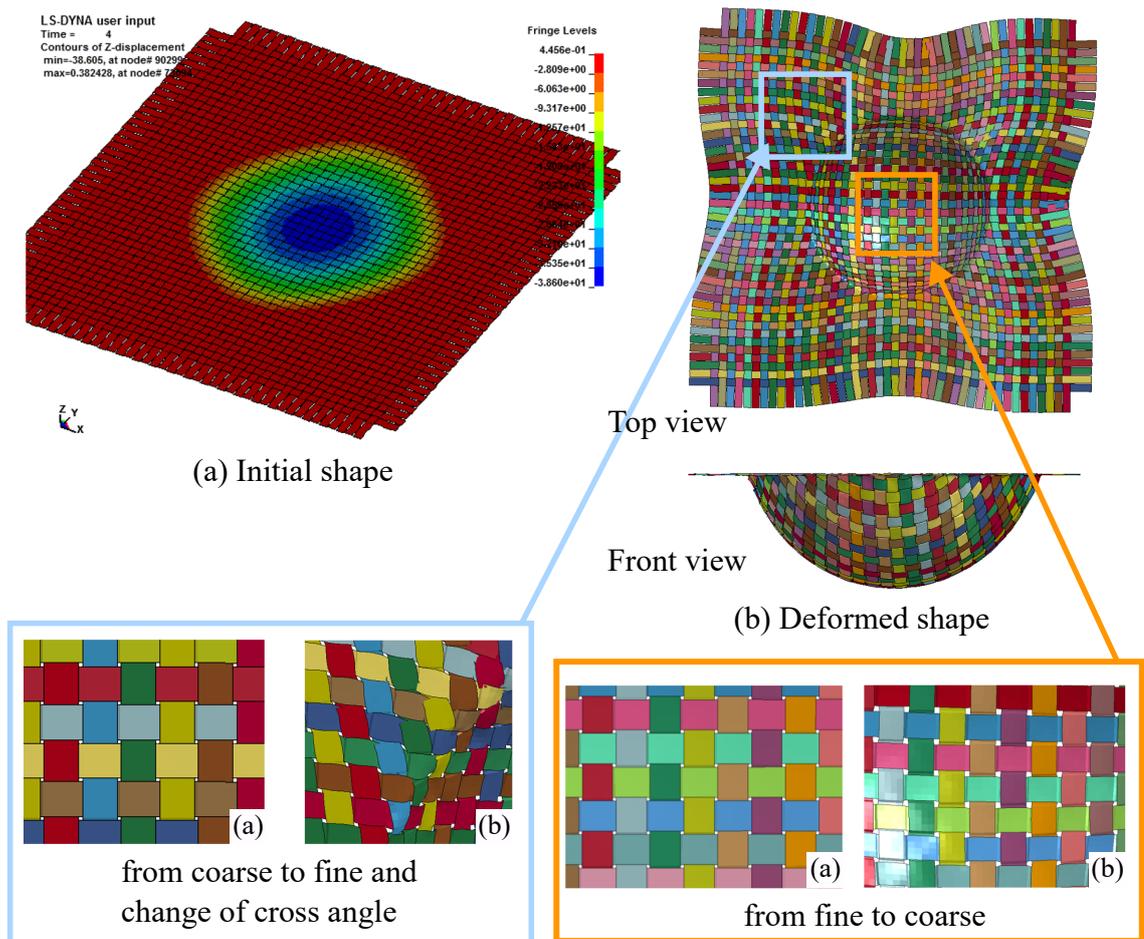
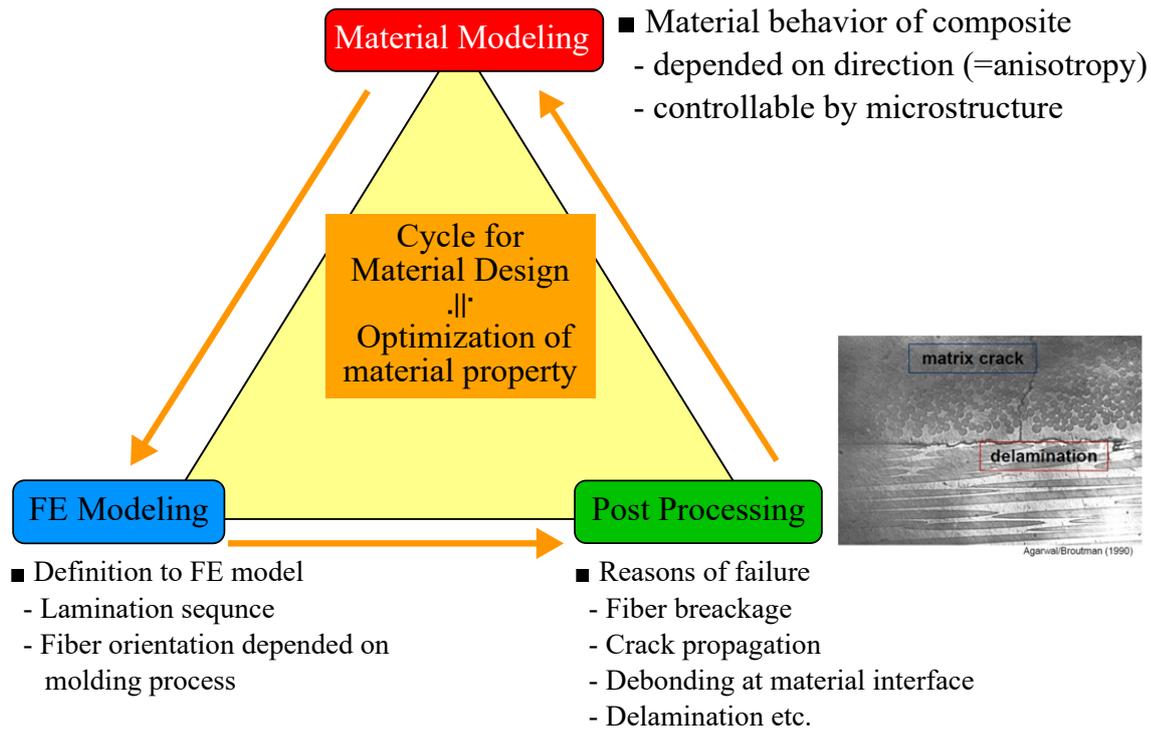


Figure- 1.2 The change of density and orientation of fiber during press forming process.

マルチスケール解析は、これらの問題を解決するための有用な手法であり、FRP の FEM 解析を実現する上でのほぼ唯一のアプローチであるといえる。解析対象物を複合材料で構成される全体構造を示したマクロモデルと、複合材料の微視的な不均質性を示したマイクロモデルあるいはメゾモデルに分離して、それらを連成させる手法である。



Figure– 1.3 The change of density and orientation of fiber during press forming process.

広義には、量子や原子・分子レベルを含めた連成の枠組みを指すが、本研究ではFEMを使ったマルチスケール解析を想定するため、連続体力学の範疇を逸脱しないものとする。換言すれば、微視構造は繊維一本一本が個別にモデル化できる程度の数マイクロメートルオーダーのサイズを想定する。このようなサイズスケールにおけるマルチスケール問題は、平均場法と均質化法のいずれかのアプローチで解かれることが多い。

平均場法は、複合材料の物性値を準解析的な手法を用いて予測するマイクロメカニクスに基づく手法であり、混合則が原型となる最も基本的な理論である。差分化による近似計算の必要なしに物性値を予測できるため、計算コストは小さく、前述した短繊維複合材料のような微視構造が複雑かつ分布する材料との親和性が極めて高い。VoigtモデルやReussモデルは、理想的な応力状態を仮定して材料物性値の上下界を予測した理論として有名であるが、実用上注目されるようになったのは、より微視構造内の応力状態に汎用性を持たせたEshelbyの等価介在物理論の登場である¹⁵⁾。Eshelbyは無限

に広いマトリクス空間内に回転楕円体の異物が存在した際の応力状態を解析的に考察することで物性を予測することに成功した。任意のアスペクト比における回転楕円体の介在物を想定したことで、平均場法の汎用性は大きく向上した。後に、Mori および Tanaka が³、繊維間の相互作用を考慮するために Eshelby 理論を拡張し、高い繊維含有率に対しての物性予測精度を大きく向上させた¹⁶⁾。しかしながら、これらの理論はあくまで、回転楕円体形状がベースとなっているため、射出成形や BMC (Bulk Molding Compound)、SMC (Sheet Molding Compound) 成形などで作成された不連続な繊維が分散された複合材料品に適用されるのが一般的であった。Mori-tanaka 理論を連続繊維系の複合材料に適用し、弾性率に関してある程度の予測精度が得られる旨の報告があるが^{17,18)}、繊維のうねりを考慮した平均配向率や介在物のアスペクト比など、経験的な調整パラメータが存在している。また、微視構造内部の応力状態を詳細に観測できないため、微視構造と物性間の相互作用を定量化することが難しく、解析結果を材料設計にフィードバックすることが難しい。

一方、均質化法は、微視的（以下、ミクロと呼ぶ）構造を解析対象とする数値実験（以下、数値材料試験と呼ぶ）により巨視的（以下、マクロと呼ぶ）材料挙動を算出することが可能であり、厳密な数学理論に基づいて、かつ力学的理論に忠実にマクロな異方性材料挙動の特徴づけが可能となることが知られている^{19,20)}。この数値材料試験におけるミクロ構造は周期配置されているものと仮定されるためユニットセルと呼ばれており、これが平均場法における代表体積要素の役割を果たす。均質化法はこのユニットセルに対する境界値問題とマクロ境界値問題を結び付ける理論であるため、FRP のマクロ構成則が正しく設定できれば、数値材料試験を通して材料パラメータを同定することができ、全体構造物の数値シミュレーションも可能になる²¹⁾。3次元的なミクロ構造を陽に記述するため、不均質構造の形状や構成材料の物性値さえ既知であれば、特別な調整パラメータを用いずに高精度なマクロ材料挙動が把握できる。さらに、

任意の変形モードの試験を容易に行うことができるため、変形モードが限定されていた実験的研究の知見を補完することもでき、異方性挙動をより深く理解できる可能性を持つ。このような特徴から、近年では汎用の CAE ツールを使用して、繊維強化材料や樹脂材料を FRP 構造の寸法や形状と同様な設計変数として取扱い、付加価値の高い商品設計を行う取り組みが進められている²²⁻²⁵⁾。一方で、平均場法と比較してマクロ挙動の導出コストが大きいため、各マクロひずみにおける剛性を逐次的にマクロモデルに渡しながらスケール間を強連成^{26,27)}して解くことは現実的ではなく、ミクロモデルの異方性材料挙動を事前に観察し、それをマクロな材料構成則の関数形に落とし込んでからマクロ解析へとつなげる弱連成²¹⁾の形式をとることが一般的である。強連成と弱連成との違いを明示的に示すために後者を分離型マルチスケール解析と呼ぶこともあるが、昨今ではマルチスケール解析そのものが暗に分離型を指していることも多い。分離型マルチスケール解析（以下、マルチスケール解析と呼ぶ）の全体的な流れを Figure-1.4 に示す。これらの解析を実用に耐えうる精度で実現するためには、以下に示す3つの問題をできる限り正確に解決する必要がある。

1. 実際のミクロ構造を代表するユニットセルモデルの抽出

数値材料試験はユニットセルモデルの対向面間に周期対称条件を定義した上で行われる。複合材料のミクロ構造はほとんどの場合、ランダム性やばらつきが存在しており、厳密な周期対称性を持っていないため、何らかの理想的な仮定をおいてモデリングする。その際、材料応答に対して感度の高い要素（例えば、繊維の体積含有率や配向）を見極めて、理想形状を仮定しつつも、できる限り実際の材料応答に近づけられるようなユニットセルモデルを慎重に作成しなければならない。

2. マクロな異方性材料挙動の正確な特徴づけ

CFRTP のマクロ材料挙動はユニットセルモデルを用いた数値材料試験結果から

評価される。このとき、マクロモデルに CFRTP の材料挙動を正確に反映させるためには、マクロ材料挙動を正確に特徴づけることが重要である。不十分な試験条件から特徴づけられた材料挙動をマクロモデルに反映させた場合、マクロ解析結果の妥当性が著しく損なわれる危険性がある。従来の実材料試験に立脚した解析アプローチにおいては、試験装置の制約上、限られた荷重条件のもとでしか試験が実施できないため、FRP のような強い異方性を持った材料の機械的性質を十分に把握することができていなかった。数値材料試験では定義できる試験条件に制約はないので、材料挙動を特徴づけられるための十分な実験計画を行う。

3. 特徴づけた異方性の材料挙動を正確に表現できる性能を持ったマクロ材料構成則
数値材料試験で得られたマクロ材料応答は、マクロ材料構成則として関数形に落とし込むことによってはじめてマクロ解析モデルへ反映させることができる。数値材料試験によって、詳細に材料挙動が把握できたとしても、それらを表現する能力を十分に兼ね備えたマクロ材料構成則がなければマルチスケール解析は実現できない。したがって、正確に特徴づけられたマクロ材料挙動を元に、適切な既存の材料構成則を選択する、あるいは必要に応じて新しい材料構成則を構築する必要がある。

CFRTP のマクロな異方性材料挙動は、ある特定の非弾性現象のみに着目して特徴づけられる研究例が多く、まだ考察が不十分な領域が多分に存在する。それと連動して、マクロ材料構成則についても、既存のもので対応できない可能性が高いと考えられる。

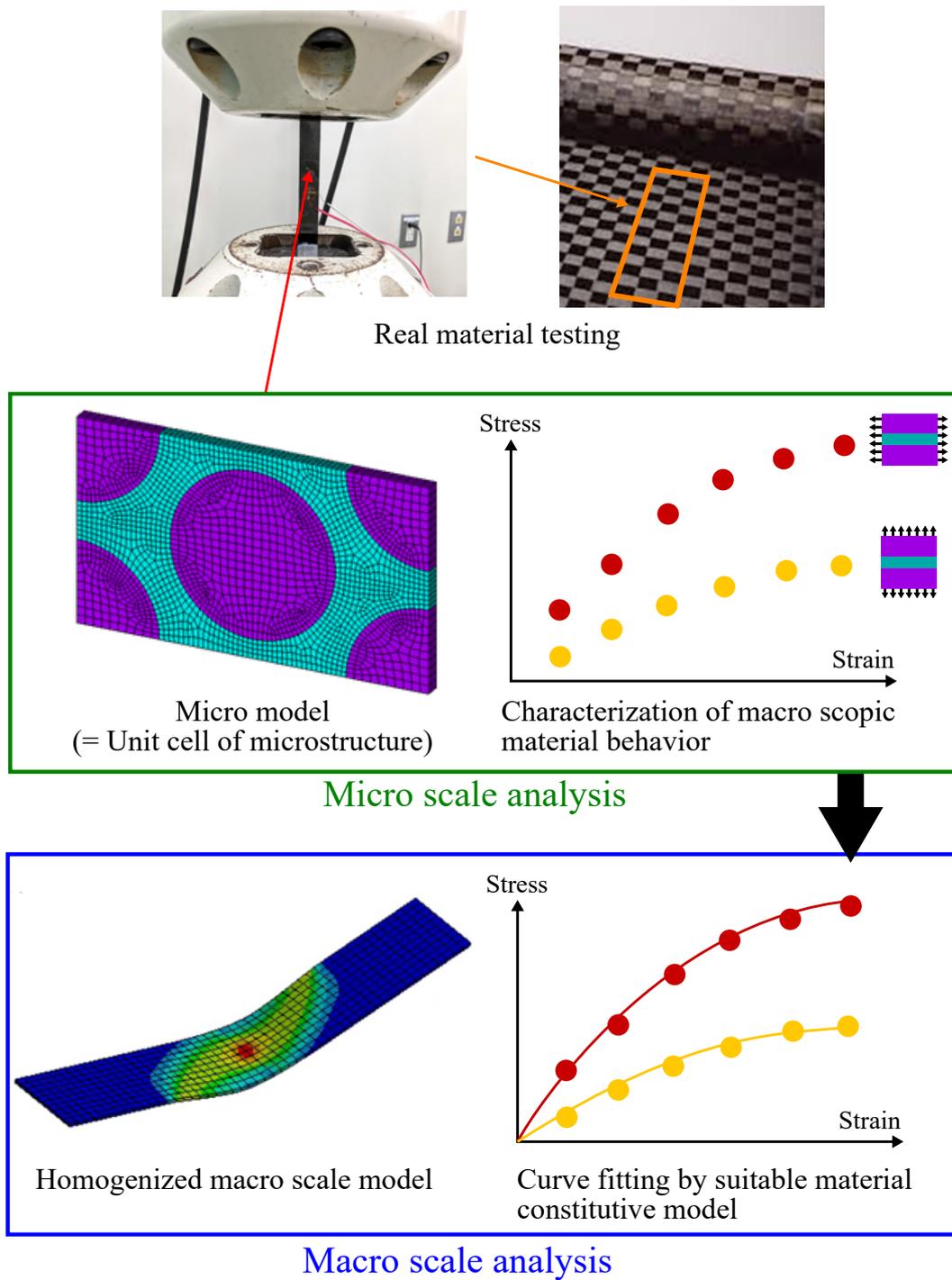


Figure- 1.4 Conceptual diagram of multiscale analysis based on homogenization technique.

1.4 マクロ材料構成則に関する先行研究

CFRTP を構成する熱可塑性樹脂は、温度上昇に伴って、低温環境におけるガラス状態からゴム状態を経て流動性を持った熔融状態へと至る。状態遷移の発生条件はそれぞれガラス転移点、融点として定義づけられるが、その遷移は瞬間的に生じる不連続なものではなく、連続的になだらかに変化していく。材料特性もまた、3つの状態が完全に独立してはならず、ガラス状態とゴム状態、あるいはゴム状態と熔融状態が混在した特徴を持つことから、各状態の材料挙動を一つの材料構成則で統一して汎用的に表現できることが実用面では望ましい。これまでに FRP や F RTP の非線形挙動を考慮した解析や予測モデルに関する研究は活発に行われているが²⁸⁻³⁷⁾、特定の複合材料の微視的構造や運用条件に着目してその巨視的挙動の特徴づけを行っているケースがほとんどであり、設計の初期段階で様々な強化形態の FRP や F RTP の異方性非線形挙動を簡便に予測できるような汎用的手法を提示している例は非常に少ない。また、熱可塑性樹脂は熱硬化性樹脂と比較して、強度部材としての歴史が浅く材料挙動が完全に把握されているとは決して言えない。本節では、熱可塑性樹脂の特徴を 1. 粘弾性、2. 弾塑性、3. 損傷の 3つのカテゴリーに分けて、それらの先行研究を概説するとともに、現在も残る研究課題から本論文の目的へと昇華させていく。

1. 粘弾性

CFRTP のマトリックスである熱可塑性樹脂は架橋構造を持たない直鎖状の高分子であるため、架橋構造を有する熱硬化性樹脂と比較して、低温下であっても流動挙動を含んだ機械特性、すなわち粘弾性特性が顕在化する。このため、CFRTP を長期信頼性が要求される構造部材に適用するためには、温度依存性の異方性機械特性を事前に把握することが極めて重要である。一方、材料の粘弾性挙動を計測する際には、長時間領域に渡る緩和挙動を把握するために、一般的には緩和特性の時間-温度換算則を利用することが多い。これによって、樹脂の緩和特性の温度依存性が定量化されるため、長

時間領域の緩和挙動も、試験片を高温環境下におくことで短時間の計測結果から予測できるようになる。宮野ら³⁸⁾は、エポキシ樹脂とそれを繊維で強化した短冊形の試験片それぞれに対して、様々な温度下におけるクリープコンプライアンスを3点曲げ試験によって計測することで、長時間領域の材料挙動および、緩和特性の時間-温度換算則の同定を行った。その結果として、FRPの緩和特性の温度依存性はエポキシ樹脂単体の挙動と一致することを示した。平山ら³⁹⁾や岩本ら⁴⁰⁾もまた、異なる素材の繊維強化材に対して調査を行い同様の結論を示した。金光ら⁴¹⁾はFRPの3点曲げの強度に関しても温度依存性を実験的に観察することで、強度特性にも強い温度依存性があり、しかもその依存性には樹脂の緩和特性と同じ時間-温度換算則が適用できることを示した。一方で、弾性挙動もまた温度に依存するため、緩和特性のみに着目した時間-温度換算則では粘弾性挙動の温度依存性を完全には表現できないことも知られている。Sullivanら⁴²⁾によると、この現象は樹脂材料が熱力学的に非平衡からゆっくり平衡状態に遷移している状態、すなわちフィジカルエージングの進行に起因するとされている。この問題を解決するために、宮野ら^{43,44)}は弾性挙動の温度への依存性も考慮した修正型の時間-温度換算則を提案した。後に、坂井ら⁴⁵⁾も同様の定式化を異なる素材から構成されるFRPに適用することでその有用性を確認している。これら既往の実試験に基づく研究例によって、樹脂の粘弾性特性の温度依存性はある程度解明され、その知見はFRPの異方性粘弾性構成則に反映させることが可能になったといえる。しかしながら、これら実験的研究では、試験的制約により3点曲げなどの変形モードに限定した検討が多く、FRPの任意の異方性挙動が力学理論に照らして体系的に把握されているとは言いがたい。ユニットセルの数値解析モデルに樹脂の粘弾性挙動の温度依存性を導入すれば、マクロ粘弾性挙動の温度依存性も評価できるが、従来の研究では緩和特性に関する検討に止まっており⁴⁶⁾、弾性特性についての報告例は存在しない。つまり、応力緩和や動的粘弾性の特性が、温度変化によって時間軸あるいは周波数軸方

向に平行移動する材料挙動，すなわち粘性成分の温度依存性のみを仮定しており，弾性率の温度依存性は考慮できていなかった。

2. 塑性

一方，いくつかの条件が重なると，熱可塑性樹脂において荷重を取り除いても永久ひずみが残ることがある。これは，塑性に属する非線形挙動として分類分けするべきであろう。連続繊維で強化された複合材料を3次元形状に成形する際には，その塑性挙動を積極的に利用することになるし，実運用時に塑性を許容した製品設計が要求される場面があるかもしれない。原子間の金属結合が材料特性を支配している金属材料では転位によって塑性変形が発生および進行するが，高分子の架橋構造や結晶構造に起因した機械特性を持つ樹脂材では，それとは異なる機構で塑性変形を生ずる。とはいえ，応力-ひずみ特性の形状にだけ着目すれば，金属と類似しているため，実用上は金属材料由来の材料構成則をそのまま樹脂にも適用することも多い。

von Mises や Tresca によって提案された降伏関数は金属材料の降伏開始挙動をある程度正確に表現できること，そして特に前者は数学的な特異点がなく数値計算との相性も良いため，多くの汎用 CAE ツールにも実装され現在でも広く使用されている。しかし，初期でランダムな結晶方位を持った多結晶金属体であっても塑性変形に伴って，結晶方位に規則性が現れて異方性の特徴が無視できなくなることがある。単一の結晶粒にだけに着目すれば，塑性は原子配置に依存した特定のすべり面上でのみ発生するため，強い異方性を持つ。その数値解析的な取り扱い⁴⁷⁾は結晶塑性論で議論される。しかしながら，単結晶材料や極微小な領域で用いられる材料は例外として，一般的に広く用いられる金属材料の大多数は無数の結晶粒から構成されるため，マクロな降伏曲面の形状を観察して，経験則的に降伏関数を構築する方法がとられる。Hill は von Mises の降伏関数を構成する各項を個別の係数で重み付けすることで直交異方性へと拡張した。各軸方向の降伏応力比を材料物性値として定式化することで，数学的にも物理的

にも理解のしやすい関数形に帰着させている⁴⁸⁾。Logan と Hosford や Barlat らは、降伏関数の次数を任意に与えられるよう Hill 理論を拡張した^{49,50)}。降伏曲面の表現能力を上げるための研究例はその後も多数報告されているが、これらの時代と並行する FEM 解析ニーズの高まりを受けて、解析用途の使い勝手を意識した定式化が研究され始めるようになる。Barlat は 2 次元平面応力用に、適用が容易な降伏関数を作り上げ、のちにその 3 次元拡張理論を構築した^{51,52)}。これは現在 Yld2000 と命名され、塑性変形が支配的になる塑性加工のシミュレーションツールには標準的に実装されていることが多い。さらに、Yoshida と Uemori は Yld2000 を拡張し、6 次の 3 次元降伏関数を提案した⁵³⁾。彼らもまた、降伏曲面の表現能力の観点に留まらず、材料定数の同定方法についても詳細に言及している。複合材料へこれら金属由来の構成則を適用した例として、山本らはポリカーボネート樹脂を母材とした一方向強化材および平織クロス材からなる CFRTP のマイクロモデルを用いて、3 方向の単軸引張と 3 方向の純せん断の計 6 種類の変形モードにおけるみかけの応力-ひずみ関係を数値材料試験によって評価し、Hill によって提案された異方性弾塑性構成則によって良好にフィッティングできることを示した⁵⁴⁾。降伏応力比を大きく設定することで、繊維方向のみ純弾性的な特徴を示す異方挙動が再現できることを示したが、確認したのはあくまで単軸モードのみであり、多軸応力場における材料挙動までの確認はできていなかった。Owen らは、Hill 定数の比率が大きくなると、降伏曲面が双曲線へシフトして開いた形状となることから、各方向の降伏応力の違いは 5~10% 未満に抑える範囲が有効であり、Hill が本来想定していた塑性変形により成形された金属材料以外へ適用することへの危険性も示している⁵⁵⁾。連続繊維で強化された複合材料では、明らかにこの基準からは逸脱する。

繊維系複合材料特有の挙動に着目した弾塑性モデルは、Mulhern や Rogers らによって初めに提案された^{56,57)}。彼らは繊維配向方向ベクトルを用いた新しい応力不変量を定義して、降伏関数に導入した。このような考え方を繊維強化ゴムの超弾性モデルに

も採用された研究例もあり、ある一定の成果を収めている⁵⁸⁾。Bedzraらは繊維方向ベクトルが自明ではないタングステン繊維と銅マトリクスからなる織物材に対して、いくつかの応力成分および応力比の組み合わせで数値材料試験を行った。その観測結果から、平織クロス材の降伏曲面は、複数の平面を組み合わせたポリゴン状の形を成していることを突き止め、それを表現するための定式化である Multisurface Plasticity 理論を提案した⁵⁹⁾。一方向強化材の弾塑性挙動としては Dvorak らによって実験的に観察されている。彼らは繊維を周方向に巻いた中空パイプに対して、軸方向引張とねじり、さらに内圧荷重を組み合わせることで平面応力状態における3成分が混在した応力状態を作り出した。その結果を Matrix Dominant Mode (MDM)⁶⁰⁾ と Fiber Dominant Mode (FDM)⁶²⁾ に分けて降伏曲面の断面を詳細に観察し、一方向強化材の塑性は、特定の面上の分解せん断応力が支配的であるという、前述した金属の結晶塑性論と類似した仮説に基づいた Bimodal Plasticity 理論（以後、バイモーダル塑性と呼ぶ）を提案した⁶⁷⁾。本理論による初期降伏曲面の再現能力は高く評価され、先行研究をしていた Roger らもバイモーダル塑性理論を後に支持したとの報告もある⁶⁸⁾。これらの研究で提案された材料構成則はすべて繊維とマトリクスが共に金属材料からなる複合材料であったが、降伏の起点がマトリクスから発生する意味では CFRTP も同じである。したがって、初期の降伏曲面を論じる上では、CFRTP にも同様の構成則が適用できるように思われる。しかしながら、降伏応力を大きく超えた応力レンジでは、金属繊維は塑性する一方、炭素繊維はほぼ純弾性的に振舞い続けるため、降伏後の硬化挙動が一致するとは限らず、また実験的に観測された例もない。

硬化挙動に関する研究もまた金属系材料が先行しているため、それらの成果を樹脂材にも転用されるケースが多い。特に引張側と圧縮側で降伏挙動が異なる問題は、多段成形や複雑な形状のプレス成形時に無視できない問題となるため大きな課題とされてきた。このような引張・圧縮における降伏挙動の問題に対して Prager は、実際に負荷した

応力が弱まるように仮想的に応力量をシフトさせるために背応力 (Back stress) の概念を導入した⁶⁹⁾。さらに, Frederick と Armstrong は, 背応力の発展に非線形性を付与することで背応力が動的回復する様子を再現した^{70,71)}。これに対して, Chaboche は背応力を多項式に拡張したり, 動的回復に閾値を導入することで, 表現能力がさらに高められた^{72,73)}。Figure-1.5 の上段に, 彼らの提案する硬化則が表す硬化前後の降伏曲面の形状を示す。彼らの定式化は降伏曲面の移動と拡大によってのみ表現されている。ところが, Khan らによるアルミニウム合金を対象とした研究によると⁷⁴⁾, 塑性後の降伏曲面の形状は初期状態から大きく歪んでおり, 相似形状を保ったこれらの硬化則には適用上の限界がある。これに対して, Figure-1.5 の下段に示すような, 異方硬化 (Anisotropic Hardening) やゆがみ硬化 (Distortional Hardening) と呼ばれる, 降伏曲面の形状が初期の円形から楕円や三角形へと変形する挙動を取り入れた硬化則も提案されてきた。その初期の研究例として, Yanaga らは Yld2000 で材料物性値としていた係数を相当塑性ひずみ依存に拡張することで塑性進展に伴う降伏曲面の異方硬化挙動を表現した⁷⁵⁾。Ishikawa は塑性ひずみ成分に依存する係数も導入している⁷⁶⁾。Baltov らは Hill の異方性降伏関数を発展させて, 塑性進展に伴い, 降伏曲面が円形から楕円形に変化あるいは回転する挙動を組み込んだ⁷⁷⁾。このような定式化はいずれも降伏関数を構成する応力項に対してある係数を乗ずることで対応しているものであり, Shutov and Ihlemann⁷⁸⁾ の言葉を借りると Hill 型に属する硬化則である。また, これらの係数は降伏曲面を動かす作用を持つことから, Armstrong-Frederick の背応力になぞって Backstress-like tensor とも呼ばれる。これらの係数は非対称な 4 階のテンソルになることなどもあり, 物性値を同定することが極めて困難で, 実験に立脚する塑性力学では適用に限界があった。近年の数値材料試験の登場によって, これらのいわば時代に対して早すぎたモデルを実設計に適用できるときがくるかもしれない。一方, 異方硬化後の曲面形状を直接関数形式として与える硬化則も提案されている⁷⁹⁾。異方硬化後の曲面形状が各角にア一

ルを持った三角形状を有していることから、Figure-1.6に示すような類似の形状を表現できる Limason of Pascal 関数を使った研究例⁸⁰⁾もあるが、異方硬化後の形状を厳密に再現することは難しい。Shutov らは限界までゆがんだ状態の降伏曲面を円弧の集まりで表現し、初期状態から完全に硬化するまでの間は、そらら2つの状態から内挿することで対応させた⁷⁸⁾。Hill 型の構成則と比較して、柔軟性の高い異方硬化挙動を表現できるが、降伏曲面の凸性を証明することが難しいことが課題として指摘されている。また、初期の降伏曲面は円形を前提としているため、初期から異方性の強い繊維系複合材料には適用することができない。一方、複合材料に対しては、Dvorak らが一方向強化材に対して硬化挙動を観測しており、ほぼ純粋な移動硬化則で表現できることを示しているが、これも金属材料を母材とした観測であり、樹脂系の複合材料において同じ挙動を示す保証はない。実際、瀧澤らは一方向強化材の繊維部を空洞化したような形状のユニットセルモデルを用いてパンチングメタルの材料挙動を確認し、やはり既存の従来の金属由来の硬化則では表現することのできない異方硬化挙動が観察されたことを報告している⁸¹⁾。このような背景から、初期状態から強い異方性を持った材料に対して、異方硬化挙動を考慮する場面は必要になることも予想される。

3. 損傷

材料がさらに大きな応力を受けると、損傷挙動が無視できなくなることがある。材料組織内部で破壊が発生し部分的に材料としての機能を失っているものの、マクロスケールには完全破断にはいたっていない状態がそれにあたる。多くの材料は損傷に先立ち、前述した粘弾性や弾塑性などの非線形性が発生しており、損傷挙動のみを独立して計測するのは困難であり、さらに負荷時の特性だけでみると弾塑性と類似した応力-ひずみ特性を描くため、弾塑性とダメージの寄与を分離して同定することは困難である。既往の研究例では、引張側の材料挙動の観察結果のみから構成則を構築および同定している例も多く、材料の本質を正確にとらえられていなかった懸念がある。損傷の存

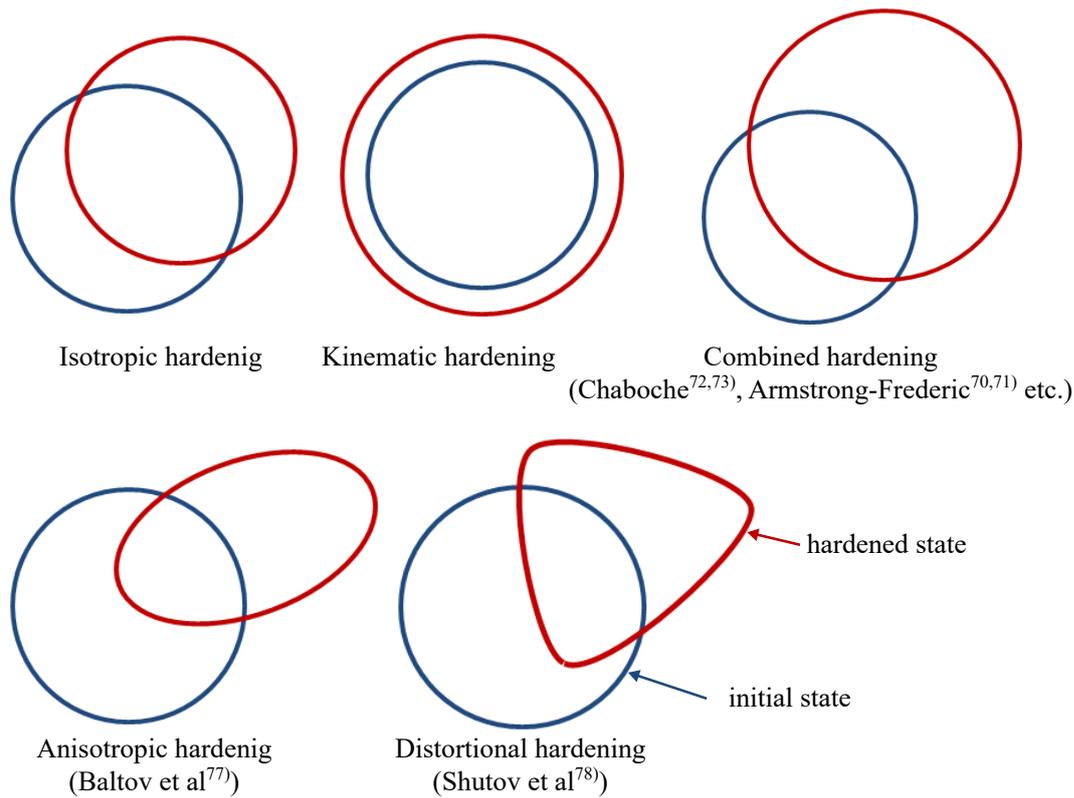
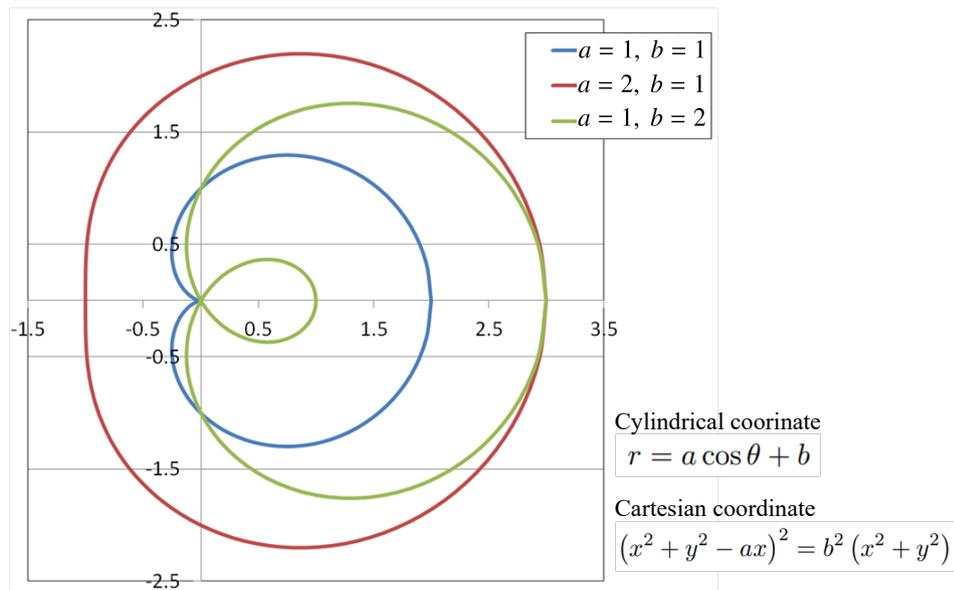


Figure- 1.5 Five types of proposed shape for hardening by plastic deformation.

在を観察できるのは除荷時の特性であって弾性率の変化として現れる。損傷は微視構造内部でポイドが発生するなどして、外部荷重を受け持つ面積が減少する^{84,85} ことによって生じるためである。連続体損傷力学（Continuum Damage Mechanics）は、その弾性率変化を記述するために構築された。等方性材料としては、Lemaitre らによって、その有用性が確認されているが⁸²、複合材料においては1.3節に述べたような、様々な要因による破壊モードが想定されるが、いずれにしても、マクロスケールには弾性率の変化として観察されることがBarbero⁸³によって示されている。損傷の開始および発展は、熱力学的な考察に基づいて弾塑性と類似した形で定式化されることが多かった。すなわち、損傷開始は降伏応力と、損傷発展は硬化発展と同じ考え方が適用されてきた。その一方で複合材料の微視構造内部にゆらぎがあるため、統計的な解釈によって損傷発展を記述する試みも行われてきた。Janson らは⁸⁶は、損傷発生を応力依存の確



Figure– 1.6 Yield surface made by function of Limason of Pascal.

率密度関数として記述して発展則を定式化した。彼らの定式化は繊維強化材のみならず⁸⁷⁾、骨⁸⁸⁾やコンクリート⁸⁹⁾などの多孔質体の引張時の損傷挙動とも良く一致した。のちに Rosen が Weibull 分布を用いて確率密度関数を高精度化した⁹⁰⁾。繊維材の場合、圧縮荷重は繊維座屈が発生するため、破断や損傷のメカニズムが引張とは大きく異なる。圧縮モードの損傷挙動もまた Rosen⁹¹⁾ によってはじめに提案された。材料の破壊によって座屈が発生すると考えたが、のちに繊維のミスアライメントと非線形せん断剛性を考慮することで、予測精度を大きく改善した。繊維座屈モデル⁹²⁻⁹⁴⁾やキックバンドモデル^{95,96)}などと呼称され、多くの類似研究例がある。なお、ミスアライメントは Yurgartis ら⁹⁷⁾によって実測されガウス分布していることが確認されている。このように繊維強化材の損傷挙動は特定の変形モードに限定して調査および定式化された研究例が多く、異方性材料挙動として、複数の変形モードを網羅した定式化を試みている例は少ない。本研究では、他の材料構成則の例にならって、損傷変数をテンソルに拡張させることで異方性を表現する。Barbelo らは、一方向強化材のあらゆる破壊モードは繊維配向に対して平行あるいは垂直な応力成分でのみ発生すると考えて、損傷変

数が対角マトリクスで示せることを示した^{98,99)}。Teradaらは¹⁰⁰⁾2階のテンソルに拡張した損傷マトリクスに Hill の異方性弾塑性およびクリープ構成則をつなげた材料構成則を提案し、ポリカーボネート樹脂をマトリクスとした一方向強化材の引張除荷の応力-ひずみ特性をフィッティングさせることに成功した。しかしながら、これらの研究でも圧縮側の特性まで踏み込んだ考察を行っていないことに加え、樹脂材料が一般的に持つ粘弾性特性が加味できておらず、材料挙動の本来の本質を捉えきれていないといえる。

さらに、実用面で重要な点として、CFRTP は薄板形状で利用されることがあげられる。通常 CFRTP は、厚み数百 μm ~ 数 mm のシート状の薄板を複数枚重ねて大型構造物の部材として適用されるので、FEM 解析でそのような構造物を solid 要素でモデリングすることは計算効率の面で現実的ではなく、ほとんどの場合、平面応力を仮定した shell 要素が用いられる。その一方で、これまで提案されてきた材料構成則は、一部の例外を除いて、ほとんどが3次元応力状態を仮定したものであり、CFRTP を用いたマクロ構造物の解析用途にそぐわないものであったのが現状である。

1.5 本研究の位置づけと目的

繊維で強化された樹脂材料はその優れた機械特性ゆえに、これから益々様々な産業分野へと応用されていくことが期待される。しかしながら、これまで述べてきたように、最も基本的な強化構造である一方向強化材ですらも、特定の荷重条件や運用条件に限定した研究がなされている例が多く、均質化法に基づくマルチスケール解析を多用途に実施できる材料構成則が完成していないのが現状である。CFRTP が平面応力状態で用いられることを想定した例は特に少ない。そこで本研究では、熱可塑性の樹脂を連続的なカーボン繊維で強化した CFRTP に焦点を当てて、その最も基本的な強化形体である一方向に繊維強化された CFRTP (以下、一方向 CFRTP と呼ぶ) を対象に、非弾

性領域も含めたマルチスケール解析を実現するための課題を解決する。すなわち、数値材料試験によって、CFRTPの異方性材料挙動を正確に特徴づける。さらに、それらの材料挙動を正確に薄板構造のマクロモデルへ反映させるための、平面応力状態を仮定した異方性のマクロ材料構成則を構築する。特に、本研究ではこれまで述べてきたFRTPのマクロ構成則に関する先行研究では見逃されていた点を補完できるように、既存構成則を改良することで次の3種類の新しい構成則の開発を目的としている。

1. 実験的に観察されてきたにも関わらず、その材料モデルが提案されてこなかった弾性率の温度依存性を考慮した粘弾性構成則
2. 金属をマトリックスとした研究例が先行していた初期降伏曲面形状とその硬化挙動のための弾塑性構成則
3. 樹脂には粘弾性や塑性の特徴が少なからず含まれるにもかかわらず、それが加味されてこなかった損傷構成則

Figure-1.7に本研究にて提案する材料構成則の概要としてレオロジーモデルを示した。また、Table 1.2に次章以降で言及する材料挙動の概要も示した。本研究では、樹脂の非線形材料挙動を、実用上問題になることが多い粘弾性・弾塑性・損傷の3つの特徴に分けて一方向強化材の材料挙動を数値材料試験によって観察し、その結果を詳細に分析することで、従来提案されてきた構成則を改良する。粘弾性と塑性はひずみが加算分解できるように直列接続させた。これにより、材料が降伏しない応力範囲においては、粘弾性挙動と塑性挙動を分離して議論することができる。損傷挙動は弾性項が静的な荷重の増加にともない変化させることで表現する。損傷の発生基準を明確に把握することは困難であるが、繰り返し荷重による疲労損傷は例外として、少なくとも微小ひずみ範囲での損傷発生は無視しても差し支えないといえる。以上のことから、各非線形性が応力-ひずみ特性に与えている影響範囲はFigure-1.8のようにまとめること

ができる。すなわち、ひずみ範囲ごとに個別の材料試験を実施することによって、支配的な要素だけに着目して材料物性値が同定できることになる。

そこで第2章では、微小ひずみ範囲の材料挙動のみに焦点を当てて粘弾性挙動について議論する。本研究では、特にこれまでの研究例が少なかった弾性率の温度依存性を観察するとともに材料構成則の構築を行う。母材には、実験により顕著な速度依存性および損傷挙動が確認されているポリカーボネート樹脂を用いる。

第3章では、降伏応力を超えた荷重条件下における塑性挙動について検討する。様々な応力比で多軸応力場の数値材料試験を行うことで初期の降伏曲面を詳細に観察する。さらに、特定の方向にプリストレスを与えた状態から、同様の試験を行い、降伏曲面を初期状態と比較することで、CFRTPの異方硬化挙動を定量的に明らかにする。そして、その歪み挙動を表現するための硬化則を提案する。本章では、熱可塑性のエポキシ樹脂をマトリクスに採用した。これは、ポリカーボネート樹脂と比較して、樹脂単体に損傷挙動がほとんど観察されないため、損傷モデルと分離して構成則の議論ができると考えたためである。この際、粘弾性挙動はガラス転移点よりも十分低い環境温度でなければほとんどの場合は無視ができる。仮に高いひずみ領域で粘弾性挙動が含まれるようなことがあったとしても、微小ひずみ領域で粘弾性特性を事前に同定しておけば、物性値同定の観点では高ひずみ領域は塑性のみに着目することができる。ここで提案された材料構成則を用いて予測された材料挙動は、荷重軸から繊維角度を傾けた Off axis の実材料試験の結果と比較することで妥当性も検証する。

第4章では、粘弾性・弾塑性・損傷の材料挙動を結合し、さらに3次元応力状態から平面応力状態に縮退した統合的な材料構成則を構築する。マトリクスには、第2章と同じポリカーボネート樹脂を用いる。樹脂単体の非線形応力-ひずみ特性を実験で観察し、弾塑性損傷の特性を同定した。その材料物性値をマトリクスに適用したマイクロモデルを用いて、数値材料試験による応力-ひずみ特性を観察した。ポリカーボネー

ト樹脂は溶融時の粘度が比較的高く、一方向強化材を作成することが困難なため¹、実際の材料試験との比較は行わないが、数値材料試験で得られた挙動を今回提案する材料構成則にてフィッティングさせることで構成則の実用性を確認する。最後に、一方向CFRTPを積層させたマクロ構造を対象に、マクロ解析および局所化解析結果を例示することで、マルチスケール解析の有用性を確認する。

Table– 1.2 Overview of contents in each chapter.

| Chapter | Material Type | Matrix Resin | Stress state | Proposed Model |
|---------|----------------------------------|---------------------|--------------|---|
| 2 | Visco Elastic | Poly-carbonate | 3D stress | <ul style="list-style-type: none"> • Isotropic Vertical Shift • An-isotropic Vertical Shift |
| 3 | Plastic | Thermoplastic Epoxy | Plane stress | <ul style="list-style-type: none"> • Anisotropic hardening |
| 4 | Visco Elastic + Plastic + Damage | Poly-carbonate | Plane stress | <ul style="list-style-type: none"> • Isotropic Visco Elastic + Plastic + Damage • An-isotropic Visco Elastic + Plastic + Damage |

¹ただし、Figure–1.1で述べたように、平織材のようなその他の強化構造においても、基本構造には一方向強化材と同じマイクロ構造が観察されるため、一方向強化材の材料挙動を把握することは必要不可欠である

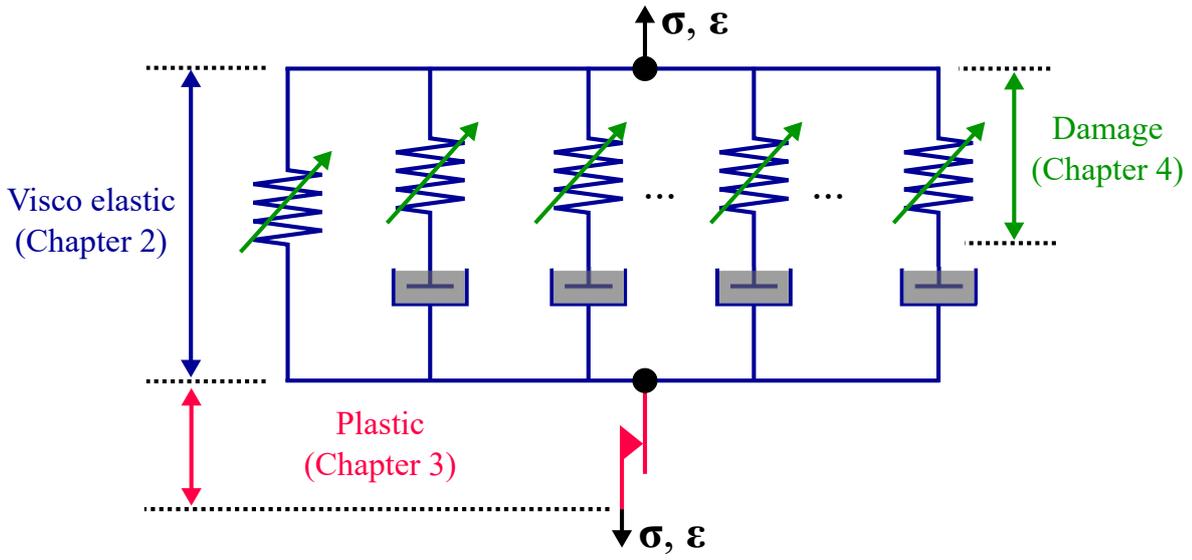


Figure- 1.7 Rheology model proposed in this study.

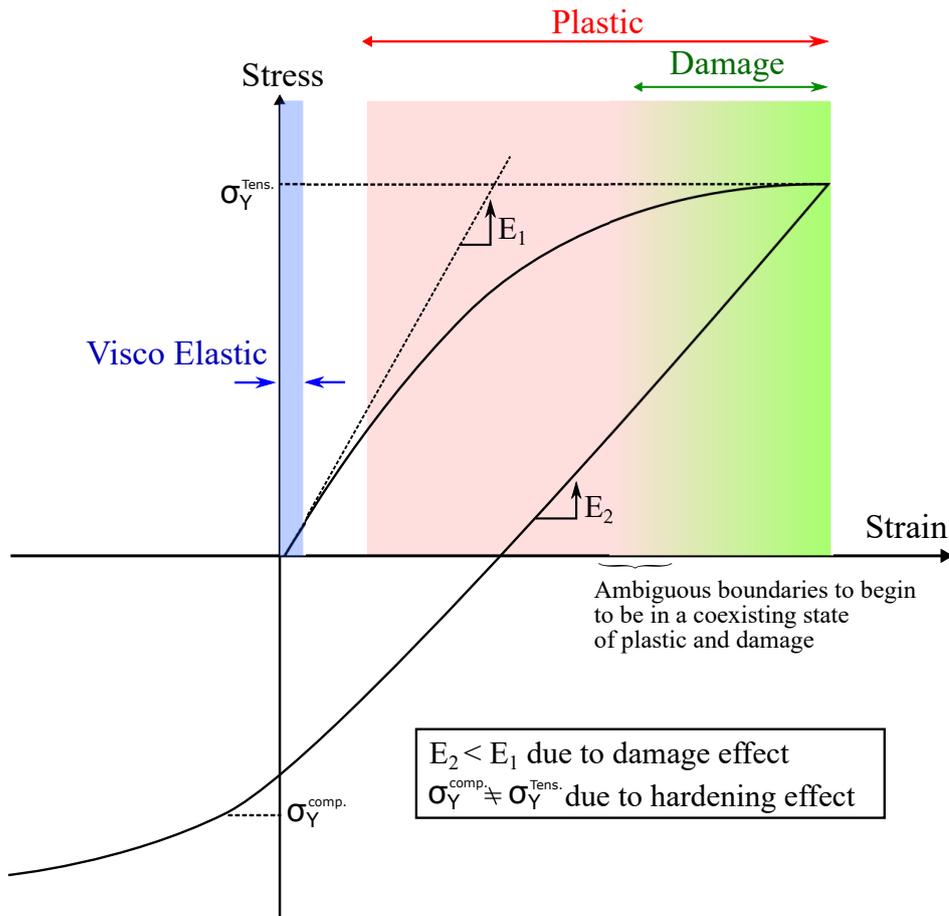


Figure- 1.8 Conceptual diagram for identification of material constants.

第2章 温度依存性の弾性率を考慮した異方性粘弾性の特徴づけと構成則

樹脂は温度に強く依存した粘弾性特性を持つ。特に粘性項は、あらゆる樹脂において顕著に表れることが多く、解析的には一般的に良く知られている時間-温度換算則が用いられる。一方で、本研究が対象としている熱可塑性樹脂では、弾性項においても無視できない程度の温度依存性が表れる。そこで本章では、弾性率の温度依存性を考慮したCFRTPの異方性材料挙動を数値材料試験によって特徴づけ、その特徴をマクロ構造解析へ反映させるための異方性のマクロ粘弾性材料構成則を構築する。また、ミクロモデルを構成する樹脂単体の等方性粘弾性挙動についても、弾性項の温度依存性を考慮できるように、新しいミクロ粘弾性材料構成則も構築する。

具体的な作業フローとしては、まずポリカーボネート（以下、PC）樹脂に対して様々な環境温度下で動的粘弾性試験を行い、貯蔵弾性率、損失弾性率、損失正接の温度依存性を把握する。それらの結果から、各弾性率の温度依存性を確認するとともに、それを表現するためのミクロ材料構成則を構築する。構成則の有効性は、各温度水準の実験データを、構成則のルールに基づいて、周波数軸および弾性率軸方向にシフト操作を行った際に、全データが一本のマスターカーブ上に乗るか否かを確認することで検証する。次いで、CFRTPのマクロ粘弾性材料挙動を観察するために、炭素繊維の体積含有率が60%のミクロモデルに、上記の樹脂の特性を考慮して、実験と同じ温度環境下で応力緩和試験を行う。得られたマクロ応力緩和特性は、特に温度依存性に着目

して特徴づけを行い、異方性のマクロ粘弾性材料構成則を構築する。最後に、応力緩和特性のカーブフィット操作の結果から、マクロ粘弾性材料構成則の妥当性を確認するとともに、同定されたシフト量を確認することで、CFRTPの温度依存性の特徴を明らかにする。

2.1 熱可塑性樹脂の粘弾性特性

2.1.1 供試材

本研究では母材に代表的な熱可塑性樹脂の一つであるPC樹脂を用いた。PC樹脂フィルム（パンライトPC-1151/2151，帝人（株））を16層重ねて、高温プレス成形機内で温度290 [°C]にて加熱・溶融する。その後、圧力5.6 [MPa]の条件下で成形し、冷却速度10 [°C/min]にて50 [°C]まで冷却した後にプレス機から取り出した。こうして平板状に成形されたPC樹脂の厚みは1.9 [mm]で、ガラス転移点 T_g は動的粘弾性試験の損失正接のピークから判断すると155.8 [°C]であった。

2.1.2 実材料試験の条件

動的粘弾性試験は、JIS K7244-3に準じた曲げ振動法で行った。PC樹脂の試験片形状は、Figure-2.1に示すように、厚さ $h = 1.9$ [mm]、幅 $b = 10$ [mm]、長さ50 [mm]で試料長 $l = 28$ [mm]の短冊形に切り出したものとした。試験装置には、セイコーインスツルメンツ社製のSII Exster 6100を用い、両端部を完全固定とし、試料中央部を8 [mm]幅でクランプし、曲げによる正弦的ひずみを加えた。温度条件はTable-2.1に示すように、 $T = 30$ [°C]から170 [°C]の間で5 [°C]の間隔で計測し、加振周波数は0.01 ~ 10 [Hz]の範囲で連続的に変化させ測定を行った。

複素弾性率 E^* ，貯蔵弾性率 E' ，損失弾性率 E'' および損失正接 $\tan\delta$ は次式から算出した。

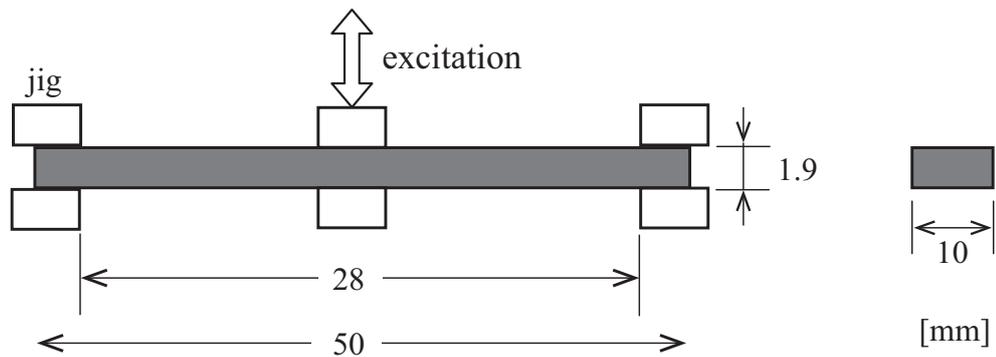
$$E^* = \frac{l^3}{16bh^3} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta Y} \quad (2.1)$$

$$E' = E^* \cdot \cos \delta \quad (2.2)$$

$$E'' = E^* \cdot \sin \delta \quad (2.3)$$

$$\tan \delta = \frac{E''}{E'} \quad (2.4)$$

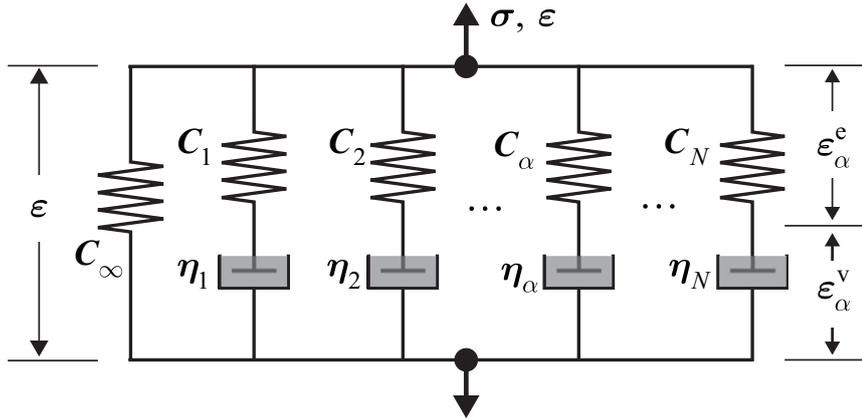
ここで， ΔF は試験片に生じる動的荷重， ΔY は試験片に生じる動的変位， δ は応力とひずみの位相差である。



Figure– 2.1 Configuration of dynamic viscoelastic test.

Table– 2.1 Frequency and temperature levels for dynamic viscoelastic tests.

| Conditions | Value |
|------------------|--|
| Frequency [Hz] | 0.01, 0.02, 0.05, 0.10, 0.20, 0.50, 1.00, 2.00, 5.00, 10.0 |
| | 30.0, 35.0, 40.0, 45.0, 50.0, 55.0, 60.0, 65.0, 70.0, 75.0, 80.0, 85.0 |
| Temperature [°C] | 90.0, 95.0, 100.0, 105.0, 110.0, 115.0, 120.0, 125.0, 130.0, 140.0 |
| | 145.0, 150.0, 155.0, 160.0, 165.0, 170.0 |



Figure– 2.2 Generalized Maxwell model for anisotropic viscoelasticity.

2.1.3 樹脂の粘弾性構成則

数値材料試験における解析対象であるユニットセル内部の樹脂の粘弾性挙動には等方性を仮定し，Figure–2.2 に示すようなレオロジーモデルに基づく一般化 Maxwell モデルにより表現されるものとする．図中でバネ要素を平衡部，弾性バネとダッシュポッドが直列接続されている Maxwell 要素を非平衡部と呼ぶこととし，それぞれ平衡応力と非平衡応力を分担する．また，非平衡部の変形には非圧縮性を仮定し，作用する応力の偏差成分のみが緩和挙動を発現するものとする．このとき，ひずみテンソルを $\boldsymbol{\varepsilon}$ とすると，平衡部で発生する応力 $\boldsymbol{\sigma}_\infty$ と非平衡部の要素 α で発生する応力 $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ は，それぞれ次式のようなになる．

$$\boldsymbol{\sigma}_\infty = \sigma_{\text{vol}}^\infty \mathbf{I} + \mathbf{s}^\infty = \hat{K}_\infty \varepsilon_{\text{vol}} \mathbf{I} + 2\hat{G}_\infty \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \sigma_{\text{vol}}^\alpha \mathbf{I} + \mathbf{s}^\alpha = \hat{K}_\alpha \varepsilon_{\text{vol}} \mathbf{I} + 2\hat{G}_\alpha \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \frac{d}{ds} \text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}) ds \quad (2.6)$$

ここで， s は荷重時間， ε_{vol} と $\text{dev}(\boldsymbol{\varepsilon})$ はそれぞれ体積ひずみと偏差ひずみテンソルを表し， G_∞ ， K_∞ はそれぞれ基準温度における平衡部のせん断弾性率と体積弾性率， G_α は基準温度における非平衡部のせん断弾性率である．また， $\tilde{\tau}_\alpha$ は前述の緩和特性の時間-温度換算則により変換された非平衡部の緩和時間であり，基準温度における粘性 η_α は，

時間-温度換算則のシフトファクター a_T を用いて

$$\tilde{\eta}_\alpha = a_T \eta_\alpha, \quad \tilde{\tau}_\alpha = \frac{\tilde{\eta}_\alpha}{G_\alpha} \quad (2.7)$$

のように変換される。さらに、上付きの $\hat{\cdot}$ を付けて表した弾性係数は、次式のように弾性特性の温度換算則におけるシフトファクター b_T を用いて変換された値である。

$$\hat{K}_\infty = b_T K_\infty, \quad \hat{G}_\infty = b_T G_\infty, \quad \hat{G}_\alpha = b_T G_\alpha \quad (2.8)$$

通常、動的粘弾性試験で得られるデータは、周波数を横軸、貯蔵弾性率と損失弾性率を縦軸にとってプロットするため、便宜上、これら a_T と b_T によるシフトを、それぞれ“横軸シフト”，“縦軸シフト”と呼称することにする。横軸シフトは、温度に依存して分子鎖同士の絡み合いの程度が変化することに起因するが、縦軸シフトはフィジカリエージングによって引き起こされるとされている。すなわち、材料成形時の冷却過程で分子鎖が非平衡状態のまま凍結し、その後緩慢に平衡状態へと遷移していく様子が弾性率の温度依存性として表れる。一般に、熱可塑性樹脂の横軸シフト量には強い温度依存性があることが知られており、アレニウス型やWLF型などの関数形が提案されているが、本研究ではより汎用性の高い多直線近似で定義することにする。また、縦軸シフト量も同様に多直線近似を採用する。

このようにして温度換算された緩和特性および弾性特性を用いて、式(2.5)や(2.6)から平衡部と非平衡部の応力を求めることで、最終的に全応力 σ が次式のように各要素の応力の和で表される。

$$\sigma = \sigma_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha \quad (2.9)$$

ここで、応力緩和試験を想定して、極めて短い時間 ($t \approx 0$) で瞬間的にひずみを負荷し、それを長時間保持する条件を与えると、材料の粘性特性の影響を受けて応力が緩和する。その時の応力-ひずみ間の比例定数である緩和せん断弾性率 $G_r(t)$ は以下に示

すような Prony 級数式で表される。

$$G_r(t) = \hat{G}_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \hat{G}_\alpha \exp\left(-\frac{t}{\hat{\tau}_\alpha}\right) \quad (2.10)$$

一方、実際の材料試験では、理想的な応力緩和試験を行うことは困難であるため、実試験から材料物性値を決定するためには、前節で述べた動的粘弾性試験の結果が用いられる。ここで、ある角周波数 ω で振動する単位ひずみ量 ($\epsilon = e^{i\omega t}$) を強制的に与えることを考えると、粘弾性特性である複素弾性率の実部の貯蔵弾性率と虚部の損失弾性率は

$$G'(\omega) = G_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \frac{G_\alpha \tau_\alpha^2 \omega^2}{1 + \tau_\alpha^2 \omega^2} \quad (2.11)$$

$$G''(\omega) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{G_\alpha \tau_\alpha \omega}{1 + \tau_\alpha^2 \omega^2} \quad (2.12)$$

と表されることが知られている¹⁰⁸⁾。なお、実試験の評価項目と整合するように縦弾性係数で式を整理するため、本研究では、体積弾性率には緩和挙動は存在しないものと仮定する。このとき、等方性の弾性構成則では、縦弾性係数とせん断弾性係数および体積弾性率との間の

$$G = \frac{3KE}{9K - E} \quad (2.13)$$

なる関係は時間や温度に対して不変である。この変換式に基づいて縦弾性係数についても貯蔵成分と損失成分を記述することができる。

$$E'(\omega) = E_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \frac{E_\alpha \tau_\alpha^2 \omega^2}{1 + \tau_\alpha^2 \omega^2} \quad (2.14)$$

$$E''(\omega) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{E_\alpha \tau_\alpha \omega}{1 + \tau_\alpha^2 \omega^2} \quad (2.15)$$

以上の定式化を基に、樹脂の材料物性値を同定するための手順の概略をまとめると、まず実試験で Table-2.1 に示すような様々な温度環境に対して、同一範囲の周波数帯に

における動的な弾性特性を取得しておく。次に、上述の2種類の換算則を用いて、材料応答を各軸方向に任意量シフトさせることで、各温度水準のデータが1本に繋がった曲線（マスターカーブと呼ばれている）を作成すると同時にそのシフト特性を取得する。そして、式(2.14)および(2.15)からなる動的粘弾性応答がマスターカーブと一致するように縦弾性係数 E_α や E_∞ および緩和時間 τ_α を決定する。

2.1.4 樹脂の応力発展の時間離散化

粘弾性構成則における応力は、ひずみに対する関数として、式(2.6)と式(2.5)および式(2.9)によって決定されるが、これらを数値計算の枠組で利用するためには、これらの方程式を時間離散化した応力発展則を準備する必要がある。ここでは、ニュートンラプソン法による増分計算において、現在着目している計算ステップを $n+1$ 、一つ前の計算ステップを n として、各物理変数の添え字に適用することで表現する。この添え字ルールは、本論文全体を通して今後も踏襲していくこととする。

そのような表記法を採用すると、現ステップにおける粘弾性材料モデルの応力は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\alpha \\ &= \left(K^\infty + \sum_{\alpha=1}^N K_\alpha^v \right) \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{vol}} \mathbf{I} + \boldsymbol{s}_{n+1}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{s}_{n+1}^\alpha\end{aligned}\quad (2.16)$$

となり、各偏差応力成分は次式のようになる。

$$\boldsymbol{s}_{n+1}^\infty = 2G_\infty \boldsymbol{e}_{n+1} \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{s}_{n+1}^\alpha = \int_0^{t_{n+1}} \gamma_\alpha \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \frac{\partial \boldsymbol{s}_\infty}{\partial s} ds \quad \left(\because \gamma_\alpha = \frac{G_\alpha}{G_\infty}\right) \quad (2.18)$$

このうち Maxwell 要素の偏差応力についても、現ステップのひずみ量を用いて差分形式で表現をするために

$$\boldsymbol{s}_{n+1}^\infty = \int_0^{t_n} \gamma_\alpha \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \frac{\partial \boldsymbol{s}_\infty}{\partial s} ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_\alpha \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \frac{\partial \boldsymbol{s}_\infty}{\partial s} ds \quad (2.19)$$

のように分離すれば、それぞれ解析的に展開することができて、第1項は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} \gamma_\alpha \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \frac{\partial s_\infty}{\partial s} ds &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \int_0^{t_n} \gamma_\alpha \exp\left(-\frac{t_n-s}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \frac{\partial s_\infty}{\partial s} ds \\ &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) s_n^\alpha \end{aligned} \quad (2.20)$$

また、第2項は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \gamma_\alpha \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \frac{\partial s_\infty}{\partial s} ds &\approx \gamma_\alpha \left[\tilde{\tau}_\alpha \exp\left(-\frac{t_{n+1}-s}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \right]_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{s_{n+1}^\infty - s_n^\infty}{\Delta t} \\ &= \gamma_\alpha \frac{\tilde{\tau}_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \right\} (s_{n+1}^\infty - s_n^\infty) \\ &= 2G_\alpha \frac{\tilde{\tau}_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \right\} (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) \end{aligned} \quad (2.21)$$

これらをすべてまとめると、応力発展則は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \left(K^\infty + \sum_{\alpha=1}^N K_\alpha^v \right) \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{vol}} \mathbf{I} + 2G_\infty \mathbf{e}_{n+1} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) s_n^\alpha + 2G_\alpha \frac{\tilde{\tau}_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \right\} (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

以上、ここで述べた等方性粘性体の構成則とその時間離散化の定式化をボックス2.1にまとめた。

2.2 樹脂の材料物性値同定解析フロー

粘弾性材料構成則の物性値を同定する際の重要なプロセスの一つに横軸および縦軸方向のシフト量の決定がある。前節の最後で述べたが、これは実試験で得られた様々な温度、加振周波数帯における貯蔵弾性率・損失弾性率・損失正接を用いてマスターカーブを描くプロセスである。本節では、そのための自動的にかつある程度客観的な計算アルゴリズムを提案する。

本研究では、実測された樹脂の動的粘弾性特性から各軸のシフト関数を同定するために最適化手法に基づくアプローチを採用する。すなわち、隣り合う温度域の動的粘弾性特性の横軸方向と縦軸方向の不一致量を表す誤差関数 ϕ_a^{iso} , ϕ_b^{iso} をそれぞれ次式で定義し、それらが最小になるように横軸と縦軸のシフト量を同定することにする。

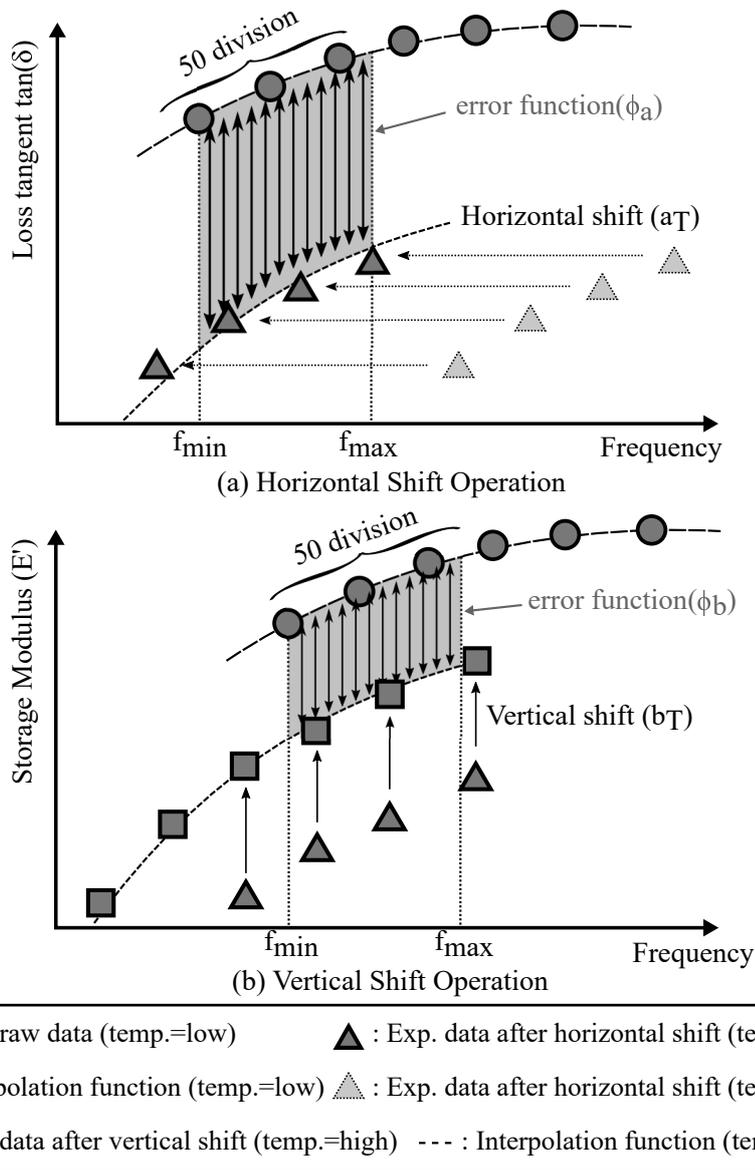
$$\phi_a^{\text{iso}}(a_T) = \sum_{i=1}^{m+1} (\tan(\delta_L)(f_i; a_T) - \tan(\delta_H)(f_i; a_T)) \quad (2.23)$$

$$\phi_b^{\text{iso}}(b_T) = \sum_{i=1}^{m+1} (E'_L(f_i; b_T) - E'_H(f_i; b_T)) \quad (2.24)$$

ここで、セミコロンの“;”の前の引数 f_i は入力した加振周波数であり、後ろ側が同定したいシフト量である。また、添え字 L と H はそれぞれ隣り合う試験温度の低温側および高温側の特性を意味する。Figure-2.3 はこれらの誤差関数を模式的に表したものである。誤差を算定する周波数範囲はシフト演算操作によりカーブが重なり合う（グレーで色づけした）低温側の最小周波数 (f_{\min}) と高温側の最大周波数 (f_{\max}) で囲まれた範囲とし、これを m 分割して各周波数点における誤差を計測して総和をとる。横軸シフトの場合には、誤差関数を計測する範囲がシフト量に依存して変動することになるが、誤差を計測する点の数を常に固定することで、誤差の計測範囲である周波数軸上の幅に依存しない誤差が定量化できる。なお、実測点以外の周波数における損失正接および貯蔵弾性率はスプライン補間によって内挿した値を用いる。また、本研究では誤差関数を最小化するための最適なシフト量の探索は2分法によって行うこととする。

上記の誤差関数は、隣り合う温度水準の組すべてについて定義されるが、すべての温度水準に対応するカーブを同時にシフトさせると、任意性が出てしまい、最適なシフト量を一意に決定することができない。このため、まずはじめに任意に決定した基準温度のデータを固定し、それと隣り合う温度水準のデータのみをシフトさせる。続いて、今同定された温度におけるシフト量を固定して、これより1セット分だけ基準温度から高い（あるいは低い）温度水準のデータを対象として上記の誤差関数を最小にするようなシフト量を得る。これら一連の操作を、基準温度から最も遠い温度水準デー

タまで、低温側と高温側それぞれの方向に繰り返す行うことですべてのシフト量を算出し、全体のマスターカーブを作成する。また、このような誤差関数最小化によるシフト操作は、縦軸方向と横軸方向に対して同時には行わず、はじめに横軸方向のみで誤差関数を最小化したのちに、縦軸方向のシフト操作を行う。



Figure– 2.3 Schematics of error functions to determine the shift functions for master curves.

The gray area indicates the range for evaluating the error. The loss tangent and the storage modulus are used to identify horizontal and vertical shift values, respectively.

2.3 ポリカーボネート樹脂の材料特性

2.3.1 ポリカーボネート樹脂のマスターカーブ

PC樹脂単体の試験片に対して行われた動的粘弾性試験結果を入力データとして、前節で述べた同定方法を適用することで横軸および縦軸方向のシフト量を算定した。なお、誤差算定のための周波数範囲は $m = 50$ とし、基準温度は 150°C に設定した。詳細なデータは後述するが、この温度は縦軸シフト挙動が顕著に表れはじめる温度に対応している。 150°C よりも高い温度では、ほとんど縦軸シフトは見られなかった。実際に高温領域にも縦軸のフィッティング操作をすると、縦軸シフト量が不規則に振動する傾向が見られた。これは計測誤差に関連しているものであり解析上重要ではないと考えて、基準温度よりも高い領域は縦軸シフト量をゼロとおいた。こうして得られたシフト量を用いて描いたマスターカーブを Figure-2.4 および 2.5 に示す。ここで、横軸シフト操作のみを行った結果を図の左列に、横軸シフト後の特性に対して縦軸のシフト操作を追加した結果を右列に表示した。左側の貯蔵弾性率の結果は、マスターカーブが高温側（低周波数側）では連続的に繋がっているのに対して、低温側（高周波数側）では縦軸方向にずれている様子が確認できる。これに対して、Figure-2.4 および 2.5 の右列から分かるように、縦軸方向のシフト操作を施すことでこの誤差を補正でき、マスターカーブがより適正に描けている様子が確認できる。これら2方向のシフト操作によって得られた1本のマスターカーブが正しい粘弾性挙動であるならば、横軸シフトのみで作成した貯蔵弾性特性は最大で約 12.9 % の誤差率と見積もられ、無視することのできない値であるといえる。

ちなみに、横軸シフト操作を行うことで緩和特性の時間-温度換算則の具体的な横軸シフト量を同定し、マスターカーブを作成する際には、慣例的に損失正接の試験結果を用いることが多い。これは、貯蔵弾性率あるいは損失弾性率が仮に縦軸方向にシフ

トしたとしても、その効果を相殺できると期待しているからである。縦軸シフトの影響を無視した解析を行う上では有効な手段であるが、貯蔵弾性率と損失粘弾性の温度依存性が同一である保証はなく、粘弾性特性の本来の温度依存性材料挙動を正確には表現できない可能性がある点に注意が必要である。Figure-2.4 と 2.5 において損失弾性率と損失正接の左右の結果を比較すると、ほとんど結果に違いがないように見えるのは、縦軸シフトする周波数帯では損失弾性率と損失正接の絶対値が圧倒的に小さいためである。最後に、これらのマスターカーブを作成するために施した各軸方向の温度依存性シフト量を Figure-2.6 に示す。横軸シフト関数は一般的に知られているような、ガラス転位点近傍で不連続に変化する、いわゆる典型的なアレニウス型の特性を示す様子が確認される。縦軸シフト量については、ガラス転位点よりも低い温度で急激に変化し、その後の温度低下に対してはほぼ線形的な傾向をとることが確認される。

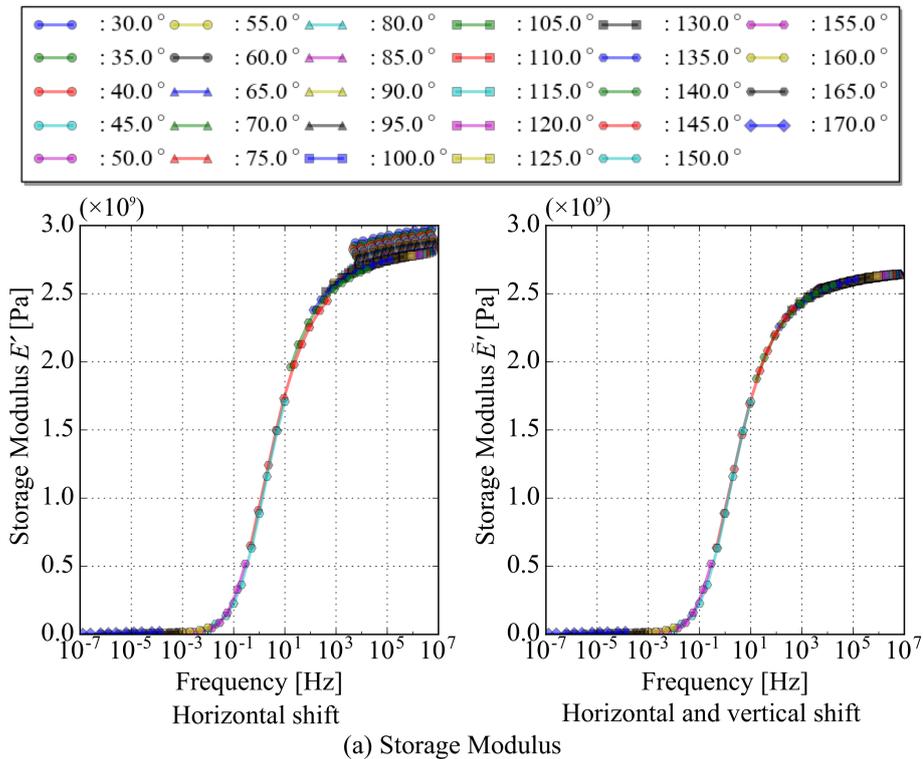
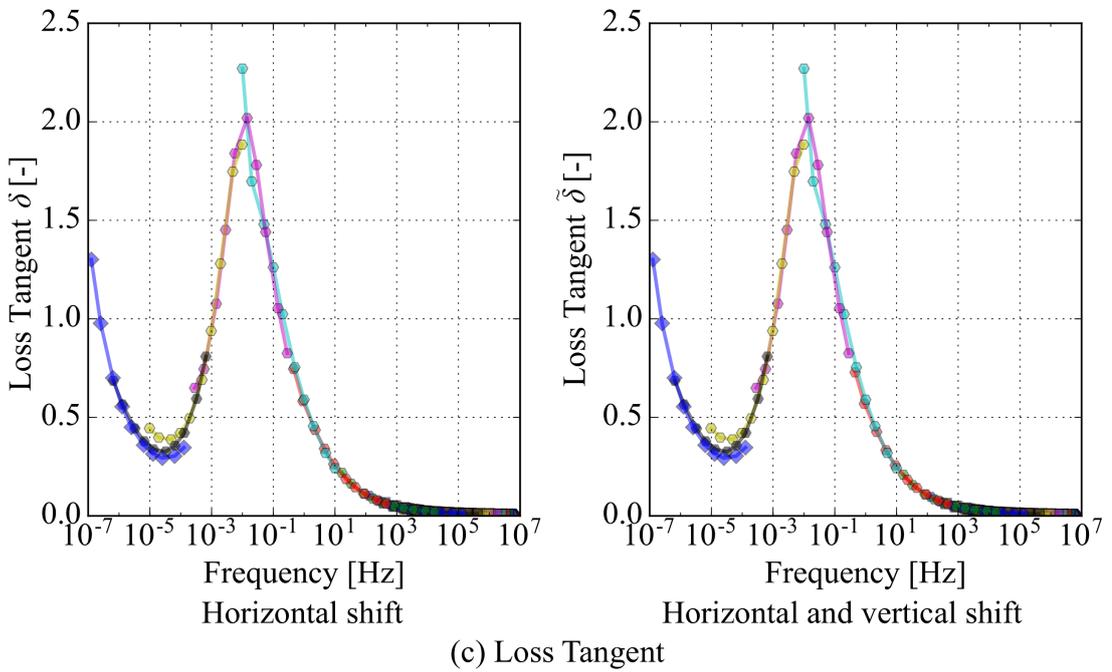
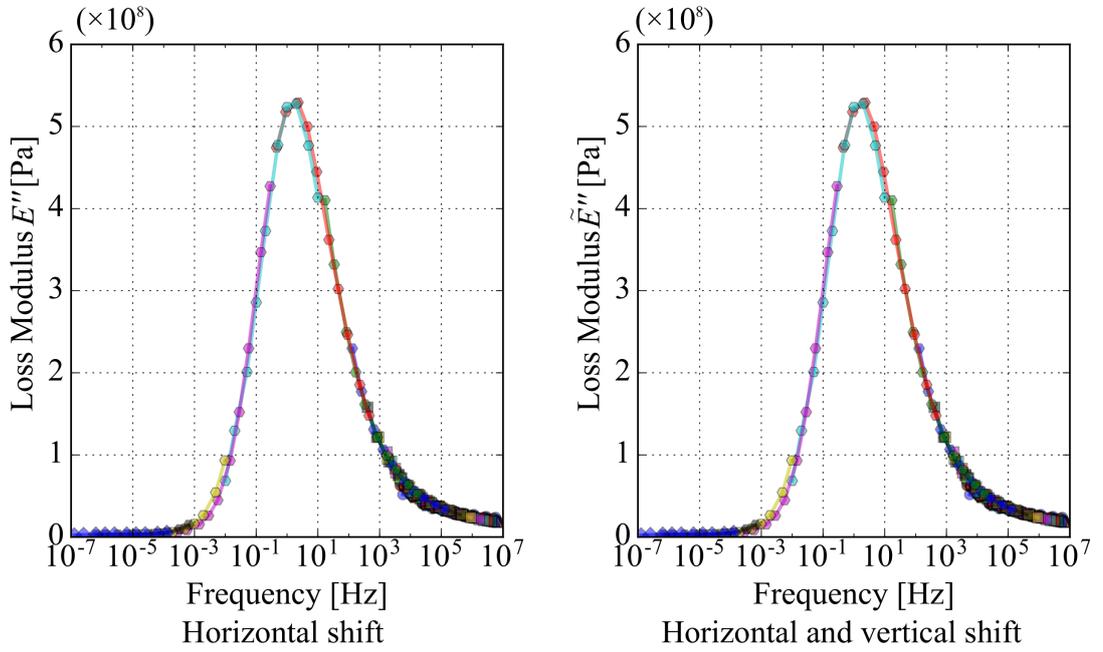
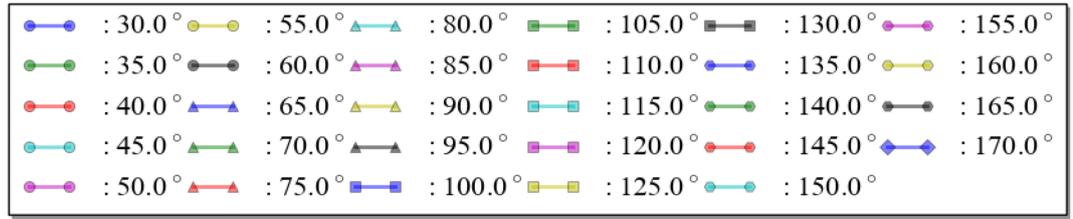
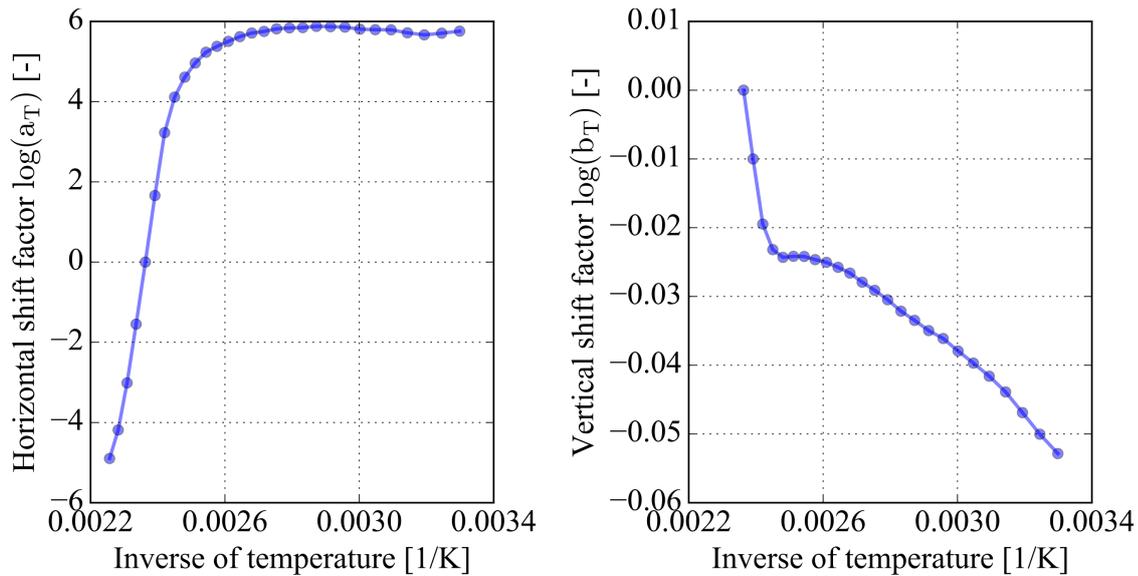


Figure- 2.4 Master curves of storage modulus obtained with horizontal and vertical shift operations.



Figure– 2.5 Master curves of loss modulus and loss tangent obtained with horizontal and vertical shift operations.



Figure– 2.6 Evaluated shift properties for relaxation time and modulus: (a) Horizontal shift factor; (b) Vertical shift factor. Reference temperature is set at 150 degrees.

2.3.2 ポリカーボネート樹脂の粘弾性パラメータの同定

上で得られたPC樹脂の貯蔵弾性率のマスターカーブに対して、Prony級数式(2.14)を用いてカーブフィッティング操作を行うことで粘弾性パラメータを同定する。本研究では、Prony級数の粘弾性パラメータの同定には藤川ら¹¹⁰⁾が提案した方法を適用し、そのなかで必要となる最適化アルゴリズムには粒子群最適化 (PSO : Partible Swarm Optimizaiton) 手法^{111,112)}を採用する。ただし、一般化Maxwellモデルを構成するMaxwell要素の要素数 N は15に固定して最適化対象から除外する。また、緩和時間に対する誤差関数の感度が極めて高いため、安定して最適解が取得できるように探索範囲を限定する。具体的にはマスターカーブが得られている周波数帯である $10^{-7} \sim 10^7$ の間を対数スケールで等間隔に15等分した時刻の0.1倍～10倍の範囲を各緩和項の探索範囲とする。

最適化解析の条件としては探索個体数を30に設定し、探索のための反復は経験的に十分誤差が小さくなる200回で強制終了することにする。終了後には全探索個体が同

じ最適値に収束していることを確認するとともに、複数回の最適化解析を試行して毎回同じ最適値に収束することを確認することで、全体最適値に収束しているものと判断する。このような方針で前述の貯蔵弾性率のマスターカーブに対してフィッティングした結果を Figure-2.7 に示す。図中には得られた Prony 級数の値も併記している。実測から得られたマスターカーブのプロットと、同定された Prony 級数の応答はほぼ一致しており、良好にフィッティングができていることが確認できる。また、平衡部の（あるいは緩和完了時の）縦弾性率は 1.05×10^5 [Pa] と同定され、未緩和の貯蔵弾性率の値である約 2.5×10^9 [Pa] と比較して 10^4 ほど小さい。このように PC 樹脂単体では、時間経過に伴う緩和によって初期弾性率の大部分が失われることが分かる。

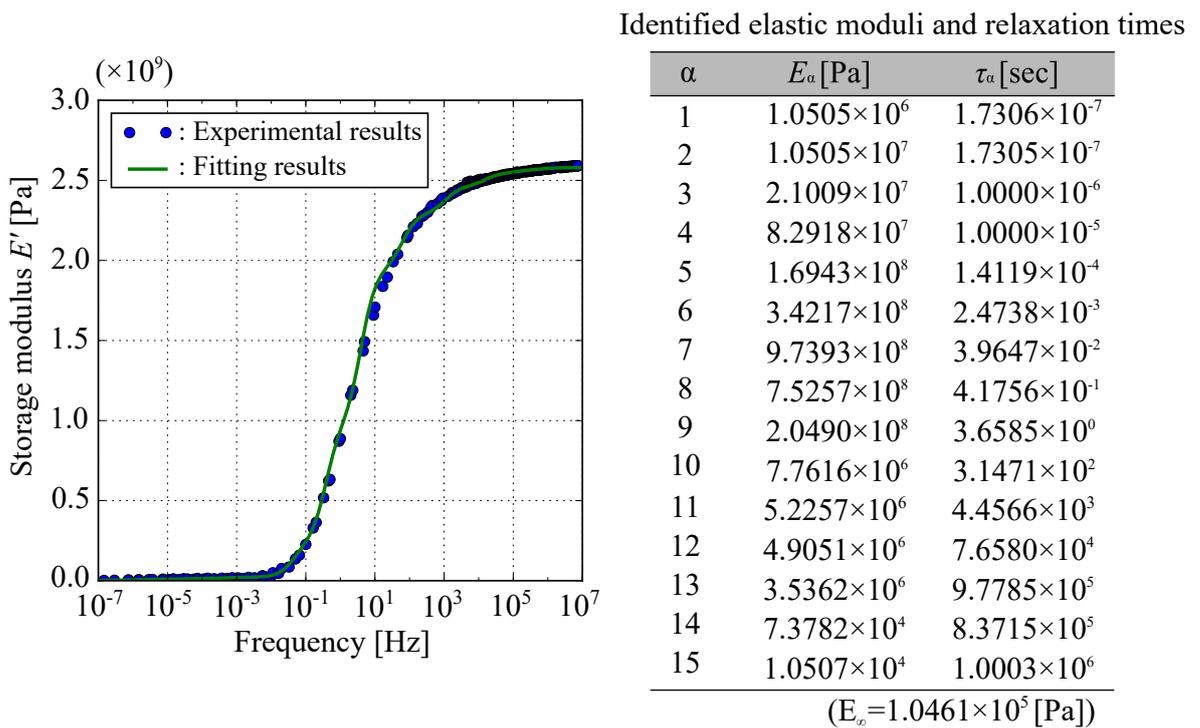


Figure- 2.7 Fitting result of storage modulus with identified relaxation times and elastic moduli.

2.4 異方性の粘弾性構成則

2.4.1 異方性の一般化 Maxwell モデルとシフト関数

CFRTP のマクロ構成則には、第2節で示した一般化 Maxwell モデルの平衡部と非平衡部の弾性および粘性に異方性を導入したモデルを採用する。なお、特に混乱のない限り、以降は応力およびひずみなどのマクロ変数、材料パラメータには同一の表記・記号を用いることにする。

平衡部と α 番目の非平衡部の応力-ひずみ関係を次式のように与える。

$$\boldsymbol{\sigma}_\infty = \hat{\mathbb{C}}_\infty : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.25)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_\alpha : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_\alpha^v = \hat{\mathbb{C}}_\alpha : \boldsymbol{\epsilon}_\alpha^e \quad (2.26)$$

ここで、 $\hat{\mathbb{C}}_\infty$ は平衡部の弾性テンソル、 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_\alpha$ と $\hat{\mathbb{C}}_\alpha$ はそれぞれ非平衡部の粘性テンソルと弾性テンソルであり、その階数はどれも 4 である。また、ひずみに付した上付添え字 v と e は、それぞれがダッシュポット要素とバネ要素のひずみに対応していることを表している。さらに、 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_\alpha$ に付した \sim は前節と同様に、緩和に関する粘性が時間-温度換算されたことを意味するが、実際の換算則は α 番目の Maxwell 要素の緩和時間テンソル $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha (= \tilde{\boldsymbol{\eta}}_\alpha : \mathbb{C}_\alpha^{-1})$ に適用する。この緩和時間テンソルに直交異方性を仮定して Voigt 表記で表すと次式のようなになる。

$$[\tilde{\boldsymbol{\tau}}^\alpha] = \begin{bmatrix} a_{11}\tau_{11}^\alpha & a_{12}\tau_{12}^\alpha & a_{13}\tau_{13}^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22}\tau_{22}^\alpha & a_{23}\tau_{23}^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33}\tau_{33}^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ & & & a_{44}\tau_{44}^\alpha & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & a_{55}\tau_{55}^\alpha & 0 \\ & & & & & a_{66}\tau_{66}^\alpha \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

ここで、 a_{ij} は基準温度の緩和時間テンソルの成分 τ_{ij}^α に対する時間-温度間の換算のためのシフト量を表す。なお、本研究を通して Voigt 表記で表す際の 2 階テンソルの成分の並びは 11, 22, 33, 12, 23, 31 とする。

また、直交異方性も仮定して、Poisson 効果以外の連成成分はゼロとする。さらに、マトリクスには対称性があるため、一つの緩和項が持つ横軸シフト量の独立な成分は 9 つである。一方、本研究では各弾性テンソルについても対称性および温度依存性を考慮して次の変換式を提案する。

$$[\hat{C}_\infty] = \begin{bmatrix} b_{11}^\infty C_{11}^\infty & b_{12}^\infty C_{12}^\infty & b_{13}^\infty C_{13}^\infty & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22}^\infty C_{22}^\infty & b_{23}^\infty C_{23}^\infty & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33}^\infty C_{33}^\infty & 0 & 0 & 0 \\ & & & b_{44}^\infty C_{44}^\infty & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & b_{55}^\infty C_{55}^\infty & 0 \\ & & & & & b_{66}^\infty C_{66}^\infty \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$[\hat{C}_\alpha] = \begin{bmatrix} b_{11}^\alpha C_{11}^\alpha & b_{12}^\alpha C_{12}^\alpha & b_{13}^\alpha C_{13}^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22}^\alpha C_{22}^\alpha & b_{23}^\alpha C_{23}^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33}^\alpha C_{33}^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ & & & b_{44}^\alpha C_{44}^\alpha & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & b_{55}^\alpha C_{55}^\alpha & 0 \\ & & & & & b_{66}^\alpha C_{66}^\alpha \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

ここで、右辺の成分 C_{ij}^∞ および C_{ij}^α は、それぞれ Maxwell 要素の平衡部と非平衡部の基準温度における弾性テンソルの成分であり、 b_{ij}^∞ および b_{ij}^α はそれぞれ対応する弾性率成分-温度間を換算する縦軸シフト量で、互いに独立であるものと仮定する。また、非平衡部は Maxwell 要素の数だけ縦軸シフト量を定義することも可能であるが、そうした

場合、安定したフィッティング結果が得られない問題が発生した。一方、すべて同じ縦軸シフト量を定義した方が、より安定的で且つ実用上十分なフィッティング精度を得られることが確認できたため、経験則として後者の定式化を採用した。なお、これらのシフト量は、樹脂の特性を反映して温度依存性を持つことが想定されるので、樹脂の場合と同様に温度に対して多直線関数で近似する。

以上の各軸シフトを考慮した弾性率および粘性係数を用いると、粘弾性体の弾性率の時間経過に伴う変化は、以下のような緩和弾性テンソルの Prony 級数式で表すことができる。

$$\mathbb{C}(t) = \hat{\mathbb{C}}_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \hat{\mathbb{C}}_{\alpha} : \exp(-t\tilde{\tau}_{\alpha}^{-1}) \quad (2.30)$$

なお、ここでは一般性を保つ目的で粘性にも異方性を仮定したが、既往の研究^{39,40,113})によれば CFRP の粘弾性挙動は樹脂のそれを引き継ぐことが確認されているため、対応する一般化 Maxwell モデルにおける緩和特性は等方的と考えて良く、横軸シフト量も樹脂と同じはずである。このため、式(2.27)の Voigt 表記で表した2階の緩和時間テンソル $\tilde{\tau}_{\alpha}$ は樹脂と同じスカラー値 $\tilde{\tau}_{\alpha}$ に縮退し、Prony 級数も平衡部と非平衡部の弾性係数テンソルにのみ異方性を考慮した次式のような表現になる。

$$\mathbb{C}(t) = \hat{\mathbb{C}}_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \hat{\mathbb{C}}_{\alpha} \exp\left(-\frac{t}{\tilde{\tau}_{\alpha}}\right) \quad (2.31)$$

ただし、異方性緩和時間テンソルの定義式 $\tilde{\tau}_{\alpha} = \tilde{\eta}_{\alpha} : \mathbb{C}_{\alpha}^{-1}$ において、粘性の異方性の物理的解釈が困難であるため、スカラー値への縮退は自明ではないことに注意されたい。

2.4.2 応力発展の時間離散化

等方性の粘弾性構成則と同様に、応力発展の時間離散化方程式を示す。ただし、その導出過程については、等方性の定式化とほぼ同じであるため詳細は割愛する。Maxwell 要素を構成する粘性要素や弾性要素が式(2.25)や式(2.26)に示したようにマトリクス

形式で表現されること，さらに体積成分と偏差成分には分離しないことに注意しながらまとめると，現ステップの応力は

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\alpha} \quad (2.32)$$

とできる．そして各応力成分は次のようになる．

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\infty} = \mathbb{C}_{\infty} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\alpha} &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{\alpha}}\right) \boldsymbol{\sigma}_n^{\alpha} + \frac{\tilde{\tau}_{\alpha}}{\Delta t} \boldsymbol{\gamma}_{\alpha} \left\{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{\alpha}}\right)\right\} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\infty} - \boldsymbol{\sigma}_n^{\infty}) \\ &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{\alpha}}\right) \boldsymbol{\sigma}_n^{\alpha} + \frac{\tilde{\tau}_{\alpha}}{\Delta t} \boldsymbol{\gamma}_{\alpha} \left\{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{\alpha}}\right)\right\} \mathbb{C}_{\infty} : \Delta \boldsymbol{\epsilon} \\ &(\because \boldsymbol{\gamma} = \mathbb{C}_{\alpha} : \mathbb{C}_{\infty}^{-1}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

以上，本研究が提案する異方性一般化 Maxwell モデルと縦軸および横軸のシフト関数を組み合わせた構成則とその時間離散化の定式化を章末のボックス 2.2 にまとめた．

2.4.3 パラメータの同定

樹脂の実試験では，第 2 節で述べたような 3 点曲げによる単一の振動モードだけで材料挙動の表現に必要な材料パラメータをすべて同定することができるが，異方性を有する CFRTP では，単一モードの材料試験のみで式 (2.27)，(2.28) および式 (2.29) のすべてのテンソル成分を決定することはできない．そのため，マクロひずみテンソルの 6 つの独立な成分のうち一成分のみが値を持ち，それ以外の成分はゼロであるようなマクロ変形モードを 6 パターン用意し，それぞれを入力データとして数値材料試験を実施する．なお，動的粘弾性試験を模擬した数値材料試験では，準定常に近い状態に達するまで解析を行う必要があり，計算コストが大きくなってしまうため，本研究では動的粘弾性試験ではなく静的な応力緩和試験を実施することにする．

異方性一般化 Maxwell モデルについての Prony 級数および各軸方向のシフト量の同定に際しても，2.2 節で紹介した樹脂と同様の最適化計算に基づく手法を適用する．異

方性一般化 Maxwell モデルでは、緩和弾性テンソルおよび緩和時間テンソルの成分はそれぞれ独立しており、そのすべてを同定する必要がある。しかしながら、数値材料試験における応力緩和解析であれば、上述したように6つの独立なマクロひずみテンソルのうち一成分のみが値を持ち、それ以外の成分はゼロであるようなマクロ変形モードを用いることで、緩和弾性テンソルの全成分の材料応答を容易に取得することができる。また、今回採用した Prony 級数型の粘弾性材料構成則では、応力はマクロ成分ひずみに対して線形結合された形で定式化されているため、緩和弾性テンソルの各成分を独立して個々に同定すればよい。ただし、実試験で行った動的粘弾性試験からの同定プロセスとは異なり、まず先にマスターカーブを Prony 級数でカーブフィットし、その後各軸の異方性の縦軸シフト量を同定する。これは、縦軸シフト量は (2.28) 式や (2.29) 式で示したように、純弾性項と Maxwell 要素の弾性項の2つの成分を持つためである。言い換えると、CFRTP では一定の温度環境下にて、応力緩和特性の形状を保持しつつ単純に全時間範囲で等しく縦軸方向に平行移動するだけとは限らないため、応力緩和特性の幾何学的な形状から誤差関数を作りカーブフィットをすることが難しい。一方、数値材料試験では、広い時間領域の材料応答を容易に取得することができることから、様々な温度の特性を縦や横にシフトさせることなく、単一の温度データのみからマスターカーブを得ることができるためこの問題を解決することができる。いま、Voigt 表記で6パターンのマクロ変形モード j ($j = 1 \sim 6$) を入力データとする数値材料試験を行い、 i ($i = 1 \sim 6$) 成分の緩和弾性率の各時刻 t_k での成分値 $\bar{C}_{ij}(t_k)$ が算出できたものとする。このとき、Prony 級数 (2.31) の各項における弾性率の成分 C_{ij}^∞ および C_{ij}^α は、任意に設定した基準温度における各成分の緩和弾性特性を用いて、以下の誤差関数を最小化することで同定することができる。

$$\phi^{\text{aniso}}(C_{ij}^\infty, C_{ij}^\alpha) = \sum_{k=1}^{m+1} \left(\bar{C}_{ij}(t_k) - C_{ij}(t_k, \tau^\alpha; C_{ij}^\infty, C_{ij}^\alpha) \right) = \sum_{k=1}^{m+1} \left(\bar{C}_{ij}(t_k) - \left(C_{ij}^\infty + \sum_{\alpha=1}^n C_{ij}^\alpha \exp\left(-\frac{t_k}{\tau^\alpha}\right) \right) \right) \quad (2.35)$$

ここで C_{ij} が材料構成則の応答である。なお、前述のように CFRTP のマクロ緩和特性は樹脂のそれを引き継ぐため、緩和時間には樹脂と同じ値を与え、同定対象とはしないことにする。また、基準温度以外の緩和弾性率を決定する際に、横軸シフト量については樹脂のそれを転用できるのであれば同定対象にする必要はないが、次節ではそのことを確認するために、異方性を仮定して全テンソル成分を同定することにする。具体的には、第3節で説明した樹脂単体のシフト量を同定する方法に倣って、緩和弾性率の各成分について次の誤差関数を最小にするように横軸シフトを決定する。

$$\phi_a^{\text{aniso}}(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{m+1} \left(\tilde{C}_{ij,L}(t_k) - \tilde{C}_{ij,H}(t_k; a_{ij}) \right) \quad (2.36)$$

ここで、 \tilde{C}_{ij} は Prony 級数式 (2.31) の $\tilde{\tau}_\alpha$ に反映させることで横軸シフト適用した後の応答である。一方、縦軸シフト量については、式 (2.28), (2.29) の変換則を用いて Prony 級数式 (2.31) の応答をシフトさせた緩和曲線が数値材料試験の結果と一致するように決定する。具体的には、誤差関数

$$\phi_b^{\text{aniso}}(b_{ij}) = \sum_{k=1}^{m+1} \left(\tilde{C}_{ij,L}(t_k, a_{ij}) - \hat{C}_{ij,H}(t_k; b_{ij}) \right) \quad (2.37)$$

を最小にする横軸シフト量 b_{ij} を成分ごとに独立に決定する。ここで、 \hat{C}_{ij} は横軸シフト適用後の \tilde{C}_{ij} に対して縦軸シフトを適用した後の緩和弾性率である。

2.5 数値材料試験によるマクロ材料挙動の特徴づけ

動的粘性試験の実測から同定された PC の材料物性値を用いて、均質化法に基づく数値材料試験によって CFRTP のマクロな粘弾性挙動の特徴付けを行うとともに、前節で示した異方性粘弾性構成則のパラメータを同定する。解析には、汎用 FEM 解析ツールの ANSYS19.0¹¹⁴⁾ およびその均質化解析アドインツールである Multiscale.Sim19.2¹¹⁵⁾ を用いる。温度依存性を多直線で近似した横軸シフト挙動および縦軸のシフト挙動を表現するための材料構成則は、ツールの中には標準実装されていないため、材料構成則を FORTRAN 言語で記述して、ユーザーサブルーチンとしてツールに実装した。

2.5.1 解析条件

解析に使用した FE モデルの概観と幾何条件および炭素繊維の直交異方性弾性率を Figure-2.8 に示す。マトリクスを構成する要素には、前述した横軸および縦軸シフトを考慮した PC の粘弾性特性を定義する。炭素繊維とマトリックスである PC 樹脂の界面接着性は、有機溶剤による炭素繊維表面のエポキシ系サイジング剤の除去やオゾン酸化処理による界面処理により、繊維破断まで良好な接着性が得られることが知られている¹¹⁶⁾。そのため本研究では、炭素繊維と PC 樹脂との界面は完全に結合されていると仮定する。これらの条件の下、マクロひずみを強制変位として与えた静的な応力緩和試験を模擬した解析を行う。温度水準には Table-2.1 に示した実試験と同じ条件を用いる。

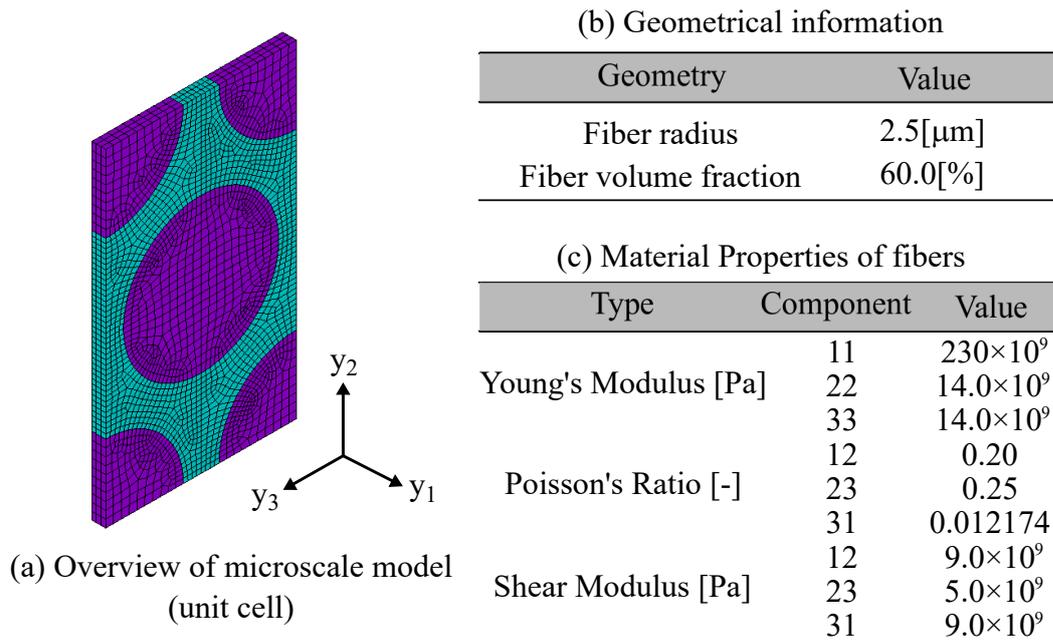


Figure- 2.8 Finite element model for numerical material testing.

前述したように、連続繊維系の複合材料は極めて強い異方性挙動を示すため、複数の変形モードに対して数値材料試験を行う必要がある。解析対象とした一方向強化材では、 $y_2 - y_3$ 平面内では擬似等方的な特性を有する対称性を持つため、単軸引張圧縮の

モードには y_1 方向と y_3 方向の 2 種類，純せん断モードについても y_{12} 方向と y_{23} 方向の 2 種類の合計 4 種類の変形モードについて，対応するマクロひずみ成分を 1.0%，他の成分はゼロに保持するような応力緩和試験の数値解析を行う．負荷途中に緩和挙動が出ないように 10^{-15} [sec] の極めて短い時間で与えた後にこのマクロひずみ成分を 10^{15} [sec] の時刻まで保持する．マクロひずみが 1.0% であるから，マクロ緩和弾性テンソルの各成分は，こうして得られる各変形モードのマクロ応力成分を 100 倍した値である．

2.5.2 解析結果

一方向強化材のユニットセルモデルに対して応力緩和の数値材料試験を実施することで得られた緩和弾性率の結果を Figure-2.9 および 2.10 に示す．数値材料試験結果のプロットに加えて，マスターカーブを Prony 級数で近似した結果と，それに対して式 (2.27) ~ (2.29) による縦軸および横軸シフト量を与えてフィッティングした結果を実線で示している．ここで，Prony 級数近似に用いたマスターカーブには温度 150 [°C] の結果を採用した．樹脂単体の場合と同様にそれよりも高温状態の縦軸シフト量はゼロとおいた．なお，ここでは結果を見やすくするために，全温度データではなく，30 ~ 170 [°C] 間を 20 [°C] の間隔で抽出した温度水準の結果のみを表示している．

繊維が配向している方向の弾性率成分 C_{11} は，他の方向と比較して極端に大きな値を示しているものの，他の方向と同様に緩和する挙動を示している．さらに，各試験温度にて緩和弾性率が急激に減少しはじめる時刻および緩和が終了する時刻は，すべての緩和弾性率成分において類似している様子も確認できる．このことは，CFRTP の弾性挙動は異方性が顕著であるが，その緩和挙動はほぼ等方的に振る舞うことを示唆している．実際，基準温度 150 [°C] のマスターカーブと一致するよう，グラフを横軸にシフトさせてシフト量を同定してみると Figure-2.11 に示すようになる．図中には，2.3.1 節で求めた PC 樹脂単体のシフト量も記載しているが，すべての横軸シフト成分

が樹脂の特性とほぼ一致していることが分かる。したがって、CFRTPの緩和挙動に関する時間-温度換算則については、既往の実験的研究で報告されているように、樹脂の特性がそのままCFRTPに引き継がれることが確認できる。すなわち、CFRTPの緩和時間および時間-温度換算特性は等方的である。この場合、同定すべきProny級数は弾性係数のみとなるため、寺田ら⁴⁶⁾によって提案された同定手法が簡便で実用上も都合が良い。樹脂の弾性率がCFRTPのマクロ弾性率に与える感度の変形モードによって異なるとしても、樹脂の弾性率低下に追従してマクロ弾性率も低下する傾向を示すことは自明であるため、このような傾向は、樹脂の種類や微視構造の形状に依存することなく決定されると考えられる。ただし、複合材料を構成する材料の中に粘弾性体が複数存在している場合には、例外的に緩和時間テンソルが異方性を示すことも考えられ、その成分と対応するシフト量も同定対象となることが考えられるが、この点については今回の検討対象とはしない。

次に、縦軸シフトの同定結果をFigure-2.12に示す。CFRTPのマクロ粘弾性構成則として採用した異方性一般化Maxwellモデルについて、その平衡部の弾性係数テンソルに関する縦軸シフト量は、すべての成分がほぼゼロである。これに対して、非平衡部の弾性係数テンソルに関する縦軸シフト量は、樹脂と類似の傾向があるものの、一致もせず異方的な挙動を示すことが確認される。これは、樹脂の弾性率がCFRTPのマクロ弾性率に与える感度に異方性が存在するためである。これらの結果から、縦軸シフトの特徴的な挙動が2点ほど示唆される。まず、平衡部と非平衡部のシフト量が異なることから、縦軸方向には全時間範囲にて等しくシフトしてないことが分かる。その傾向を定量的に示すために、試験開始時 (1.0×10^{-15} sec) と終了時 (1.0×10^{15} sec) の挙動に着目して、雰囲気温度 $30[^\circ\text{C}]$ と $150[^\circ\text{C}]$ のときの緩和弾性率の比率を計算した結果をFigure- 2.13に示す。この図から、樹脂が完全に緩和した時刻(終了時)では、すべての緩和弾性率の成分についてこの比率がほぼ1.0であり、温度の違いによる

差はほとんどないことが分かる。これに対して、緩和前の時刻（試験開始時）の緩和弾性率ではすべての成分で温度の違いによる差が大きい。このことから、緩和弾性率は、温度の変化に伴って緩和曲線を変化させながら縦軸方向にシフトしていると言える。これは、横軸シフト挙動とは大きく異なる特徴である。特に、 C_{22} や C_{55} のように、マクロ緩和弾性率に対する樹脂の緩和弾性率の影響が大きい成分ではこの傾向がより顕著に表われていることが分かる。一方、非対角成分も樹脂物性がマクロ弾性率に影響を与えており、特に C_{12} は全成分の中で最も影響が大きいことが示唆される。通常、樹脂の物性が支配的な変形モードでは、マクロ弾性率が小さな値を示す傾向があるが、Figure-2.9 および 2.10 では C_{12} は他の成分と比較して最小値を示していない。これは、マクロポアソン比もマクロ弾性率に少なからず影響を与えるためであると考えられる。緩和弾性率の非対角項の物理的な解釈は困難であるが、このような視点で結果を評価することによって、間接的にマクロ材料挙動の特徴づけが可能になるはずである。

非平衡部の縦軸のシフト量 b_{ij}^v は、温度に対するマクロ緩和弾性率の変化量とは必ずしも大小関係が一致しないことも注目すべきである。Figure-2.13 を見ると、緩和前の緩和弾性率の温度に対する変化率が最も大きいのは C_{12} で約 1.1 倍であるのに対して、 C_{11} ではわずか 1.005 倍である。ところが、Figure-2.12 に示した非平衡部の縦軸シフト量 b_{ij}^v を比較すると、11 成分の方が大きな値を示している。このような結果となる原因は非平衡部の弾性率の値にあるものと考えられる。このことを確認するために、マクロ緩和弾性率のなかで平衡部の弾性率が占める割合を Figure-2.14 に示す。この図から、11 成分では緩和弾性率のうちの約 97% もの割合が平衡部で占められており、非平衡部の弾性率はわずかな値であることが分かる。非平衡部の弾性率が小さい場合には、たとえ縦軸シフト量が小さくても、大きな b_{ij}^v を乗じなければ目的のシフト量を達成することができない点に留意する必要がある。なお、今回は繊維の体積含有率を 60% に限定して解析を行ったが、体積含有率が変化した場合には、樹脂の緩和特性が支配的であ

る b_{12} 等では、その影響が Figure-2.13 等に顕著に表れると予想される。

以上のように、縦軸シフトは様々な要因でシフト量が決定されるため、単純に任意の時刻だけに着目して各温度の弾性率比から同定することはできず、適切な誤差関数を設定した最適化手法によって同定する必要があると結論付けられる。

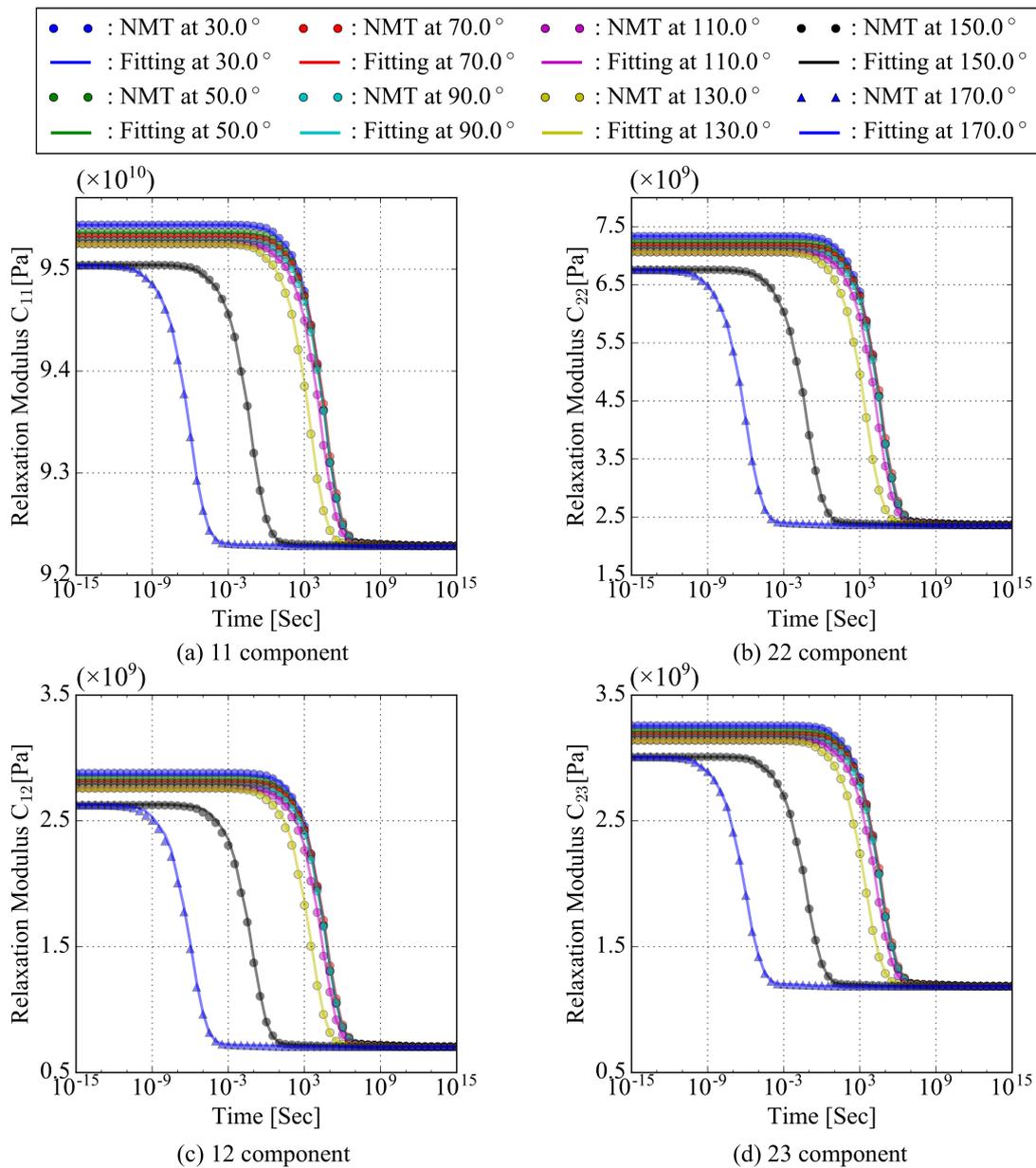
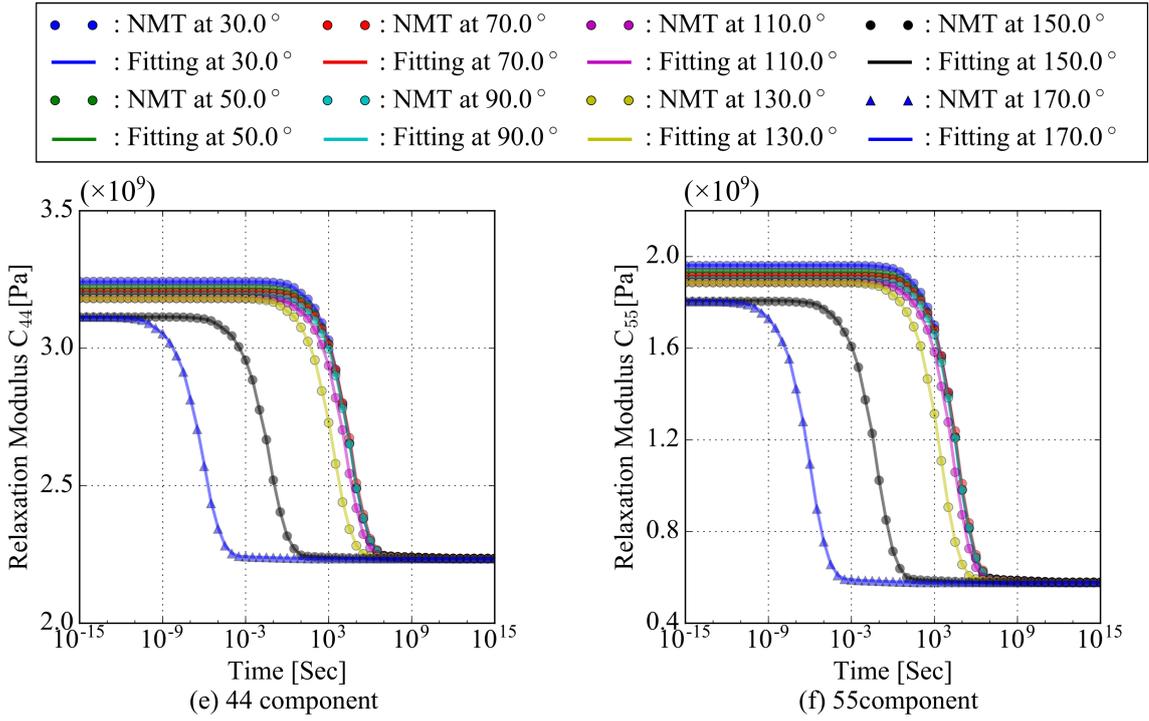
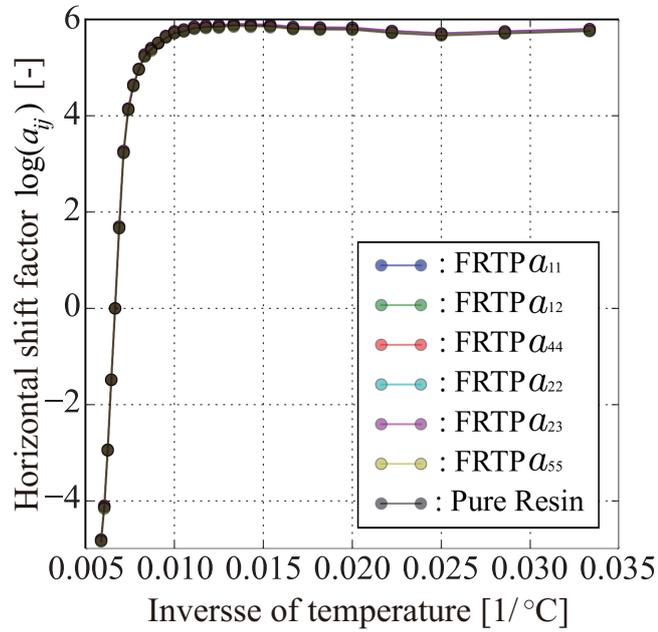


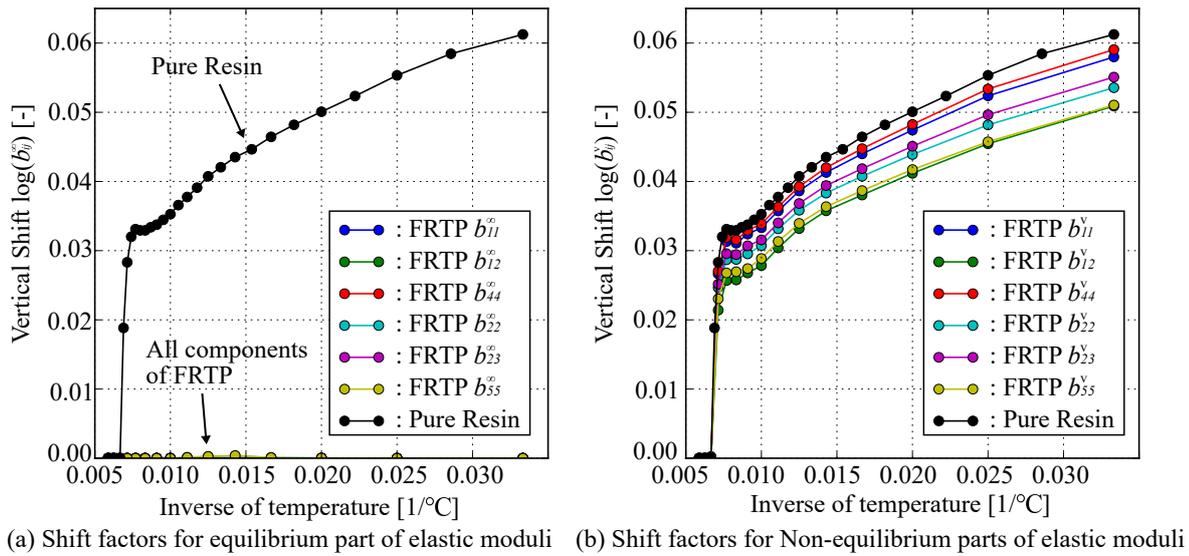
Figure- 2.9 Components of macroscopic relaxation moduli tensor of CF RTP model. The responses of material model proposed in this study show good agreement with numerical test results.



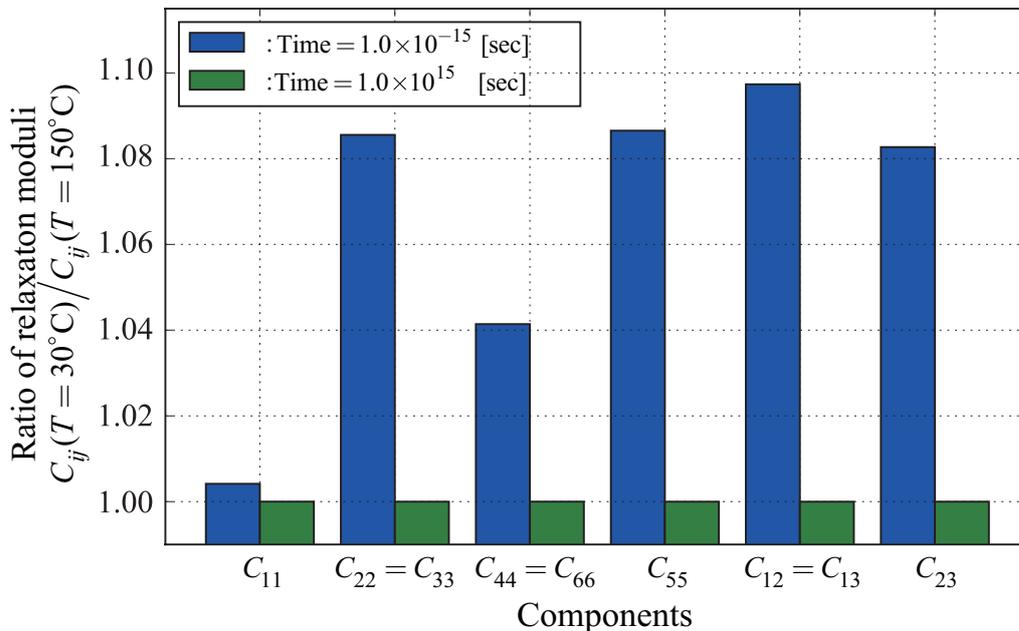
Figure– 2.10 Components other than those shown in previous page of macroscopic relaxation moduli tensor of CFRTP model.



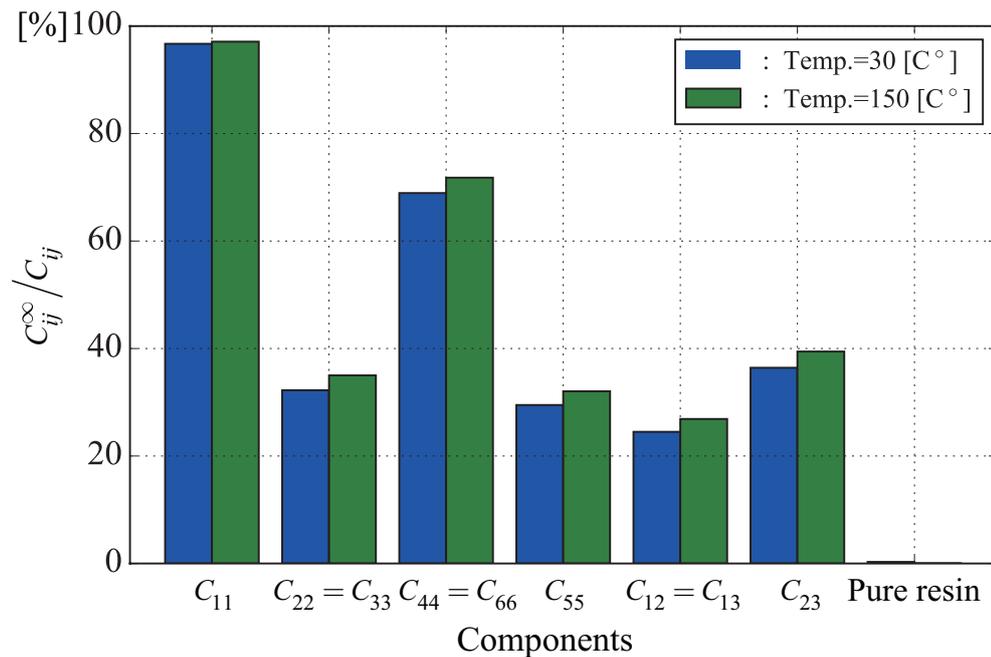
Figure– 2.11 Macroscopic horizontal shift property for each direction of CFRTP model.



Figure– 2.12 Macroscopic vertical shift property for each direction of CFRP model. All the components of vertical shift factors b_{ij}^∞ are much smaller than that of the pure resin. Anisotropic behavior is observed for the vertical shift factors of the non-equilibrium parts b_{ij}^v and its tendency is not in agreement with the relaxation modulus.



Figure– 2.13 Ratios of relaxation moduli of 30 [°C] to 150 [°C].



Figure– 2.14 Percentages of elastic moduli in equilibrium part with respect to relaxation moduli. The result of pure resin shows the C_{11} component as a representative. The fact that C_{11}^{∞}/C_{ij} is close to 100 % implies that the elastic property in the equilibrium part mostly contributes.

2.6 まとめ

本研究では、代表的な熱可塑性樹脂であるポリカーボネート（PC）樹脂を炭素繊維で一方向に強化したCFRTPの、温度依存性の粘弾性挙動を明らかにするとともに、それを解析的に取り扱うための異方性のマクロ粘弾性材料構成則を構築することを目的とした。そのために、熱可塑性樹脂単体の特性を実験により観察して、ミクロ粘弾性材料構成則の構築および材料物性値の同定を行った。そして、それらの物性値を用いたミクロモデルに対して、応力緩和の数値材料試験を実施して異方性材料挙動を特徴づけた。CFRTPの異方性のマクロ粘弾性材料構成則は、その特徴に基づいて構築された。以下に本章で得られた成果をまとめる。

- 1) 実試験で計測されたPC樹脂単体の動的粘弾性特性は、エポキシ樹脂について得られている従来の知見と同様に、ガラス転位点よりも高い温度では緩和挙動に温度依存性を示す一方で、低い温度では弾性率に顕著な温度依存性を示す様子が確認された。弾性率の温度依存性については製品設計上無視されることも多いが、今回の計測結果では比較的大きい差異が認められた。樹脂製品の解析を高精度に行う上では、縦軸シフトも考慮することが有効であると言える。そこで、等方性粘弾性特性の縦軸シフトを表現するための新しい構成則を提案した。実試験結果が良好にカーブフィットできたことから、本構成則の妥当性を確認した。
- 2) 粘弾性体を仮定したPC樹脂と、弾性体を仮定した繊維から構成される複合材料モデルに対して、マクロ応力緩和挙動を調査するための数値材料試験を行った結果、みかけの弾性率に強い異方性を示すことはあっても、緩和時間の温度依存性に関してはほぼ等方性の挙動を示し、かつ複合材料を構成する樹脂の特性をそのまま引き継ぐことを確認した。これは既往の複数の研究例において、限定された変形モードから観測された結果とも一致する。
- 3) 一方で、弾性率の温度依存性については強い異方性を示した。さらに、観測時間にも依存しており、樹脂の緩和後よりも緩和前の初期状態の方が温度依存性が顕著であった。

以上、本章では、緩和弾性率の温度依存性を考慮するための材料構成則として、これまでの先行研究では考慮されていなかった、異方性の一般化 Maxwell モデルにおける平衡部と非平衡部で異なる縦軸方向のシフトファクターを考慮した粘弾性構成則を提案した。そして、実際に最適化手法に基づくカーブフィットを実施することで、数値材料試験で得られたCFRTPのマクロ応力緩和特性が良好にフィッティングできることを確認した。本章で取り上げたPC以外でも、CFRTPを構成する熱可塑性樹脂の多くは、今回観察されたような温度依存性が存在することが考えられるため、本解析アプ

ローチは CFRTP の異方性の粘弾性挙動を，汎用的により高精度な予測をするために活用ができると期待される。

2.1 等方性一般化 Maxwell と縦軸および横軸シフト関数の材料構成則定式化

■ 応力発展

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(K_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N K_{\alpha} \right) \epsilon^{\text{vol}} \mathbf{I} + \mathbf{s}^{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}^{\alpha} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{s}^{\infty} = 2\hat{G}_{\infty} \mathbf{e} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{s}^{\alpha} = \int_0^t \hat{\gamma}_{\alpha} \exp\left(-\frac{t-s}{\tilde{\tau}_{\alpha}}\right) \frac{\partial \mathbf{s}_{\infty}}{\partial s} ds \quad (2.40)$$

■ 緩和時間 (τ_{α}) のシフト (横軸) と弾性係数 (G_{∞} , G_{α}) のシフト (縦軸)

$$\tilde{\tau}_{\alpha} = a_T \tau_{\alpha} \quad (2.41)$$

$$\hat{\gamma}_{\alpha} = \frac{\hat{G}_{\alpha}}{\hat{G}_{\infty}} \quad (2.42)$$

$$\hat{G}_{\infty} = b_T G_{\infty} \quad (2.43)$$

$$\hat{G}_{\alpha} = b_T G_{\alpha} \quad (2.44)$$

■ 時間離散化アルゴリズム

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left(K_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N K_{\alpha} \right) \epsilon_{n+1}^{\text{vol}} \mathbf{I} + \mathbf{s}_{n+1}^{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}_{n+1}^{\alpha} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\infty} = 2\hat{G}_{\infty} \mathbf{e}_{n+1} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\alpha} = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{\alpha}}\right) \mathbf{s}_n^{\alpha} + 2\hat{G}_{\alpha} \frac{\tilde{\tau}_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_{\alpha}}\right) \right\} (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n) \quad (2.47)$$

2.2 異方性一般化 Maxwell と縦軸および横軸シフト関数の材料構成則定式化

■ 応力発展

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}^\alpha \quad (2.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\infty = \hat{\mathbb{C}}_\infty : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.49)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^\infty}{\partial s} ds \quad (2.50)$$

■ 緩和時間 (τ_α) のシフト (横軸) と弾性マトリクス (\mathbb{C}_∞ , \mathbb{C}_α) のシフト (縦軸)

$$\tilde{\tau}_\alpha = a_T \tau_\alpha \quad (2.51)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha = \hat{\mathbb{C}}_\alpha : \hat{\mathbb{C}}_\infty^{-1} \quad (\hat{\gamma}_{ijkl}^\alpha = \hat{C}_{ijmn}^\alpha \hat{C}_{mnkl}^{\infty,-1}) \quad (2.52)$$

$$\hat{\mathbb{C}}_\infty = \mathbf{b}_T^\infty : \mathbb{C}_\infty \quad (\hat{C}_{ijkl}^\infty = b_{T,ijmn}^\infty C_{mnkl}^\infty) \quad (2.53)$$

$$\hat{\mathbb{C}}_\alpha = \mathbf{b}_T^\alpha : \mathbb{C}_\alpha \quad (\hat{C}_{ijkl}^\alpha = b_{T,ijmn}^\alpha C_{mnkl}^\alpha) \quad (2.54)$$

$$(2.55)$$

■ 時間離散化アルゴリズム

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\alpha \quad (2.56)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\infty = \hat{\mathbb{C}}_\infty : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad (2.57)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\alpha = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_\alpha}\right) \boldsymbol{\sigma}_n^\alpha + \frac{\tilde{\tau}_\alpha}{\Delta t} \left\{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tilde{\tau}_\alpha}\right)\right\} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha : \hat{\mathbb{C}}_\infty : \Delta \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.58)$$

第3章 異方硬化を考慮した異方性弾塑性の特徴 づけと構成則

本章では一方向に強化された CFRTP の弾塑性挙動，特にこれまで CFRTP では研究例の少ない硬化挙動に着目する．樹脂と繊維が混在した微視構造においては，マクロな荷重を完全に排除したとしても，樹脂が塑性を経験した場合には不均一性に起因して局所的に応力が残留するために，マクロな硬化挙動は樹脂の硬化挙動をそのまま引き継ぐとは考え難い．さらに，繊維が一方向に配向している場合には，残留応力は変形モードに依存するため硬化挙動にも異方性，すなわち異方硬化の特徴を持つことが考えられる．そこで，樹脂単体の硬化挙動を実験により観察し，その特徴を正しく反映させたマイクロモデルを用いて数値材料試験を実施する．それらの結果から，CFRTP の降伏曲面の初期形状や硬化後の形状を比較することで，異方硬化挙動を特徴づける．そして、それに基づいて異方性のマクロ弾塑性材料構成則を構築する．なお，序論において熱可塑性樹脂は様々な非線形性が混在した材料挙動を有することを述べたが，温度がガラス転移点よりも十分に低く，ひずみ速度が極端に遅くなければ，粘弾性の影響は無視できるほどに小さいと考えられる．そこで本章では，ガラス転移点が室温よりも十分に高く，かつ前章で用いた PC 樹脂と比較して損傷挙動があまり卓越しないことが確認できている熱可塑性エポキシ樹脂をマトリックスに採用することで，弾塑性以外の非線形性は無視できるものと想定する．

本章ではまずはじめに，初期のマクロ降伏曲面を規定する降伏関数について，金属

材料を対象に提案された Hill の降伏関数と、繊維強化材を対象に提案されたバイモーダル塑性理論の降伏関数について概説する。続いて、マトリクスに実験によって同定された弾塑性特性を適用したマイクロモデルを用いて数値材料試験を実施して、マクロな応力-ひずみ曲線を観測する。様々な2軸応力条件下を想定したマクロ応力比を試験荷重として与え、それらの結果から得られる降伏点をつなぎ合わせることで初期の降伏曲面を作成する。さらに、同様の試験を単軸引張応力や純せん断応力によってプリストレスを与えた硬化材に対しても行い結果を詳細に観察することで、降伏曲面の異方硬化挙動を特徴づける。異方性のマクロ弾塑性材料構成則では、バイモーダル塑性理論に背応力の概念を追加することで異方硬化挙動を表現する。最後に、角度付きタブ (oblique-tab) を付けた一方向 CFRTP 材に対して実際に非主軸方向の引張試験を実施し、今回提案する構成則の再現結果と比較することで妥当性を確認する。

3.1 異方性の降伏関数

異方性の降伏関数として、Hill の降伏関数とバイモーダル塑性理論の降伏関数について説明する。Hill の構成則は今回提案する新しい構成則の有効性を示すための比較として用いる。

3.1.1 Hill の降伏関数

Hill 弾塑性モデルにおける降伏関数（以下、Hill 降伏関数）は、von Mises の降伏条件を拡張したものとして、次式のように与えられる⁴⁸⁾。

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) &= \frac{1}{2}(\sigma_{\text{Hill}})^2 - \frac{1}{2}(\sigma_Y(\alpha))^2 \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M}_{\text{Hill}} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2}(\sigma_Y(\alpha))^2 = 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

ここで、 σ_{Hill} は Hill の相当応力であり、 $\sigma_Y(\alpha)$ は累積塑性ひずみ α を独立変数とする等方硬化関数である。この蓄積塑性ひずみ α は、次の相当塑性ひずみ速度の時間積分量として次式で定義される。

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M}_{\text{Hill}} : \boldsymbol{\sigma}} \dot{\gamma}_p = \frac{\sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M}_{\text{Hill}} : \boldsymbol{\sigma}}}{\sqrt{\mathbb{M}_{\text{Hill}} : \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M}_{\text{Hill}} : \boldsymbol{\sigma}}} \|\dot{\epsilon}_p\| = \dot{\alpha} \quad (3.2)$$

また、硬化関数 $\sigma_Y(\alpha)$ には以下の Voce 硬化則を用いる。

$$\sigma_Y(\alpha) = \sigma_{y0} + R_0\alpha + R_\infty(1 - \exp(-b_1\alpha)) \quad (3.3)$$

ここで、 σ_{y0} , R_0 , R_∞ , b_1 などは実験的に定められる材料パラメータである。また、 \mathbb{M}_{Hill} は降伏強度の異方性を考慮するために導入された 4 階テンソルであり、Voigt 表記で表すと次のような行列で定義されている。

$$\mathbf{M}_{\text{Hill}} = \begin{bmatrix} Q+R & -R & -Q & 0 & 0 & 0 \\ -R & R+P & -P & 0 & 0 & 0 \\ -Q & -P & P+Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2M \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ここで P , Q , R , L , M , N は異方性パラメータと呼ばれ、次式で定義される。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{yy}^2} + \frac{1}{R_{zz}^2} - \frac{1}{R_{xx}^2} \right), & L &= \frac{3}{2} \frac{1}{R_{yz}^2} \\ Q &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{zz}^2} + \frac{1}{R_{xx}^2} - \frac{1}{R_{yy}^2} \right), & M &= \frac{3}{2} \frac{1}{R_{xz}^2} \\ R &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{xx}^2} + \frac{1}{R_{yy}^2} - \frac{1}{R_{zz}^2} \right), & N &= \frac{3}{2} \frac{1}{R_{xy}^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで R_{xx} , R_{yy} , R_{zz} , R_{xy} , R_{yz} , R_{xz} は塑性 Hill 定数と呼ばれる材料物性値で、3つの座標軸に関して垂直方向の負荷とせん断負荷に対する初期降伏応力 σ_{xx}^Y , σ_{yy}^Y , σ_{zz}^Y および

$\tau_{xy}^Y, \tau_{yz}^Y, \tau_{xz}^Y$ を用いて次式で定義されている.

$$\begin{aligned} R_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}^Y}{\sigma_0^Y}, R_{yy} = \frac{\sigma_{yy}^Y}{\sigma_0^Y}, R_{zz} = \frac{\sigma_{zz}^Y}{\sigma_0^Y} \\ R_{xy} &= \sqrt{3} \frac{\tau_{xy}^Y}{\sigma_0^Y}, R_{yz} = \sqrt{3} \frac{\tau_{yz}^Y}{\sigma_0^Y}, R_{xz} = \sqrt{3} \frac{\tau_{xz}^Y}{\sigma_0^Y} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ここで σ_0^Y は参照降伏応力であり, 任意に設定してもよいが, 本研究では以下のように設定する.

$$\sigma_0^Y = \min(\sigma_{xx}^Y, \sigma_{yy}^Y, \sigma_{zz}^Y) \quad (3.7)$$

このように塑性 Hill 定数およびその降伏関数は, 応力 6 次元空間の各軸方向の負荷に対する初期降伏応力同士の相対的な大きな (あるいは比率) によって規定される. 降伏関数を Hill の異方性パラメータを使って展開すると

$$\begin{aligned} \phi(\sigma, \alpha) &= \sqrt{P(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + Q(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + R(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2N\tau_{xy}^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2} \\ -\sigma_Y(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

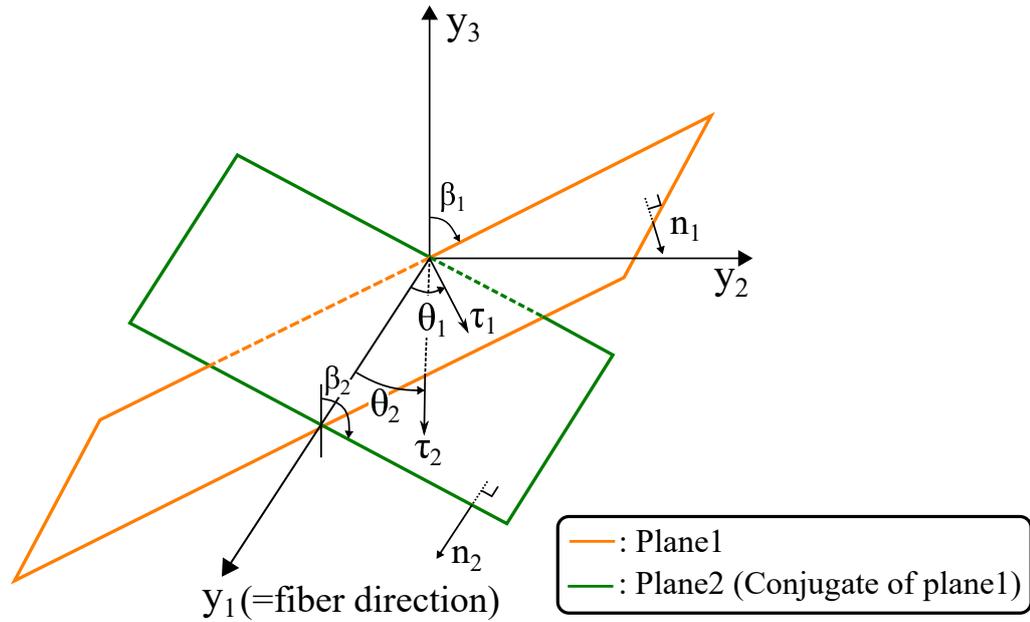
となり, von Mises の等方性降伏関数の各項をパラメータで重みづけした形となっていることが分かる.

3.1.2 バイモーダル塑性理論の降伏関数

Dvorak らは, 一方向強化材の塑性は繊維と平行な面上の分解せん断応力によって発生すると考えて, 平面応力状態における降伏曲面を構築した^{60,67)}. Figure-3.1 にその分解せん断応力の概念図を示す. 評価面は繊維と平行であるため, 繊維方向に垂直な応力成分 σ_{11} は塑性に関与せず, 塑性は σ_{22} および σ_{12} にのみ依存する. 繊維軸周りに β_1 傾いた面には, 必ずその共役関係にある β_2 傾いた面が存在する. 両者の関係は

$$\beta = \beta_1 = \pi - \beta_2, \quad \theta_1 = \theta_2 \quad (3.9)$$

である. 以下では β_1 の面だけに着目して Dvorak の概念を概説する.



Figure– 3.1 Geometry of conjugate slip systems under bi-axial stress state by σ_{22} and σ_{12}

着目している面の法線方向ベクトル \mathbf{n}_1 およびスリップ方向 \mathbf{s}_1 のベクトルは

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= \{0, \cos \beta, \sin \beta\}^T \\ \mathbf{s}_1 &= \{\cos \theta, \sin \beta \sin \theta, \cos \beta \sin \theta\}^T\end{aligned}\quad (3.10)$$

である。これらを用いれば分解せん断応力 τ_{ns} を次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\tau_{ns} &= n_i \sigma_{ij} s_j \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\beta \sin \theta \sigma_{22} + \cos \beta \cos \theta \sigma_{12}\end{aligned}\quad (3.11)$$

材料の中で繊維がランダムに配置されていると想定できるので、あらゆる角度 β の評価面が同じ特徴を持つと考えることは決して極端な仮定ではない。すなわち、降伏応力は評価角度に依存せず固定値としても差し支えない。そこで、降伏関数は上記の分解せん断応力の最大値だけを評価し、一定の降伏応力値と比較する形とすれば良く

$$\phi(\boldsymbol{\tau}) = (\max \tau_{ns})^2 - \tau_0^2 = 0 \quad (3.12)$$

と書くことができる。ここで τ_0 は材料固有の降伏応力であり、一方向強化材の面内せん断試験から同定ができる (Dvorak らはマトリクス単体に純せん断試験をした場合の

降伏応力とほぼ同じとも述べている)。分解せん断応力は次の停留条件を満たす角度が最大値を持つことになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial \beta} &= \sigma_{22} (\cos 2\beta \sin \theta - q \sin \beta \cos \theta) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial \theta} &= \sigma_{22} \left(\frac{1}{2} \sin 2\beta \cos \theta - q \cos \beta \sin \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad \left(\because q = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} \text{ for } \sigma_{22} \neq 0 \right) \quad (3.13)$$

ここで

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta + \cos^2 \beta &= 1 \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

の関係を考慮すれば、上記の停留条件は $\sin \beta, \cos \beta, \sin \theta, \cos \theta$ に対する4元連立方程式と考えることができ、次のような結果を得ることができる。

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sqrt{\frac{1}{2}(1-q^2)}, \quad \cos \beta = \sqrt{\frac{1}{2}(1+q^2)} \\ \sin \theta &= \sqrt{\frac{1-q^2}{1+q^2}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{2q^2}{1+q^2}} \end{aligned} \quad (\text{for } |q| \leq 1) \quad (3.15)$$

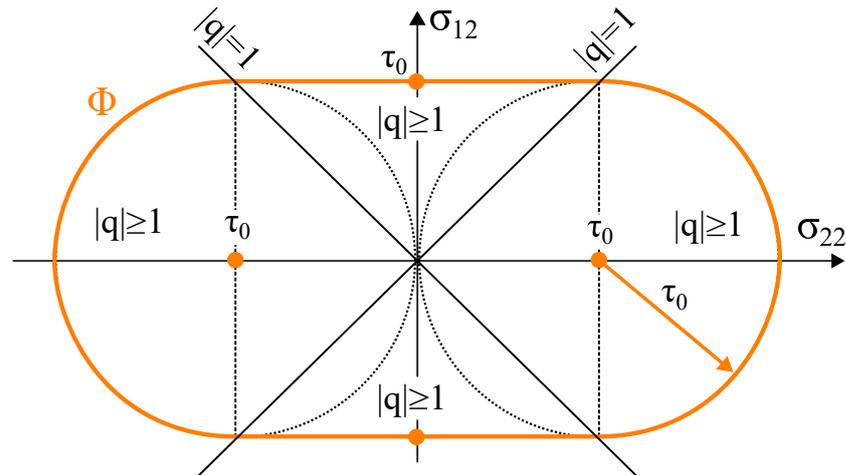
および

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \theta &= \begin{cases} 0 & \text{for } \sigma_{12} = \tau_0, \quad 0 < \sigma_{22} < \tau_0 \\ \pi & \text{for } \sigma_{12} = -\tau_0 \\ 2\pi & \text{for } \sigma_{12} = \tau_0, \quad 0 > \sigma_{22} > -\tau_0 \end{cases} \quad (\text{for } |q| \geq 1) \end{aligned} \quad (3.16)$$

これらを(3.11)および(3.12)に代入すれば、以下のようなバイモーダル塑性理論における降伏関数が得られる。

$$\phi = \begin{cases} \sqrt{\sigma_{12}^2 + (\sigma_{22} \pm \tau_0)^2} - \tau_0 = 0 & \text{for } |q| \leq 1 \\ \sigma_{12}^2 - \tau_0^2 = 0 & \text{for } |q| \geq 1 \end{cases} \quad (3.17)$$

上記の第1式は $(\sigma_{22}, \sigma_{12}) = (\pm \tau_0, 0)$ を中心座標に持つ半径 τ_0 の円に対応する。すべての条件をまとめて降伏曲面を描いた様子を Figure-3.2 に示す。この構成則では、繊維垂直方向の降伏応力は面内せん断の降伏応力の常に2倍に固定されるため、塑性に關係する材料物性値は純せん断モードの材料試験のみで得られることになる。



Figure– 3.2 Initial yield surface for Bimodal plasticity suggested by Dvorak et.all.

3.2 熱可塑性エポキシ樹脂の弾塑性特性の同定

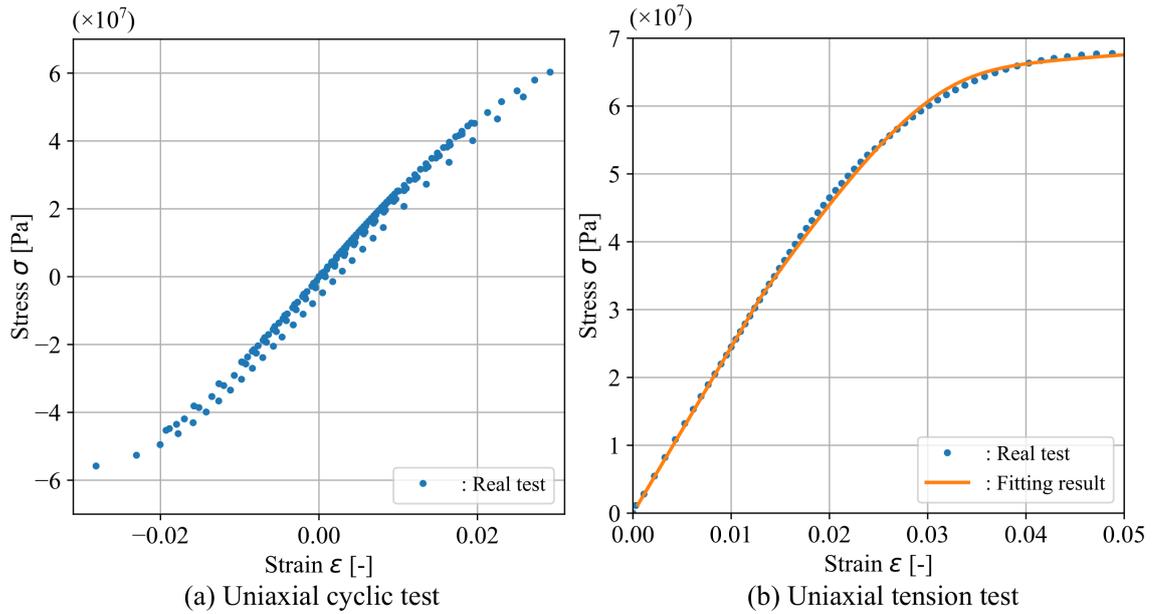
本節では，室温環境下の熱可塑性エポキシ樹脂単体に対して実材料試験を行い，得られた材料挙動に von Mises の降伏基準を用いた古典的な弾塑性構成則が適用できるものと仮定して，その材料物性を同定する．なお，単軸引張・圧縮のサイクリック試験も行って，引張側と圧縮側の降伏応力を比較することによって樹脂の硬化挙動も確認する．

3.2.1 実材料試験の条件

一般的な熱可塑性樹脂は，モノマーが十分に重合したポリマーの状態であり，溶融粘度が高いため連続繊維への含浸が困難である．そのため最近の研究では，初期状態では低分子量で低粘度のモノマーの状態で強化繊維に含浸させて，含浸後に速やかに直鎖状の高分子に重合する現場重合型の熱可塑性エポキシ樹脂が開発され，長繊維で強化された FRTP が容易に製造できるようになってきた⁶¹⁾．本研究では，この現場重合型の熱可塑性エポキシ樹脂をマトリクスとして一方向強化 CFRTP を成形し，実材料試験を行った．

本研究で選定した現場重合型の熱可塑性エポキシ樹脂の主剤（ナガセケムテック社；XNR6850A）は室温環境下において粘度が高いため、110℃のオイルバス内で十分に攪拌溶解させて粘性を低下させた。また、硬化剤（ナガセケムテック社；XNH6850EY）は主剤の質量に対して2wt%とした。そして、攪拌した主剤に対して計量した硬化剤を添加して、90秒間攪拌を行い、離形フィルム上の金型内に溶融樹脂を平板上に流し出した。その後、油圧成形機にて成形温度150℃、成形時間4時間の条件下で重合反応を行った。この条件下で成形された熱可塑性エポキシ樹脂の動的粘弾性試験を行い、ガラス転移点を測定した。動的粘弾性試験機には株式会社日立ハイテクサイエンス製のDMS6100を使用し、両端固定曲げモードで試験を行った。温度範囲は常温から160℃までとし、昇温速度は0.1℃/minとした。その結果、熱可塑性エポキシ樹脂のガラス転移点は97.2℃であったため、本章の弾塑性の材料挙動を特徴づけるための実材料試験はこの温度以下で実施することにした。

実材料試験は、弾塑性構成則における硬化則を特定するために、単軸引張試験と単軸引張・圧縮試験の2種類の試験を行った。試験片形状は、ダンベル形の単軸引張試験片と短冊形の引張・圧縮試験片の2種類を用意した。ダンベル形の単軸引張試験片はJIS K 7161に準拠し、幅が9.8mm、板厚が3.8mmの試験片を使用した。一方で、短冊形の引張・圧縮試験片は幅が15.2mm、厚さが5.5mm、タブ間距離が50mmの短冊形に切り出した試験片とし、供試体の掴み部にはアルミ製のタブを接着剤で接着した。試験機は、株式会社島津製作所製の油圧式サーボパルサ試験機を使用した。試験速度は1mm/minとし、約20℃の温度環境下で引張試験を行った。応力はロードセルで測定した荷重を試験片中央部の断面積で除した値を用いた。また、ひずみは試験片中央部に接着剤で貼った一軸ひずみゲージ（KFGS-5-120-C1-11、株式会社共和電業）の荷重負荷方向の測定値を用いた。



Figure– 3.3 Stress strain curve for pure thermoplastic epoxy resin obtained by real material testing. Fitting result is also displayed for tension test.

3.2.2 実材料試験結果とカーブフィッティング

引張圧縮のサイクリック荷重を与えた場合と引張のみ与えた場合の2つの条件での実材料試験を行って得られた熱可塑性エポキシ樹脂の応力-ひずみ曲線を Figure–3.3 に示す。この前者 (a) の試験結果から、引張側と圧縮側で降伏応力の絶対値は類似しており、等方硬化の特徴を有しているものと判断できる。本研究では等方硬化の表現には (3.3) に示した Voce 型の非線形硬化関数を採用する。なお、降伏基準には von Mises の降伏関数が適用でき、塑性ひずみの発展則には関連流れ則が適用できるものと仮定する。その仮定に基づき、Figure–3.3(b) に示す引張だけの試験データに対してフィッティングを行い、弾塑性構成則の材料物性値を同定した。得られた材料パラメータを Table–3.1 に示し、これらの物性値を用いたときの構成則の応答を Figure–3.3(b) に実材料試験結果と合わせて示す。

Table– 3.1 Material constants for pure thermoplastic epoxy resin.

| Description | Label | Value |
|----------------------|---------------|---------------------------|
| Young modulus | E | 2.447×10^9 [Pa] |
| Poisson's ratio | ν | 0.30000 [-] |
| Initial yield stress | σ_{y0} | 3.2003×10^7 [Pa] |
| Voce's constant 1 | R_0 | 1.0877×10^8 [Pa] |
| Voce's constant 2 | R_∞ | 3.3130×10^7 [Pa] |
| Voce's constant 3 | b_1 | 3.6037×10^2 [-] |

3.3 CFRTPの数值材料試験と弾塑性挙動の特徴づけ

3.3.1 解析条件

数值材料試験に用いるマイクロモデルには前章の Figure–2.8 に示したのと同じ形状を用いる。ただし、後述する実材料試験の条件と一致させるため、繊維の体積含有率は 66.3[%] とした。炭素繊維の材料物性値も前章と同じものを使用したが、樹脂の特性は Table–3.1 に示した等方降伏関数かつ等方硬化則を想定した物性値を適用する。また、CFRTP の一般的な利用用途を想定して平面応力状態を仮定する。 y_3 軸を面外方向と定義して拘束フリーとする。ただし、CFRTP はマクロ的に見れば薄板形状ではあるが、マイクロな視点で見れば、板厚方向に炭素繊維は多数本存在するため、周期境界条件は y_3 軸方向も含めて全方向に対して適用した。

以上のマイクロモデルを用いて数值材料試験を実施して CFRTP のマクロな異方性材料挙動を特徴づけていく。具体的な試験条件としてはまず、12 方向と 22 方向それぞれの単軸応力条件における硬化挙動を確認するため、変位制御による各方向のサイクリック荷重試験を行う。さらに、2 軸応力状態における降伏曲面を観測するために、応力比

の異なる条件で応力制御による数値材料試験を複数水準行うことにする。その条件は Figure-3.4 に示すように、2軸応力面内で11.25°ずつ応力比を変えて 360分の計 32 ケースとする。負荷する応力成分の組み合わせは、Dvorak の観測方法に合わせて、 $\sigma_{12} - \sigma_{22}$ と $\sigma_{11} - \sigma_{12}$ とする。Dvorak らはこれらの応力状態をそれぞれマトリクス支配モード (MDM: Matrix Dominant Mode) と繊維支配モード (FDM: Fiber Dominant Mode) と呼び別しているため、本研究でもこれを踏襲して同様の表現を用いることとする。さらに硬化後の降伏曲面を観測するために、事前に $\sigma_{22} = 95[Pa]$ および $\sigma_{12} = 35[Pa]$ の負荷を経験させたマイクロモデルに対しても同様の2軸応力試験を実施する。最後に、数値材料試験で得られた応力-ひずみ曲線を用いて、今回提案する材料構成則でフィッティングすることで材料物性値を同定するとともに、材料構成則が示す応力-ひずみ曲線や降伏曲面を数値材料試験結果と比較することで、材料構成則の性能を検証する。

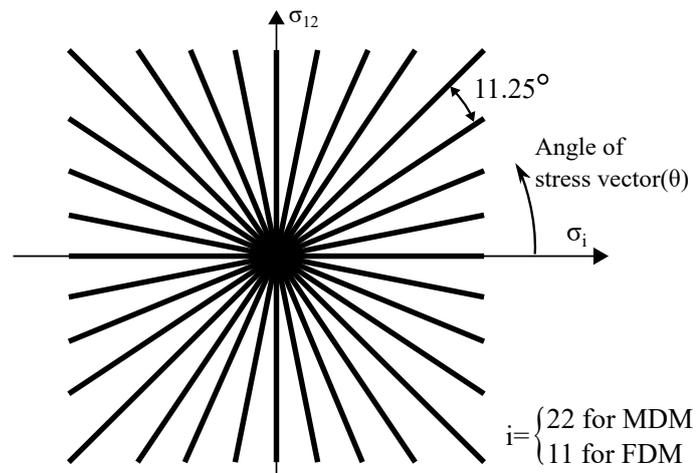


Figure- 3.4 Boundary conditions for numerical material tests. Tests for 32 types of stress ratio were carried out in order to create yield function.

3.3.2 マクロ降伏点の評価方法

CFRTP では、弾性率の大きく異なる素材が不均質に混ざっているため、とりわけ材料界面近傍に局所的に高い応力が発生する。その結果、塑性ひずみも局所的に発生し、

外力の増加とともに徐々に材料全体に塑性領域が広がるため、複合材の降伏応力は樹脂のそれとは異なるだけでなく、みかけの応力-ひずみ曲線は明瞭な降伏点を示さない。このような特性に対しては、0.2%耐力から降伏応力を判定する方法が一般的であるが、単軸応力条件以外には適用することができないと考えられるため、2軸応力状態に拡張した場合の降伏判定規則を決める必要がある。本研究では、Hillらによって提案された等塑性仕事面を用いる手法を採用する^{117,118)}。具体的な試験結果を例にその手順を示す。

Figure-3.5は22単軸応力の予荷重を与えて硬化させた後で、22成分と12成分の2軸応力での数値材料試験を行った際の応力-ひずみ曲線である。塑性仕事は、それぞれの成分応力によって行われた仕事量の総和として次式で定義する。

$$W_0 = W_{22} + W_{12} = \int \sigma_{22} d\epsilon_{22}^p + \int \sigma_{12} d\epsilon_{12}^p \quad (3.18)$$

これは、Figure-3.5でグレーに色づけられた領域に対応する。この塑性仕事に塑性開始とみなす任意の閾値を設けて、各応力比の試験結果にて同じ基準のもと降伏点を算出する。本研究では、その閾値には純せん断試験で得られた応力-ひずみ曲線にて0.2%耐力に相当する仕事量を採用する。

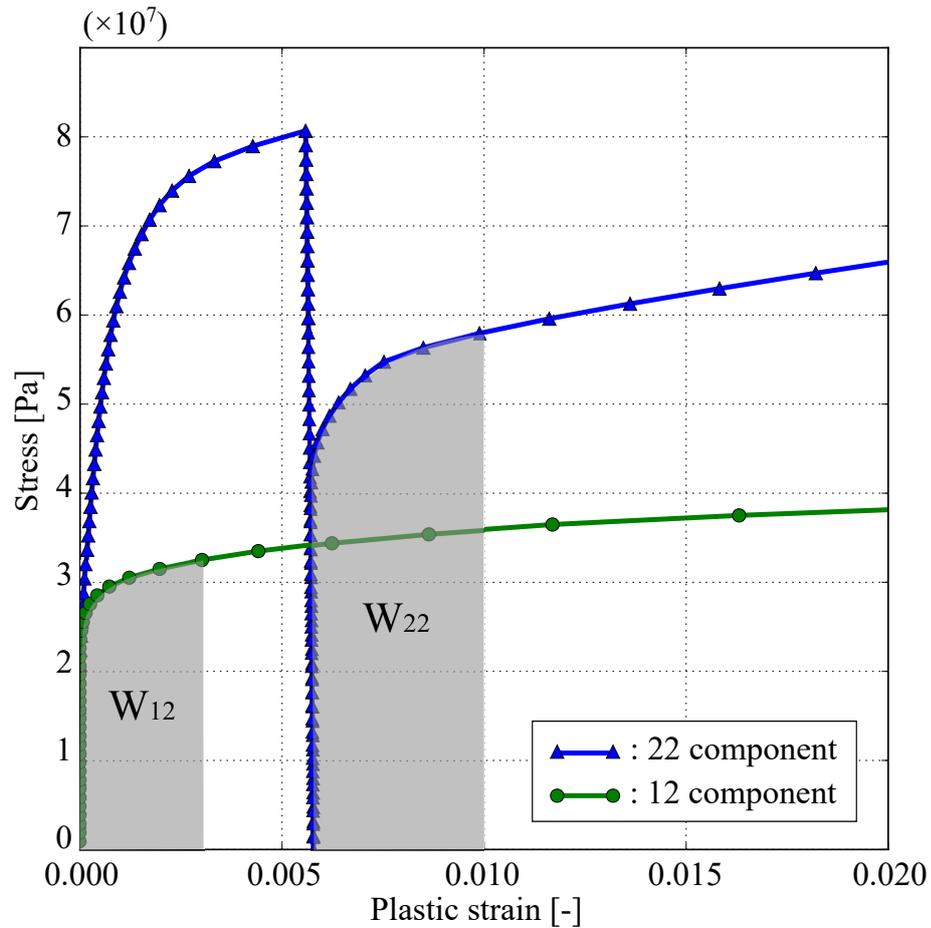


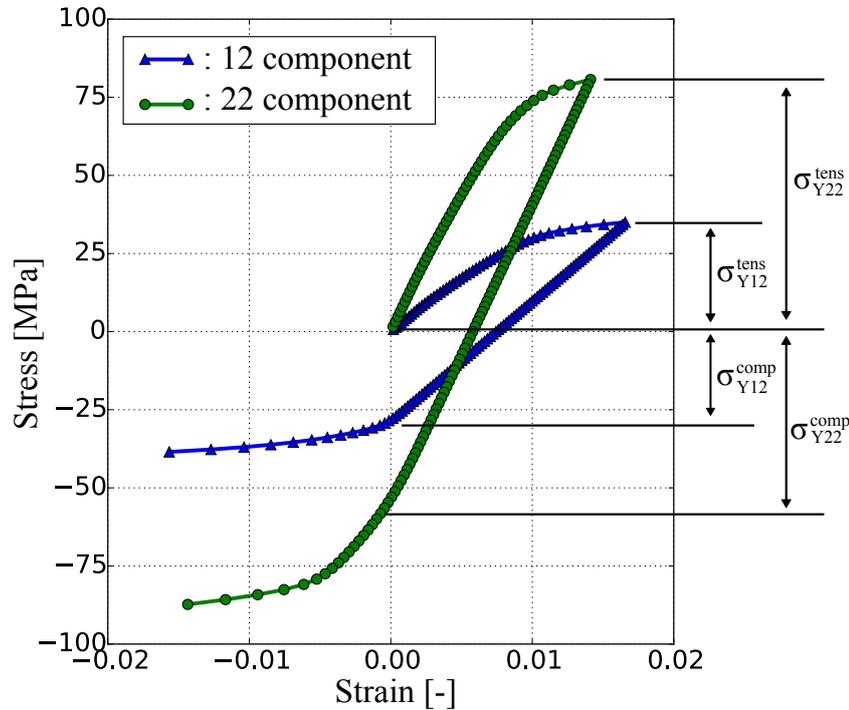
Figure- 3.5 Definition of plastic work.

3.3.3 解析結果

サイクリック荷重条件における硬化挙動

純せん断応力および y_2 軸方向の垂直応力によるサイクリック荷重を負荷して数値材料試験を実施し、得られた応力-ひずみ曲線を Figure-3.6 に示す。また、硬化挙動の傾向を定量的に比較するために引張側と圧縮側の降伏応力の比率を求めた結果を Table-3.2 に示す。これらの結果より、せん断モードと単軸モードでは明らかに硬化の特徴が異なること、さらに単軸モードは特に 1.0 から大きく逸脱して引張型と圧縮型の対称性が崩れていることから、移動硬化あるいは複合硬化に属する硬化特性の傾向を持つことが分かる。このように、CFRTP の硬化挙動は変形モードによって程度の異なる複合硬

化挙動を有していることから、降伏後の降伏曲面は硬化時の条件によって複雑に変形および移動する特徴を持つといえる。



Figure– 3.6 Stress strain curve under cyclic loading for σ_{22} uniaxial and σ_{12} pure shearing deformation mode.

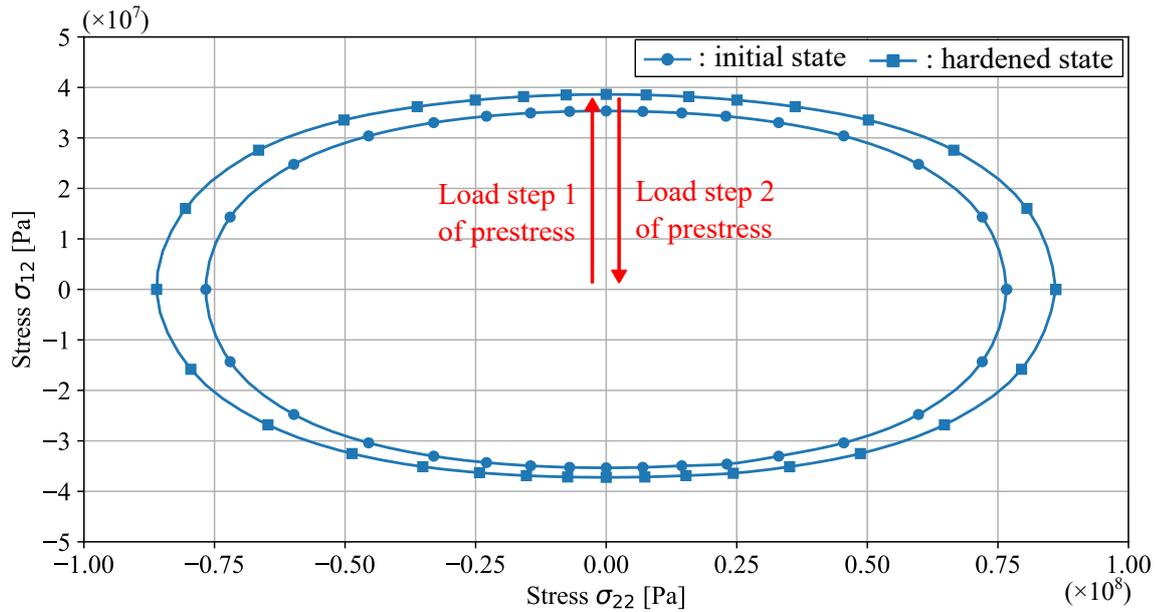
Table– 3.2 Yield stress in tension and compression. Compression state in shearing mode is

| Deformation mode | Yield Stress[MPa] | | Ratio between two yield stress [-]($\sigma_y^{\text{tens}}/\sigma_y^{\text{comp}}$) |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---|
| | Tensile(σ_Y^{tens}) | Compress(σ_Y^{comp}) | |
| Pure shearing mode for 12 direction | 35.000 | 33.821 | 0.966 |
| Uniaxial mode for 22 direction | 80.000 | 58.598 | 0.733 |

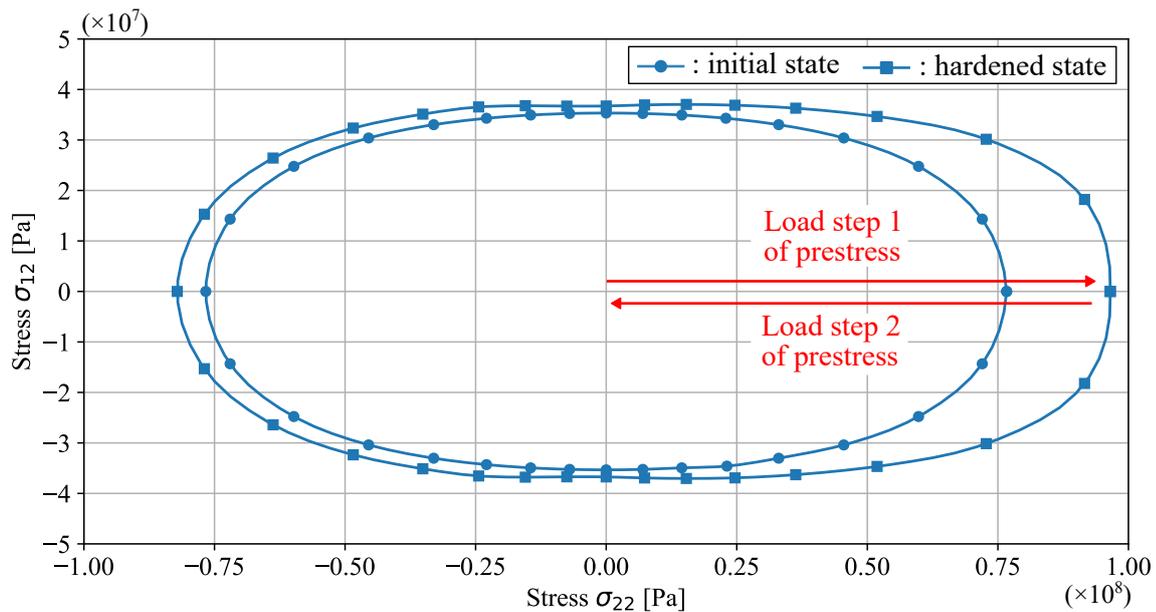
マクロ降伏曲面

続いて、Figure-3.4 に示した 32 パターンの応力比の数値材料試験結果を元に描画した MDM における降伏曲面を示す。初期降伏曲面に加えて、せん断応力による硬化後の曲面も描画した結果を Figure-3.7 に、垂直応力による硬化後の曲面も描画した結果を Figure-3.8 に示す。初期の降伏曲面に着目すると、 σ_{22} 軸方向に細長い形状を有していることが確認できる。さらに、単軸の垂直応力 σ_{22} 負荷時の降伏応力は、純せん断応力 σ_{12} 負荷時のそれと比較してほぼ 2 倍の値を示しており、Dvorak らが予想する結果とも一致している。しかしながら、 $\sigma_{12} > \sigma_{22}$ の応力状態において、降伏曲面は σ_{22} 軸とは平行になっておらず、厳密にはバイモーダル塑性理論の示す俵形よりも楕円形寄りの傾向を持っている。

Figure-3.7 から、せん断応力による硬化後の傾向についても観察してみる。Table-3.2 に示したように、せん断のサイクリック荷重下においてはほぼ等方硬型の挙動を確認されていた。降伏曲面についても、座標系原点から外側に向かって、全体的に曲面が広がっている傾向が見られる。しかし、せん断方向と比較して垂直方向成分にはその 2 倍以上に広がっており、決して等方的ではなく、硬化状態と初期状態の降伏曲面の間には相似関係が成り立たない。このような傾向は Figure-3.8 に示す垂直応力による硬化ではより顕著に表れる。予荷重として与えた垂直引張方向には、降伏曲面が大きく広がっている一方で、垂直圧縮やせん断軸の方向にはほとんど硬化していない。さらに、 $\sigma_{12} > \sigma_{22}$ の領域では、 σ_{22} 軸とほぼ平行になる特徴が鮮明に現れるようになり、初期の楕円形に近かった形状からは逸脱するようになる。このように一方向 CFRTP の硬化挙動は、Dvorak らが MMC で検証したときのような単純な移動硬化則として特徴づけることはできないため、新しい材料構成則を構築する必要がある。



Figure– 3.7 Yield surface for initial and hardened state after pre-load by shear stress σ_{12} .



Figure– 3.8 Yield surface for initial and hardened state after pre-load by normal stress σ_{22} .

3.4 マクロ弾塑性構成則の定式化

本節では前節で特徴づけたCFRTPのマクロ弾塑性材料挙動をマクロ構造解析に反映させるための材料構成則を構築する。初期の降伏曲面は、バイモーダル塑性理論が示

す形状と類似することが確認できたので、バイモーダル塑性理論をベースにいくつかの乗数や項を追加することによって表現能力を向上させることを試みる。

3.4.1 降伏関数と異方硬化関数

構成則の構築に先立ち、数値材料試験結果から知見として得られた CFRTP の弾塑性材料挙動について以下にまとめる。

- 1) 初期の降伏曲面は、厳密には Dvorak が示したような 2 つの円と 2 つの直線から構成される理想的な俵型ではなく、若干楕円型に近い形状をしている。
- 2) せん断応力によるサイクリック試験では、引張側と圧縮側でほぼ同じ挙動を示す一方で、繊維垂直方向のサイクリック試験では、等方硬化・移動硬化のどちらにも属さない特異な材料挙動を示す。
- 3) せん断応力によって材料が降伏すると、垂直応力方向により大きく広がった降伏曲面になる。
- 4) 繊維垂直方向の応力によって材料が降伏すると、降伏曲面は幾分等方的に広がりながらも荷重方向に大きく張り出した形状へと変化する。すなわち、硬化後の降伏曲面の形状は初期状態とは相似関係にはなく、せん断応力による硬化後よりも顕著にいびつに変形する。

これらは、いずれも前述した従来の弾塑性構成則では表現のできない特徴である。

詳細な定式化へ進むにあたって、まずは表記ルールについて述べる。これ以降は、平面応力状態を仮定するものとし、テンソル表記時の総和規約は 1~3 ではなく 1~2 で総和を取るものとする。特別な記述がない場合はテンソル表記で統一するが、Voigt 表

記を用いる場合は応力やひずみを次のようなベクトルで表すことにする.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

上記に含まれない応力およびひずみ成分は、面外方向のひずみ成分 ϵ_{33} を除いてすべてゼロである。これ以降、特別に言及しない限りは応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ およびひずみベクトル $\boldsymbol{\epsilon}$ は上記の表記を採用する。

■ ひずみの加算分解

ひずみは弾性成分と塑性成分に加算分解されるものとする。

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (3.20)$$

■ 弾性構成則（フックの法則）

応力は弾性ひずみ成分に比例するものとする。

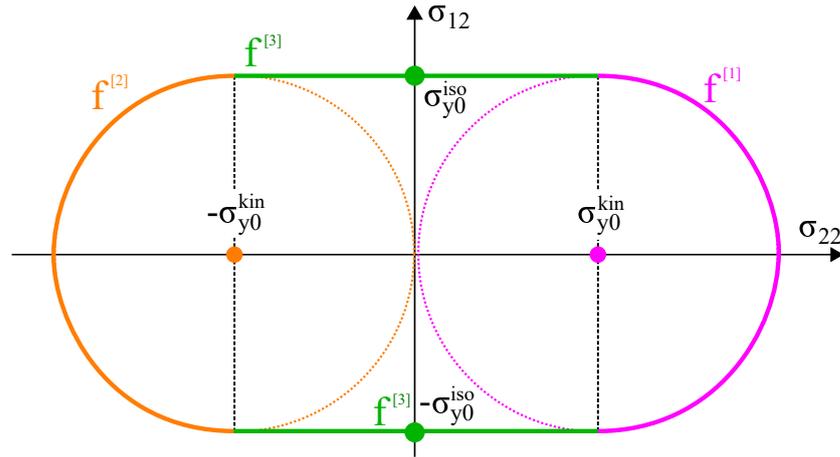
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (3.21)$$

ここで比例定数 \mathbb{C} は弾性マトリクスであり、直交異方性を仮定し Voigt 表記すると以下のように定義されている。

$$\mathbb{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

■ 降伏関数

本研究では、Dvorak らによって提案されたバイモーダル塑性理論を基本として、前述の CFRTP の特徴的な材料挙動に対応するように拡張した次式のような降伏関数を提



Figure– 3.9 Initial yield surface for Bimodal plasticity

案する。

$$\begin{cases} f^{[1]} = \sqrt{F(\sigma_{22} - \beta_{22}^{[1]})^2 + 2(\sigma_{12} - \beta_{12}^{[1]})^2} - \sigma_y^{\text{iso}}(\alpha) & (\text{if } \sigma_{22} > \beta_{22}^{[1]}) \\ f^{[2]} = \sqrt{F(\sigma_{22} - \beta_{22}^{[2]})^2 + 2(\sigma_{12} - \beta_{12}^{[2]})^2} - \sigma_y^{\text{iso}}(\alpha) & (\text{if } \sigma_{22} < \beta_{22}^{[2]}) \\ f^{[3]} = \sqrt{2(\sigma_{12} - \beta_{12}^{[3]})^2} - \sigma_y^{\text{iso}}(\alpha) & (\text{if } \beta_{22}^{[2]} \leq \sigma_{22} \leq \beta_{22}^{[1]}) \end{cases} \quad (3.23)$$

係数 F は材料物性値であり，Hill パラメータと同様に成分応力に対して重みづけする形で異方性の程度を調整するものである．Dvorak の定式化では $F = 1.0$ であるが，初期降伏曲面が理想形状から若干逸脱する場合（すなわち本節の初めに述べた特徴1）の調整パラメータとして利用することになる．降伏関数はバイモーダル塑性理論と同様に，応力状態に依存した3つの関数によって構成されるが，せん断応力と垂直応力の比ではなく，垂直応力の値を使って場合分けを行う．これは前述した特徴2の，垂直応力に起因する降伏による複合硬化挙動を表現するために適用した．結果として，降伏曲面は Figure–3.9 で色分けされたような形となる．

3 ケースの降伏関数をすべてまとめると，次式のように一般化した形式で記述できる．

$$f^{[i]} = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}}^{[i]} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}^{[i]})} - \sigma_y^{\text{iso}}(\alpha) \equiv \bar{\sigma}_{\text{BM}} - \sigma_y^{\text{iso}}(\alpha) \quad (3.24)$$

ここで、 β は塑性の進展とともに発展する背応力であり、円形状を示す降伏関数 $f^{[1]}$ および $f^{[2]}$ の中心座標を意味する。これらが応力状態に依存して、それぞれ個別に発展することによって異方硬化挙動が再現されるが、このとき、 $f^{[3]}$ は常に $f^{[1]}$ と $f^{[2]}$ の共通外接線を成すように定式化するため、各降伏関数のつなぎ目においても降伏曲面の C1 連続性が保証される。塑性に寄与するのは実際に働く応力 σ を背応力分シフトさせた量 $\sigma - \beta^{[i]}$ であり、これを有効応力と呼ぶ。さらに、 $\bar{\sigma}_{\text{BM}}$ をバイモーダル塑性理論における相当応力とした。また、 $M_{\text{BM}}^{[i]}$ は塑性に寄与しない応力成分を除外するための応力変換テンソルであり、Voigt 表記にすると次の形式となる。

$$M_{\text{BM}}^{[1]} = M_{\text{BM}}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_{\text{BM}}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

さらに、 $\sigma_y^{\text{iso}}(\alpha)$ は等方硬化関数であり、本研究では次の Voce 則を採用する。

$$\sigma_y^{\text{iso}}(\alpha) = \sigma_{y0}^{\text{iso}} + \sigma_y^{\text{iso}'}(\alpha) = \sigma_{y0} + R_0\alpha + R_\infty(1 - \exp(-b_1\alpha)) \quad (3.26)$$

式(3.23)中の降伏関数 $f^{[1]}$ と $f^{[2]}$ は、塑性を経験していない初期の状態から σ_{22} 軸方向に同じ絶対量 $\sigma_{yk0}^{[i]}$ の分だけ、中心座標が応力ゼロの座標系原点から、それぞれプラス方向とマイナス方向に離れた位置までオフセットされている。従って、背応力 $\beta^{[i]}$ はオフセット成分と分離して書くことができ、Voigt 表記で表すと次式のようなになる。

$$\beta^{[1]} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ \sigma_{yc}^{[1]} + \beta_{22}^{[1]} \\ \beta_{12}^{[1]} \end{Bmatrix}, \quad \beta^{[2]} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ \sigma_{yc}^{[2]} + \beta_{22}^{[2]} \\ \beta_{12}^{[2]} \end{Bmatrix}, \quad \beta^{[3]} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ \beta_{12}^{[3]} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

$\sigma_{yc}^{[1]}, \sigma_{yc}^{[2]}$ 以外の背応力成分は塑性の進展とともに発展するものであり、上式の具体的な

形を以下のように定義する.

$$\boldsymbol{\beta}^{[1]} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ \sigma_{y0}^{\text{kin}} + a\sigma_y^{\text{iso}'}(\alpha) + \beta_{22}^{[1]} \\ \beta_{12} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{[2]} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ -\sigma_{y0}^{\text{kin}} - a\sigma_y^{\text{iso}'}(\alpha) + \beta_{22}^{[2]} \\ \beta_{12} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{[3]} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ \beta_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

これらをオフセット, 等方硬化, 移動硬化の各成分に分離して表すと次のようになる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}^{[1]} &= \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ \sigma_{y0}^{\text{kin}} \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{\text{Offset}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ a\sigma_y^{\text{iso}'}(\alpha) \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{\text{Isotropic}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ \beta_{22}^{[1]} \\ \beta_{12} \end{Bmatrix}}_{\text{Kinematic}}, & \boldsymbol{\beta}^{[2]} &= \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ \sigma_{y0}^{\text{kin}} \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{\text{Offset}} - \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ a\sigma_y^{\text{iso}'}(\alpha) \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{\text{Isotropic}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ \beta_{22}^{[2]} \\ \beta_{12} \end{Bmatrix}}_{\text{Kinematic}} \\ \boldsymbol{\beta}^{[3]} &= \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{\text{Offset}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}}_{\text{Isotropic}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ \beta_{12} \end{Bmatrix}}_{\text{Kinematic}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Figure-3.9 に示した初期降伏曲面が, 等方硬化成分 $\sigma_y^{\text{iso}'}$ によって相似形を保ちながら広がるためには, 降伏関数 $f^{[1]}$ と $f^{[2]}$ の中心座標もまた移動する必要がある. つまり, 背応力にも等方硬化成分とカップリングさせる項を準備する必要がある. それが上式の $a\sigma_y^{\text{iso}'}$ に対応している. a は材料固有の物性値である. Figure-3.10 に等方硬化成分による硬化後の降伏曲面の様子を示す. 硬化後の後続降伏曲面と初期降伏曲面との間の中心座標距離が $a\sigma_y^{\text{iso}'}$ に対応する.

純せん断応力による塑性発展では, 垂直応力による場合と比較して等方硬化に近い挙動を有するものの, フィッティングの厳密性を増す目的で移動硬化挙動も含めた. この際, 降伏関数 $f^{[i]}$ は, 応力状態によって切り替わるポイントで幾何学的に連続的につながっている必要があるため, 背応力 $\boldsymbol{\beta}^{[i]}$ のせん断成分は, 3つの降伏関数 $f^{[1]}, f^{[2]}, f^{[3]}$ で共有させる. このように, 3つに分離した降伏関数の背応力を応力状態に応じて個別に発展させることで, 塑性ひずみ進展に伴う降伏曲面の異方硬化を表現することがで

きる。最後に、すべての状態変数を使って硬化後の降伏曲面の形状を再現した様子を Figure-3.11 に示す。

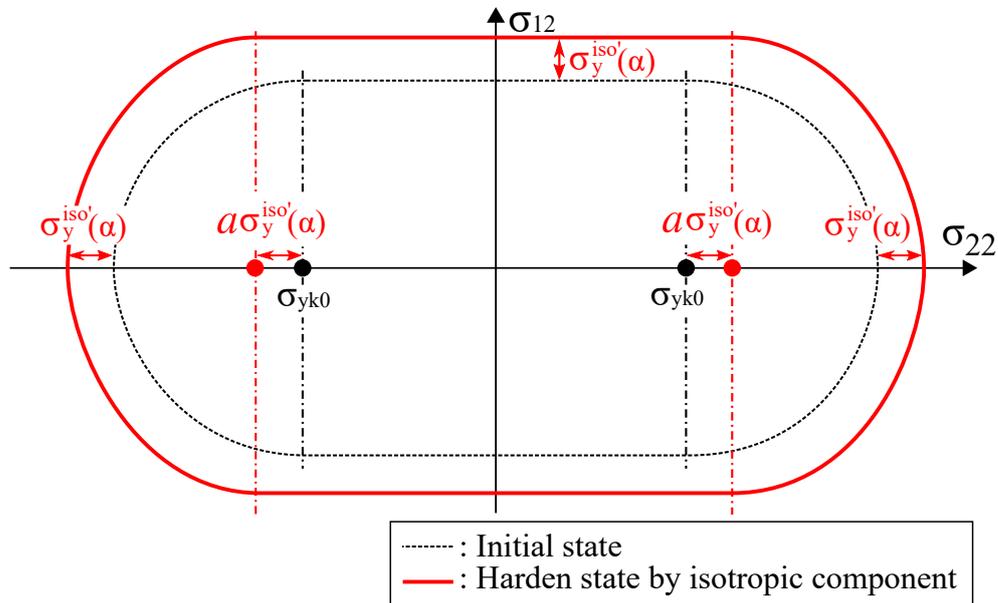


Figure- 3.10 Yield surface after isotropic hardening behavior.

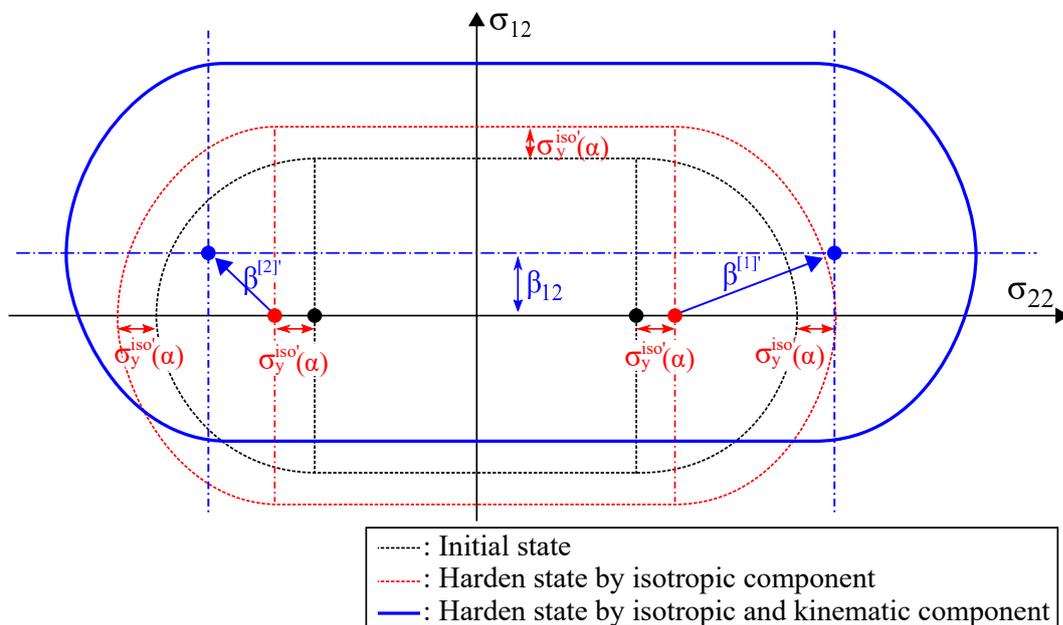


Figure- 3.11 Yield surface after combination of isotropic and kinematic behavior.

3.4.2 各物理変数の発展則

前節で示した各物理変数の発展則を記述して、後述する時間離散化方程式への導入とする。まず、塑性ひずみ増分は関連流れ則に基づくものとする。

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma}_p \frac{\partial f^{[i]}}{\partial \sigma} \quad (3.30)$$

ここで、流れベクトルに相当する微分項は次式のようにになる。

$$\frac{\partial f^{[i]}}{\partial \sigma} \equiv N^{[i]} = \frac{2M_{BM}^{[i]} : (\sigma - \beta^{[i]})}{\sqrt{(\sigma - \beta^{[i]}) : M_{BM}^{[i]} : (\sigma - \beta^{[i]})}} = \frac{2M_{BM}^{[i]} : (\sigma - \beta^{[i]})}{\bar{\sigma}_{BM}} \quad (3.31)$$

また、等方硬化に関する硬化変数の発展則は次式で与えられる。

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma}_p \frac{\partial f}{\partial (-\sigma_y^{iso})} = \dot{\gamma}_p \quad (3.32)$$

一方、(3.24) で定義した相当応力に対応する相当塑性ひずみは、エネルギーの共役性を考慮して計算すると

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{(\sigma - \beta^{[i]}) : \dot{\epsilon}^p}{\bar{\sigma}_{BM}} = \dot{\gamma}_p \frac{(\sigma - \beta^{[i]}) : N^{[i]}}{\sqrt{(\sigma - \beta^{[i]}) : M_{BM}^{[i]} : (\sigma - \beta^{[i]})}} = 2\dot{\gamma}_p \frac{(\sigma - \beta^{[i]}) : M_{BM}^{[i]} : (\sigma - \beta^{[i]})}{(\sigma - \beta^{[i]}) : M_{BM}^{[i]} : (\sigma - \beta^{[i]})} = 2\dot{\gamma}_p \quad (3.33)$$

となり、等方硬化変数は相当塑性ひずみの半値と等しくなっている。

背応力の移動硬化成分の発展 $\dot{\beta}^{[i]}$ は、塑性ひずみによってもたらされるものとし、線形成分と非線形成分の2成分から構成されるものと仮定する。

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}^{(1)} + \dot{\beta}^{(2)} \quad (3.34)$$

本研究では、非線形成分については Armstrong-Frederic 則を異方性に拡張した形式を採用し、線形成分と合わせて表すと次式のようにになる。

$$\dot{\beta}^{(1)} = \mathbb{C}_1 : \dot{\epsilon}^p \quad (3.35)$$

$$\dot{\beta}^{(2)} = \mathbb{C}_2 : \dot{\epsilon}^p - b_2 \dot{\epsilon}^p \beta^{(2)} \quad (3.36)$$

ここで、 b_2 , \mathbb{C}_1 , \mathbb{C}_2 は材料物性値で、そのうち \mathbb{C}_1 , \mathbb{C}_2 は Voigt 表記では以下のように定義する。垂直成分とせん断成分を異なる材料物性値で表現することによって、背応力発展の程度を変形モードに依存させている。

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{1,22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1,12} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{2,22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{2,12} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

したがって、各降伏関数の背応力の発展則は以下のようにまとめられる。

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}^{[i]} = \underbrace{a\dot{\boldsymbol{\sigma}}_y^{\text{iso}'[i]}}_{\text{iso}} + \underbrace{\mathbb{C}_1 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}_{\text{Kinematic, Linear}} + \underbrace{\mathbb{C}_2 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - b_2 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \boldsymbol{\beta}^{(2)[i]}}_{\text{Kinematic, Non-linear}} \quad (3.38)$$

ここで $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_y^{\text{iso}'[i]}$ は応力状態に依存する量として Voigt 表記で次のように定義した。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_y^{\text{iso}'[1]} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ \dot{\sigma}_y^{\text{iso}'}(\dot{\alpha}) \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_y^{\text{iso}'[2]} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -\dot{\sigma}_y^{\text{iso}'}(\dot{\alpha}) \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_y^{\text{iso}'[3]} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

3.4.3 構成則の時間離散化

ここで定式化した降伏関数と異方硬化関数、およびそれらの発展則を数値材料試験に適用するために、時間方向に離散化した式を求める。まず、材料に発生する応力は、式 (3.21) 式で与えたように弾性ひずみのみに依存したフックの法則で規定される。また、ひずみの加算分解則 (式 (3.20)) および塑性ひずみ増分の関連流れ則 (式 (3.30)) を用いて整理すると次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e \\ &= \mathbb{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p) = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p) - \mathbb{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tri}} - \Delta \gamma_p \mathbb{C} : \mathbf{N}_{n+1}^{[i]} \end{aligned} \quad (3.40)$$

ここで、 $\sigma_{n+1}^{\text{tri}} (= \epsilon_{n+1} - \epsilon_n^p)$ は現計算ステップで弾性領域にあること ($\Delta\epsilon_p = 0$) を仮定した試行応力である。また、 $N_{n+1}^{[i]}$ は (3.31) 式を用いると次式が成り立つものとする。

$$N_{n+1}^{[i]} = \frac{2M_{\text{BM}}^{[i]} : (\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}^{[i]})}{\bar{\sigma}_{\text{BM}}} \approx \frac{2M_{\text{BM}}^{[i]} : (\sigma_{n+1}^{\text{tri}} - \beta_n^{[i]})}{\bar{\sigma}_{\text{BM}}^{\text{tri}}} \equiv N_{n+1}^{\text{tri}[i]} \quad (3.41)$$

実際の流れベクトルが試行状態のそれと必ずしも等しいとは言えないが、この仮定を設けないと以後の式展開が複雑になるため、前イタレーションの状態のみで規定できるような陽的な形式とした。以上を用いると、降伏関数を構成する有効応力は、塑性乗数増分 $\Delta\gamma_p$ のみを未知変数とした次の形式に帰着する。

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} - \beta_{n+1}^{[i]} &= \sigma_{n+1}^{\text{tri}} - \beta_{n+1}^{[i]} - \Delta\gamma_p \mathbb{C} : N_{n+1}^{\text{tri}[i]} \\ &= \sigma_{n+1}^{\text{tri}} - \beta_n^{[i]} - \left(a\sigma_y^{\text{iso}'} (\Delta\alpha) + \mathbb{C}_1 : \Delta\epsilon^p + \mathbb{C}_2 : \Delta\epsilon^p - b_2\Delta\bar{\epsilon}^p\beta_n^{(2)} \right) - \Delta\gamma_p \mathbb{C} : N_{n+1}^{\text{tri}[i]} \\ &= \sigma_{n+1}^{\text{tri}} - \beta_n^{[i]} - a\sigma_y^{\text{iso}'} (\Delta\gamma_p) - \Delta\gamma_p \mathbb{C}_1 : N_{n+1}^{\text{tri}[i]} - \Delta\gamma_p \mathbb{C}_2 : N_{n+1}^{\text{tri}[i]} \\ &\quad + b_2\Delta\gamma_p\beta_n^{(2)} - \Delta\gamma_p \mathbb{C} : N_{n+1}^{\text{tri}[i]} \end{aligned} \quad (3.42)$$

ここで、背応力発展の非線形項だけは、式展開を複雑にしないための都合上、前計算ステップ n の値 ($\beta_n^{(2)}$) を用いて陽的な形とした。以上求めた有効応力を用いて、リターンマッピングアルゴリズムを構築し、降伏判定および応力更新を行う。すなわち、現計算ステップの塑性乗数増分 $\Delta\gamma_p$ をゼロと仮定した降伏関数値

$$f_{n+1}^{[i],\text{tri}} = \sqrt{(\sigma_{n+1}^{\text{tri}} - \beta_n^{[i]}) : M_{\text{BM}} : (\sigma_{n+1}^{\text{tri}} - \beta_n^{[i]}) - \sigma_y^{\text{iso}}(\alpha_n)} \quad (3.43)$$

にて降伏判定を行う。そして、降伏状態においてはリターンマッピング方程式を求解して、塑性乗数増分 $\Delta\gamma_p$ を取得することで、試行応力を正確な応力に修正する。リターンマッピング方程式は、非ゼロの塑性乗数増分 $\Delta\gamma_p$ を考慮した有効応力を降伏関数に

代入することで導出ができ、次式のようになる。

$$g(\Delta\gamma_p) = f_{n+1} = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]})} - \sigma_y^{\text{iso}}(\alpha_{n+1}) = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]} \Rightarrow (3.42) \text{ 式} \quad (3.44)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma_p \quad (\because (3.32) \text{ 式})$$

求解にニュートンラプソン法を適用することを想定して上式の導関数を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\Delta\gamma_p)}{\partial \Delta\gamma_p} &= \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}} : \frac{\partial}{\partial \Delta\gamma_p} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]})}{\sqrt{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]})}} - \frac{\partial}{\partial \Delta\gamma_p} \sigma_y^{\text{iso}'} \\ &= \frac{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}} : \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p} - \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}}{\partial \Delta\gamma_p} \right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]})}} - \frac{\partial \sigma_y^{\text{iso}'}}{\partial \alpha_{n+1}} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p} \end{aligned} \quad (3.45)$$

ここで、各微分項はそれぞれ次のようにまとめられる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p} = \frac{\partial}{\partial \Delta\gamma_p} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tri}} - \Delta\gamma_p \mathbb{C} : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}}) = -\mathbb{C} : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}}{\partial \Delta\gamma_p} &= \frac{\partial}{\partial \Delta\gamma_p} (\boldsymbol{\beta}_n^{[i]} + a\sigma_y^{\text{iso}'} + \mathbb{C}_1 : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p + \mathbb{C}_2 : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p - b_2\Delta\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p \boldsymbol{\beta}_n^{(2)[i]}) \\ &= a \frac{\partial \sigma_y^{\text{iso}'}}{\partial \Delta\gamma_p} + \mathbb{C}_1 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} + \mathbb{C}_2 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} - 2b_2 \boldsymbol{\beta}_n^{(2)[i]} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y^{\text{iso}'}}{\partial \alpha_{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{n+1}} (R_0 \alpha_{n+1} + R_\infty (1 - \exp(-b_1 \alpha_{n+1}))) \\ &= R_0 - b_1 R_\infty \exp(-b_1 \alpha_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p} = \frac{\partial}{\partial \Delta\gamma_p} (\alpha_n + \Delta\gamma_p) = 1 \quad (3.49)$$

その他の状態変数もすべて塑性乗数増分に対して陽的な形で次のように求められている。

$$\epsilon_{n+1}^p = \epsilon_n^p + \Delta\gamma_p N_{n+1}^{\text{tri}[i]} \quad (3.50)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma_p \quad (3.51)$$

$$\beta_{n+1}^{[i]} = \beta_n^{[i]} + a\sigma_y^{\text{iso}'}(\Delta\gamma_p) + \Delta\beta^{(1)[i]} + \Delta\beta^{(2)[i]} \quad (3.52)$$

$$\beta_{n+1}^{(1)[i]} = \beta_n^{(1)[i]} + \Delta\beta^{(1)[i]} = \beta_n^{(1)[i]} + \Delta\gamma_p \mathbb{C}_1 : N_{n+1}^{\text{tri}} \quad (3.53)$$

$$\beta_{n+1}^{(2)[i]} = \beta_n^{(2)[i]} + \Delta\beta^{(2)[i]} = \beta_n^{(2)[i]} + \Delta\gamma_p \mathbb{C}_2 : N_{n+1}^{\text{tri}} - b_2 \Delta\gamma_p \beta_n^{(2)[i]} \quad (3.54)$$

以上，導出してきた弾塑性材料構成則の定式化についてはボックス 3.1 にもまとめて示す。

3.4.4 面外方向のひずみ

本章で提案しているマクロ弾塑性材料構成則は，平面応力状態を想定している．一般的な有限要素法における材料構成則の役割は，現ステップのひずみテンソルを受け取り，応力とコンシステント接線剛性を計算することにあるが，平面応力問題では，面外ひずみ（ \approx 板厚変化）についても計算しなければならない．Table-3.3 に 3 次元応力状態と平面応力状態における入出力の違いをまとめる．弾塑性問題においては，面外方向成分ひずみを求めるために様々な方法が提案されているが，今回は Simo や Jetteur らの提案する平面応力射影モデル^{119,120)}を採用する．すなわち，応力の発展方程式は，これまで定式化してきたように面内成分のみによって計算されて，面外ひずみは面内ひずみの従属変数とする．この場合，面外ひずみ成分と面内ひずみの成分を関係づける陽的な表現を導く必要がある．弾性成分については，3次元フックの法則に平面応力の拘束条件 ($\sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$) を加えることによって容易に導くことができ，直

交異方性を仮定したコンプライアンスマトリクスを使って整理すれば

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11}^e \\ \epsilon_{22}^e \\ \epsilon_{33}^e \\ \epsilon_{12}^e \\ \epsilon_{23}^e \\ \epsilon_{31}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_2 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_3 & -\nu_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

とできるから、面外弾性ひずみ成分のみを展開すれば以下のようにできる。

$$\epsilon_{33}^e = -\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{22} \quad (3.56)$$

一方、塑性成分はこれまで提案してきた定式化のみでは、面内ひずみと面外ひずみ間の陽的な関係を導くことはできない。そこで本研究では、数値材料試験の結果から両者の関係性を調べることにする。繊維垂直方向の応力 σ_{22} の単軸および、面内せん断応力 σ_{12} の負荷・除荷の数値材料試験で得られたマクロひずみの履歴を Figure-3.12 に示す。本章で提案する弾塑性材料構成則はひずみ速度依存性を持たないが、便宜上、負荷と除荷をそれぞれ1秒間かけて行うものとする。繊維垂直方向の応力による単軸負荷除荷試験結果である同図(a)より、荷重負荷開始直後は弾性ひずみ成分が支配的であることがわかる。樹脂や炭素繊維のポアソン比に依存した変形挙動を持つため、荷重方向成分と比較して、面外方向成分のマクロひずみは相対的に小さい。一方で、荷重がさらに増加して、微視構造内で樹脂が塑性しはじめると、樹脂の塑性ひずみ非圧縮性によって、面外方向と面内方向のマクロひずみの比率は、弾性状態とは異なる挙動を示すはずである。この計算例での実際のマクロ塑性ひずみ量は、除荷後に試験荷重がゼロとなる時刻の2秒におけるひずみ値に対応するが、その絶対値は面内成分が0.487、面外成分が0.420となった。同図(b)はせん断の負荷除荷試験に対して同様の結果処理を行ったものであるが、この場合には、面外成分ひずみに無関係であることが

確認できる．面内垂直ひずみと面外ひずみの関係については，様々な引張荷重値の元で同様の評価をしていけば，両者の関係をより厳密に記述する関係式を導出することができると考えられるが，今回は上記の $|\epsilon_{22}^p|$ と $|\epsilon_{33}^p|$ の差は小さく，両者の値は等しいものと判断して，塑性ひずみに対しては非圧縮性を仮定する．すなわち，次の関係を仮定する．

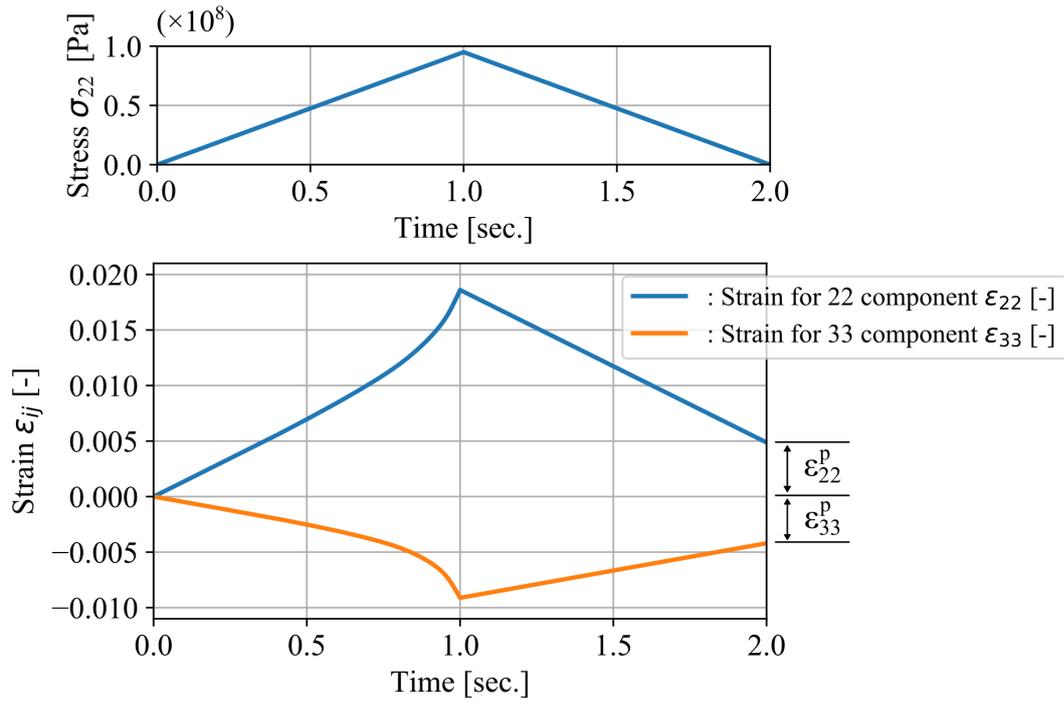
$$\epsilon_{11}^p + \epsilon_{22}^p + \epsilon_{33}^p = 0 \quad (3.57)$$

このうち，1軸は繊維配向方向で塑性ひずみを生じないレベルのマクロ変形しか扱わないため，面外塑性ひずみは以下のように決定できる．

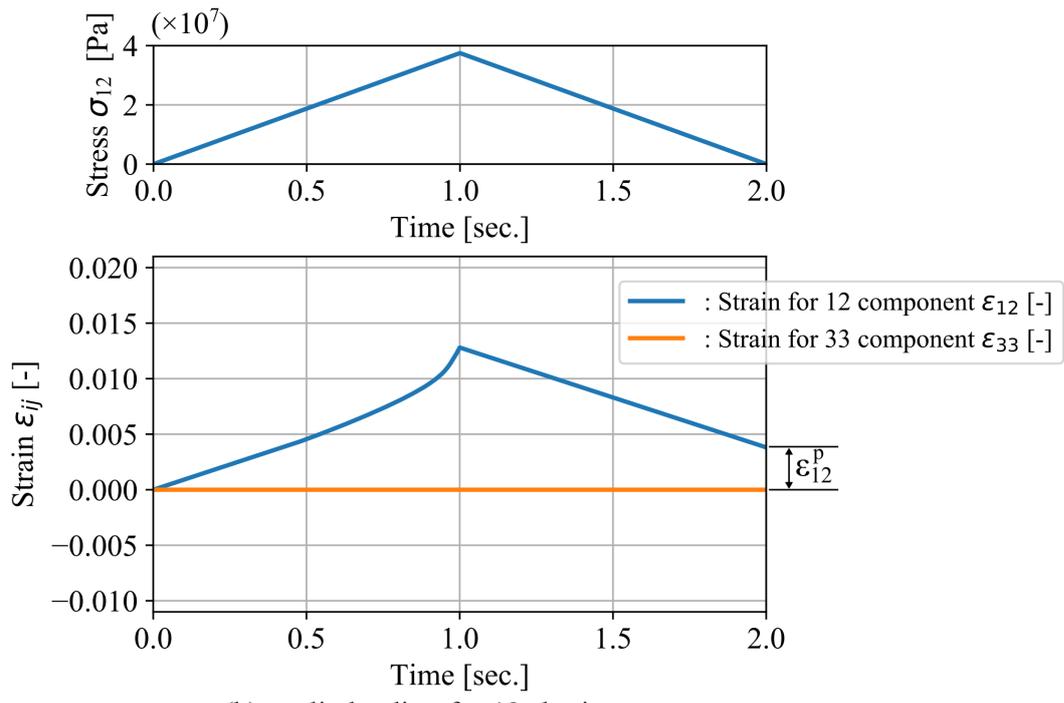
$$\epsilon_{33}^p = -\epsilon_{22}^p \quad (3.58)$$

Table– 3.3 Input and output of physical information in material constitutive law for two types of stress states.

| Stress State | Input | Output |
|--------------|---|---|
| 3D stress | Strain for xx, yy, zz, xy, yz, xz at $n + 1$ ($\epsilon_{11}^{n+1}, \epsilon_{22}^{n+1}, \epsilon_{33}^{n+1}, \epsilon_{12}^{n+1}, \epsilon_{23}^{n+1}, \epsilon_{13}^{n+1}$) | Stress for xx, yy, zz, xy, yz, xz at $n + 1$ ($\sigma_{11}^{n+1}, \sigma_{22}^{n+1}, \sigma_{33}^{n+1}, \sigma_{12}^{n+1}, \sigma_{23}^{n+1}, \sigma_{13}^{n+1}$) |
| | Stress for xx, yy, zz, xy, yz, xz at n ($\sigma_{11}^n, \sigma_{22}^n, \sigma_{33}^n, \sigma_{12}^n, \sigma_{23}^n, \sigma_{13}^n$) | Jacobian matrix at $n+1$ (\mathbf{C}^{eq}) |
| Plane stress | Strain for xx, yy, xy at $n + 1$ ($\epsilon_{11}^{n+1}, \epsilon_{22}^{n+1}, \epsilon_{12}^{n+1}$) | Stress for xx, yy, xy at $n + 1$ ($\sigma_{xx}^{n+1}, \sigma_{yy}^{n+1}, \sigma_{xy}^{n+1}$) |
| | Stress for xx, yy, xy at n ($\sigma_{11}^n, \sigma_{22}^n, \sigma_{12}^n$) | Strain for zz at $n + 1$ (ϵ_{33}^{n+1}) |
| | Strain for zz at n (ϵ_{zz}^n) | Jacobian matrix at $n + 1$ (\mathbf{C}^{eq}) |



(a) cyclic loading for 22 uniaxial test



(b) cyclic loading for 12 sharing test

Figure– 3.12 Stress and strain history as a results of numerical material test for uniaxial and pure shearing test.

3.4.5 材料物性値の同定フロー

本研究にて提案する弾塑性材料構成則には、17個の材料物性値が存在する。いくつかの材料物性値は応力-ひずみ曲線や降伏曲面の形から直接的に求めることができないため、前章の粘弾性材料と同様に試験結果と構成則の応答を定量化した誤差関数を準備して、最適化アルゴリズムによって同定することが望ましい。しかしながら、すべての材料物性値を同時に同定することは困難であるため、いくつかの変形モードごとに数値材料試験を実施し、感度の高い材料物性値を段階的に個別に同定していく。その手順を以下に示す。

1) 弾性マトリクスを構成する材料物性値 ($E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{xz}, G_{xy}$)

今回提案する弾塑性の材料構成則は、一般的なものと同様に、弾性領域と非弾性領域を離して定式化しているため、塑性領域に関する材料物性値は弾性領域の挙動に一切影響を与えない。したがって、弾性マトリクスを構成する材料物性値は、一般的な弾性均質化解析にて取得することができる。

2) 純せん断変形モードに関する材料物性値 ($\sigma_{y0}^{iso}, R_0, R_\infty, b_1$ と C_{112}, C_{212}, b_2)

前述した背応力の移動硬化成分はせん断モードと単軸モードが独立しており、互いにカップリングしていないため個別に材料物性値が同定できる。等方硬化成分 $\sigma_y^{iso}(\alpha)$ は2つの変形モードで共有されているが、垂直変形モードと比較してせん断変形モードの方が材料挙動に影響を与える材料定数が少ないため、式(3.26)に示した Voce 則の物性値はせん断モードで一旦同定を行う。ただし、ここで得られる物性値はあくまで暫定的なものであり、最後のステップで微調整を行うため、あたり付けの意味合いが強い。

3) 単軸引張・圧縮モードに関する材料物性値 (a, C_{122}, C_{222}) のあたり付け

背応力の発展則に関する残りの材料物性値は、垂直引張・圧縮モードで得られ

た材料挙動を用いて同定する。等方硬化成分に連成する背応力も $a\sigma_y^{iso'}$ が垂直成分のみ発展するため、このステップでの同定対象とみなすことができる。

4) 垂直応力が支配的な領域における降伏曲面形状に関する材料物性値 (σ_{y0}^{kin}, F)

材料物性 F は垂直応力が支配的な2軸応力場における降伏曲面の形を決定するため、単軸モードでは同定ができない。そこで、応力ベクトルの角度が $0\sim 45$ の応力比で数パターンの解析を行い、それら全ての結果をもとに同定を行う。初期降伏曲面の形状には $1/4$ 対称性があるため、第1象限側の特性評価だけでよい。

5) 全パラメータの微調整

最後に、1~4のすべての段階で得られたすべてのパラメータを用いて微調整を行う。ここでは、最適値の探索範囲をこれまでのステップで同定された値近傍に限定する。本研究では、前述した1~4のステップで得られているそれぞれ物性値の同定結果を中央値に採用して、その $\pm 50\%$ の範囲で最適値の探索を行うことにする。

ここでの各段階で実施する数値材料試験におけるマクロ応力の負荷パターンの概念図を Figure-3.13 および 3.14 にまとめておく。

| | step2 | step3 |
|---|---|----------------------------|
| Image of B.C for numerical material tests | | |
| Target material constants | $\sigma_{y0}^{iso}, R_0, R_\infty, b_1, C_{112}, C_{212}$ | a, C_{122}, C_{222}, b_2 |

Figure- 3.13 Parameter identification flow at first half for proposed elasto plastic constitutive law.

| | step4 | step5 |
|---|------------------------|-------|
| Image of B.C for numerical material tests | | |
| Target material constants | σ_{y0}^{kin}, F | All |

Figure– 3.14 Parameter identification flow at second half for proposed elasto plastic constitutive law.

3.5 マクロ材料構成則の性能検証

ここでは、複数の変形モードの数値材料試験を行い、3.4.5節で述べた方法により本研究で提案する材料構成則の材料物性値を同定し、その同定精度について確認する。

まずはじめに、同定された材料物性値の値を Table–3.4 に示す。比較対象として、異方性弾塑性 Hill 構成則の同定結果も併記している。Hill 構成則の材料物性値の同定は過去に著者らが行った手法を採用する⁵⁴⁾。具体的には、多軸応力試験は行わず、単一ひずみ成分のみを与えた数値材料試験の結果をもとに同定する。本研究で提案している構成則の基となったバイモーダル塑性理論では、初期降伏曲面を構成する物性値としては $\sigma_{y0}^{iso} = \sigma_{y0}^{kin}$, $F = 1$ となるが、いずれも同定結果を見る限りそれらの関係性は得られていないことから、これらはそれぞれ独立したパラメータとすることで、よりフィッティング精度は向上しているものと期待される。

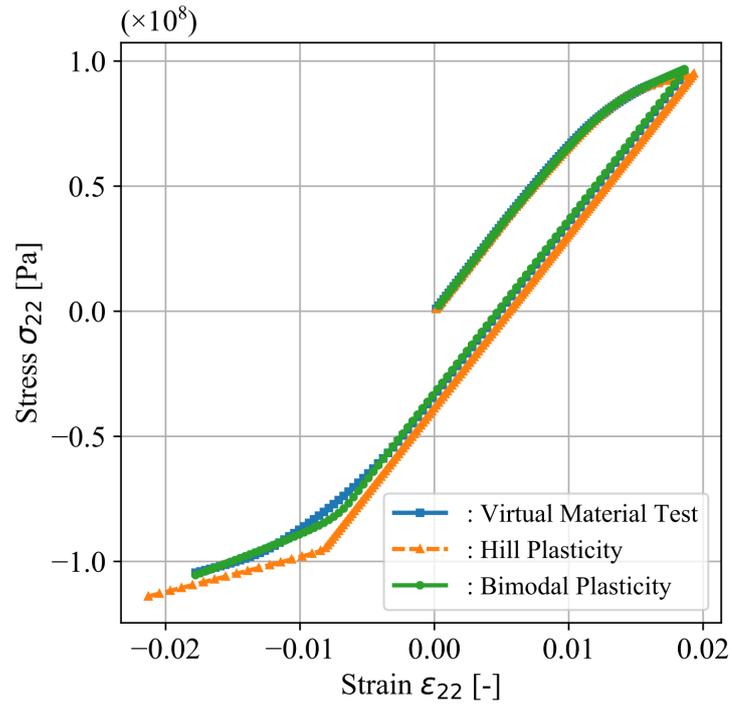
次に、数値材料試験によって得られた実際の応力-ひずみ曲線を、上記の二つの材料構成則のフィッティング結果と合わせて示す。Figure–3.15 と 3.16 は、それぞれ 22 成分、12 成分を用いたサイクリック荷重結果である。引張側の挙動は、どちらの構成則も流

れベクトルの方向は同じであり，硬化則は Voce の関数形をなしているのほぼ同じ結果になる．一方，圧縮側の特性は等方硬化を仮定した Hill 構成則では，降伏応力が過大に見積もられており，その誤差の程度は 22 成分ではとりわけ大きい．本研究が提案する異方硬化則では圧縮側のフィッティング精度も優れているといえる．

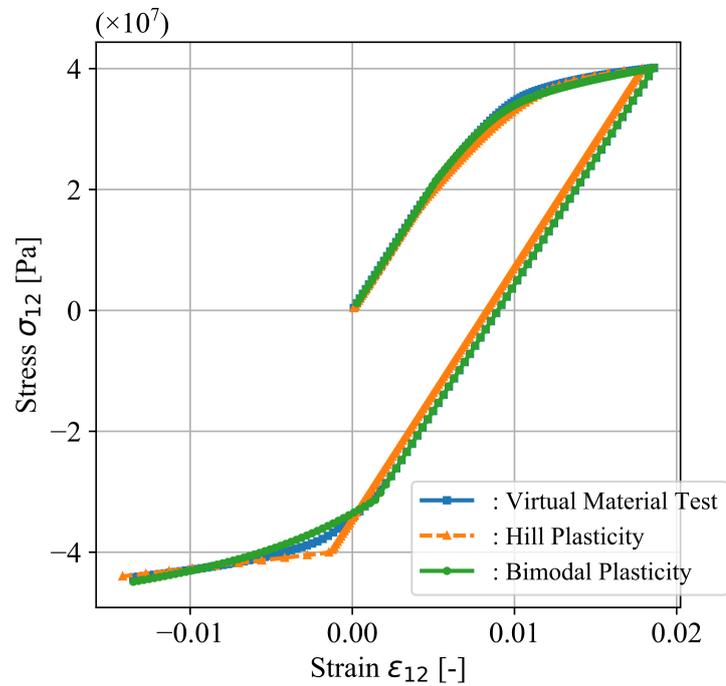
続いて， $\sigma_{12} - \sigma_{22}$ の 2 軸応力状態について，様々な応力比を用いて引張だけ与えた結果を Figure-3.17 と 3.18, 3.19, 3.20 に示す．これらの応力-ひずみ曲線における横軸のひずみ値は 0~2[%] に統一している．比較的 σ_{22} 成分が支配的な応力状態では，Hill 構成則のフィッティング精度が著しく低下している様子が確認できる．これは CFRTP の降伏関数が，Hill 構成則が仮定するような楕円型ではないことを意味している．

Table- 3.4 Identified material constants for two types of material constitutive law.

| Hill Model | | Proposed Model | | | |
|---------------|------------------------|---------------------|------------------------|------------|------------------------|
| Parameters | Values | Parameters | Values | Parameters | Values |
| E_x | 1.502×10^{11} | E_x | 1.502×10^{11} | $C_{2,12}$ | 7.830×10^8 |
| E_y | 6.912×10^9 | E_y | 6.912×10^9 | $C_{2,22}$ | 1.227×10^9 |
| ν_{xy} | 0.307 | ν_{xy} | 0.307 | b_2 | 3.515×10^2 |
| ν_{xz} | 0.307 | ν_{xz} | 0.307 | F | 7.343×10^{-1} |
| G_{xy} | 4.168×10^9 | G_{xy} | 4.168×10^9 | a | 1.443 |
| σ_{y0} | 3.855×10^7 | σ_{y0}^{iso} | 3.043×10^7 | | |
| R_0 | 1.736×10^9 | R_0 | 8.101×10^8 | | |
| R_∞ | 4.679×10^7 | R_∞ | 1.489×10^7 | | |
| b_1 | 1.612×10^3 | b_1 | 2.113×10^3 | | |
| R_{xx} | 5.079×10^1 | σ_{y0}^{kin} | 1.487×10^2 | | |
| R_{yy} | 1.000 | $C_{1,22}$ | 8.239×10^8 | | |
| R_{xy} | 0.757 | $C_{1,12}$ | 3.059×10^3 | | |

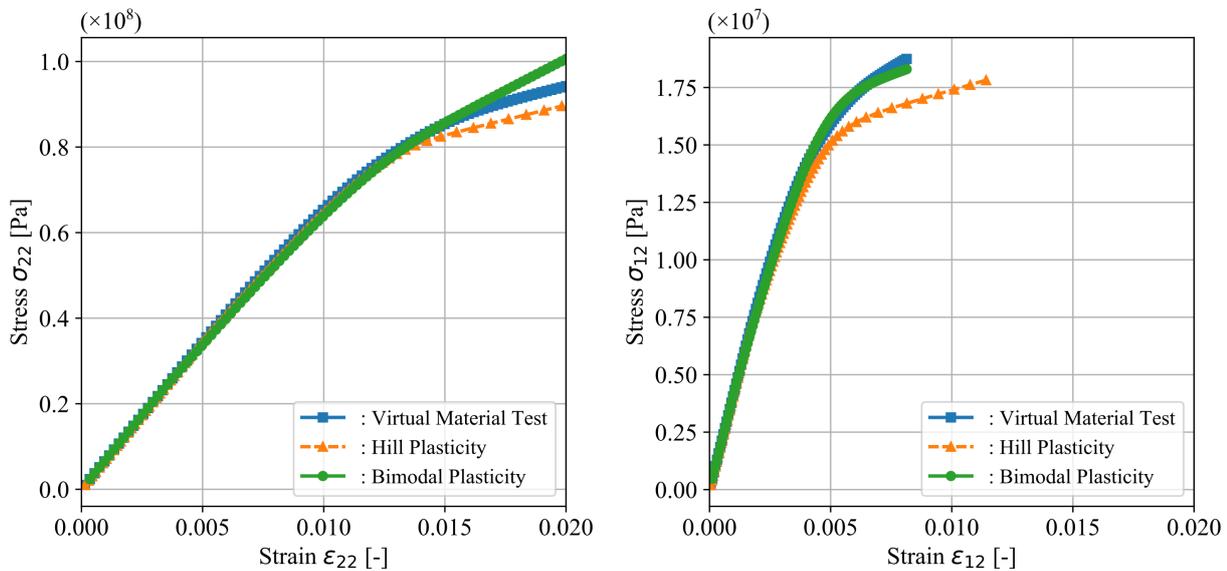


Figure– 3.15 Results of numerical material test and curve fitting under the condition of cyclic loading for 22 direction.



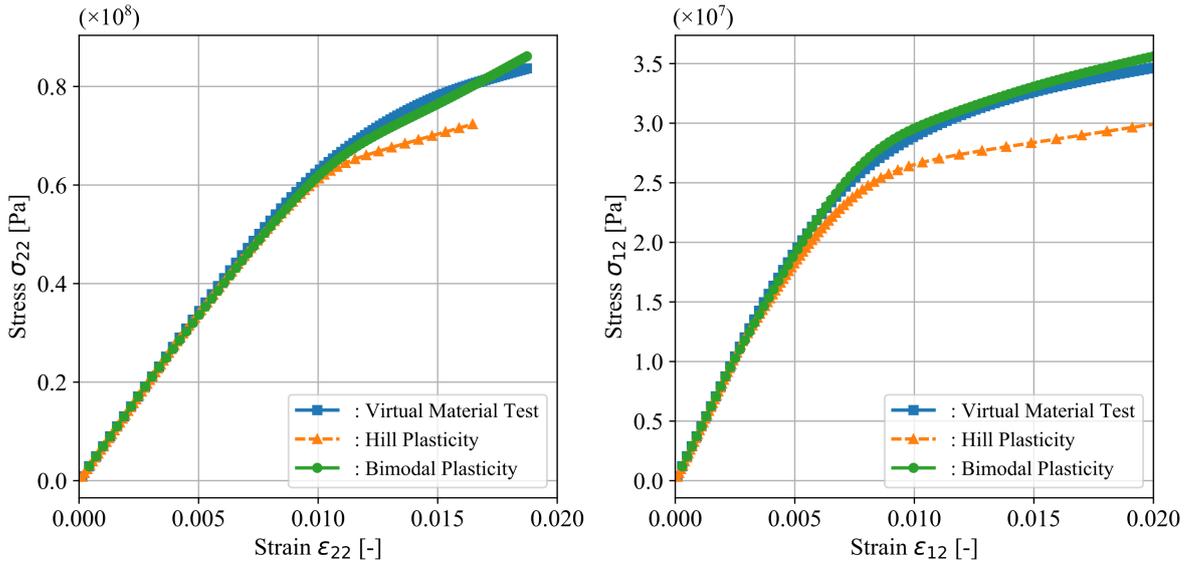
Figure– 3.16 Results of numerical material test and curve fitting under the condition of cyclic loading for 12 direction.

本研究の提案モデルから得られた応力-ひずみ曲線は、塑性領域の勾配が若干ずれている傾向がみられているものの、2[%]以下のひずみ範囲においては、実用上十分なフィッティング精度が得られているものといえる。実際、新たに材料パラメータ F の導入により、 σ_{22} が支配的な領域の降伏曲面の曲率に汎用性を持たせた効果が表れている。一方、せん断の σ_{12} が支配的な領域では、提案モデルでは22成分の特性が純弾性的な挙動になっており、若干の非線形性を示す数値材料試験の応答とは異なる結果となっている。これは、式(3.23)の $f^{[3]}$ で示したように、提案モデルではせん断支配の応力状態の降伏関数が σ_{22} 軸と完全に平行であると理想化したことによる弊害である。とはいえ、その程度は非常に小さく、せん断の塑性ひずみの方が圧倒的に支配的であるため、少なくとも微小ひずみの範囲内においてはこれらの問題が与える影響は軽微であり、実用上十分な精度であると考えている。

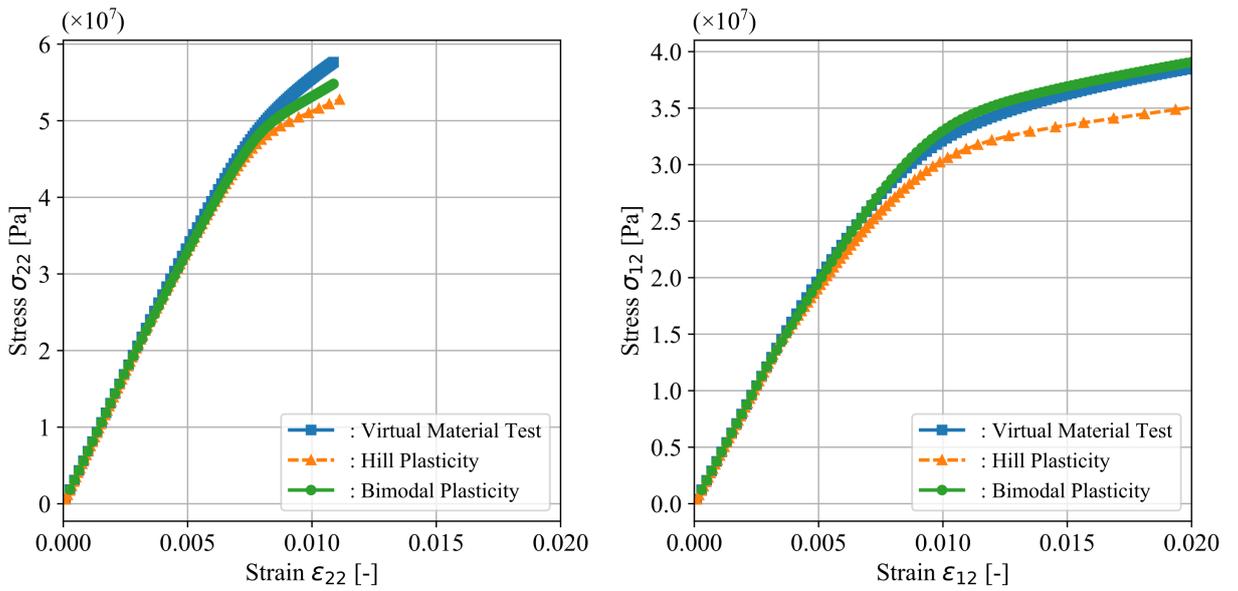


(a) Stress ratio : $(\sigma_{12}/\sigma_{22}) = \tan(11.25^\circ)$

Figure–3.17 Stress strain curve under biaxial stress conditions for stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ is 11.25° .

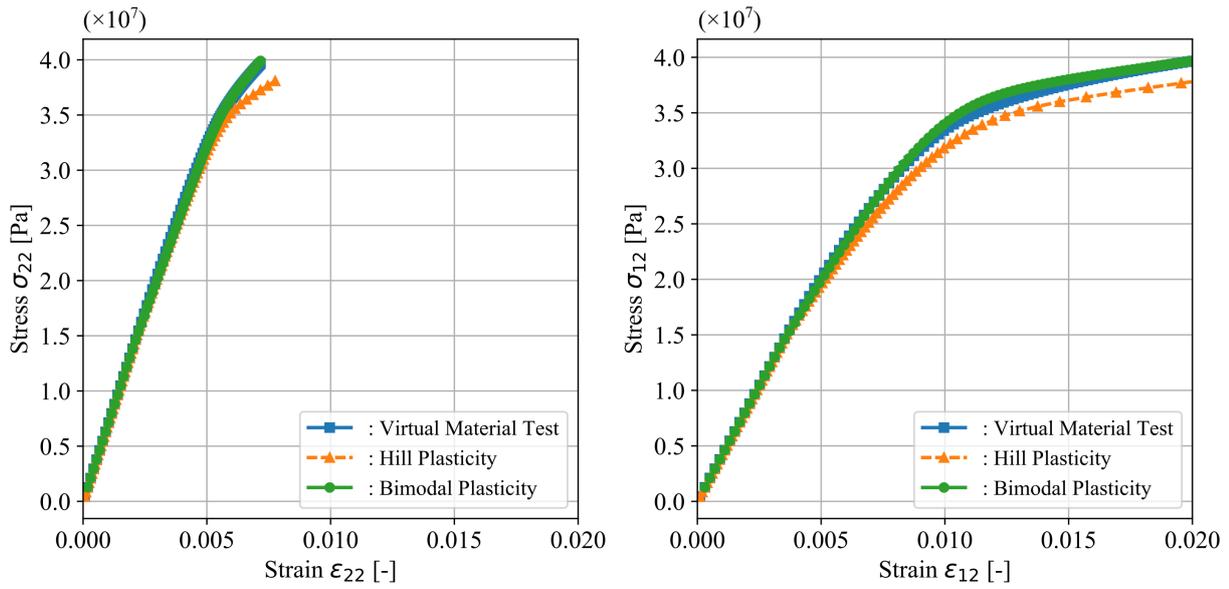


(b) Stress ratio : $(\sigma_{12}/\sigma_{22}) = \tan(22.50^\circ)$

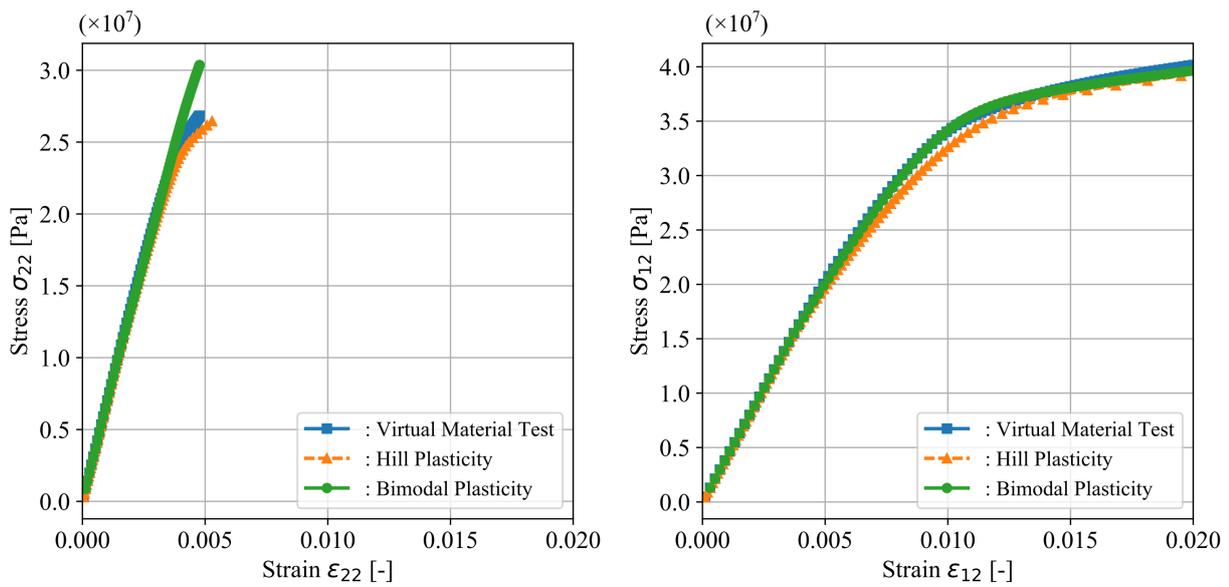


(c) Stress ratio : $(\sigma_{12}/\sigma_{22}) = \tan(33.75^\circ)$

Figure– 3.18 Stress strain curve under biaxial stress conditions for stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ is 22.50° and 33.75° .



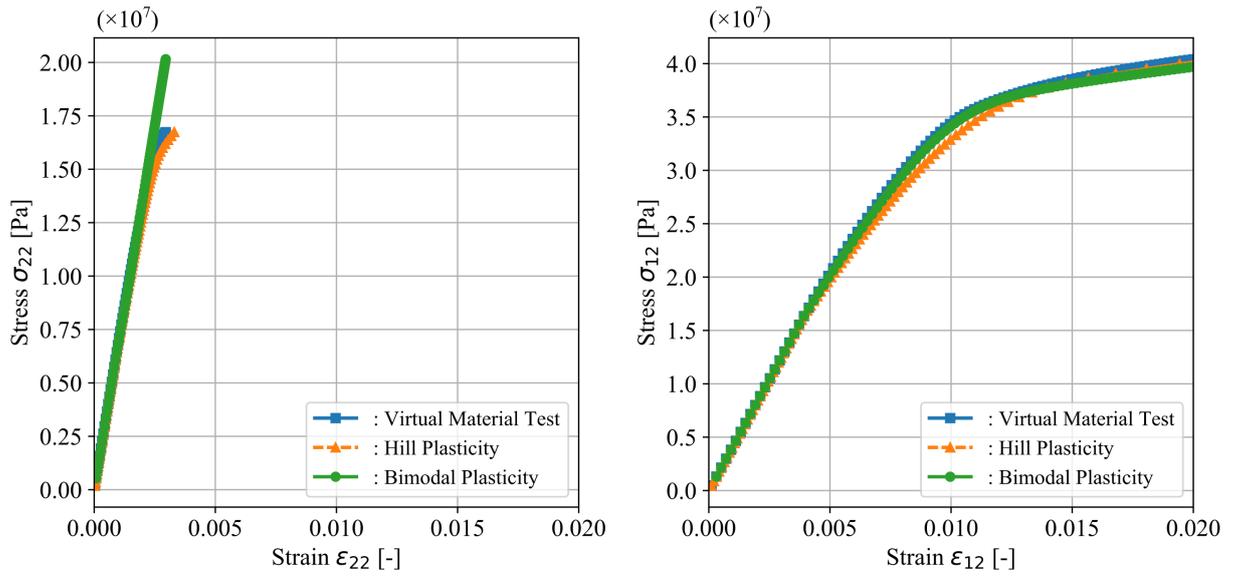
(d) Stress ratio : $(\sigma_{12}/\sigma_{22}) = \tan(45.00^\circ)$



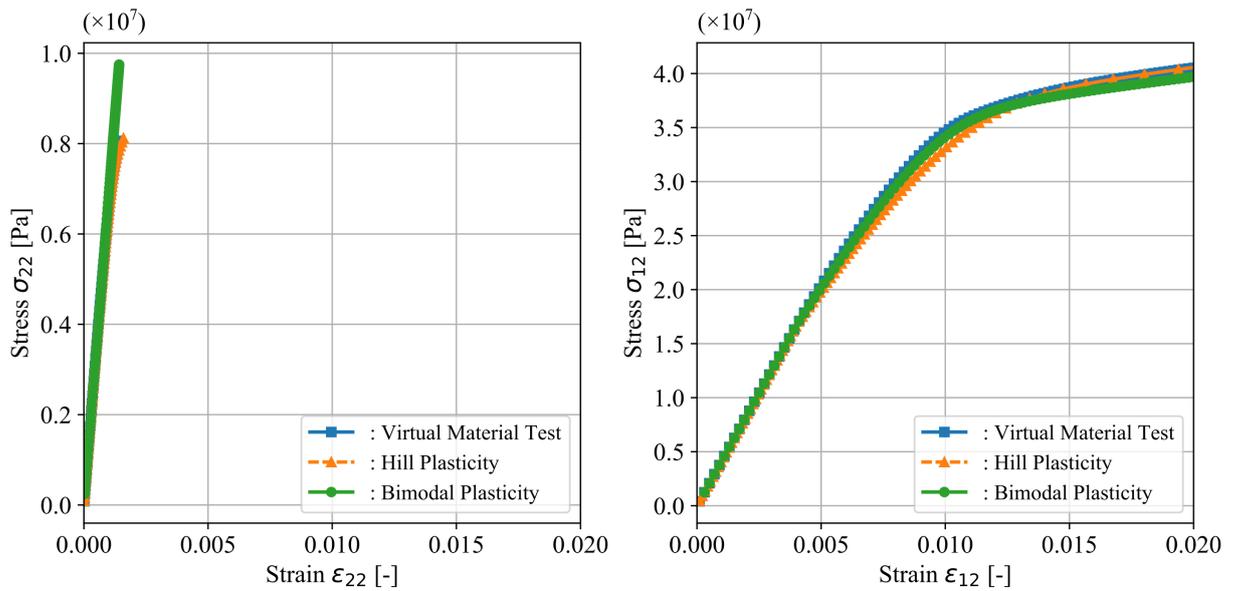
(e) Stress ratio : $(\sigma_{12}/\sigma_{22}) = \tan(56.25^\circ)$

Figure-3.19 Stress strain curve under biaxial stress conditions for stress ratio

$\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ is 45.00° and 56.25° .



(f) Stress ratio : $(\sigma_{12}/\sigma_{22}) = \tan(67.50^\circ)$



(g) Stress ratio : $(\sigma_{12}/\sigma_{22}) = \tan(78.75^\circ)$

Figure– 3.20 Stress strain curve under biaxial stress conditions for angle of stress ratio

$\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ is 67.50° and 78.75° .

続いて、降伏曲面の形状について考察する。Figure-3.21には、 σ_{11} と σ_{12} の2軸応力モードであるFDMの降伏曲面を示す。初期降伏曲面に加えて、純せん断応力の予荷重を与えた際の後続の降伏曲面も併せて示した。炭素繊維は純弾性的特性で破壊や損傷も考慮してないため、 σ_{11} による単軸の特性は炭素繊維が支配的であり、樹脂の特性はマクロ的な材料挙動にはほとんど影響しない。それだけではなく、炭素繊維の軸方向の弾性率は、樹脂のそれよりも圧倒的に大きいため、繊維方向に大きな荷重が負荷されても樹脂はほとんど変形することなく塑性領域にまで進展しない。結果的に、FDMの降伏曲面は繊維方向の成分応力 σ_{11} には非依存となり、 σ_{11} 軸に平行な開いた形状となる。この傾向はせん断応力によって硬化した後になっても同様である。したがって、FDMの硬化挙動は、Figure-3.16に示した純せん断モードによるサイクリック試験のみで正確に表現ができると結論付けられる。

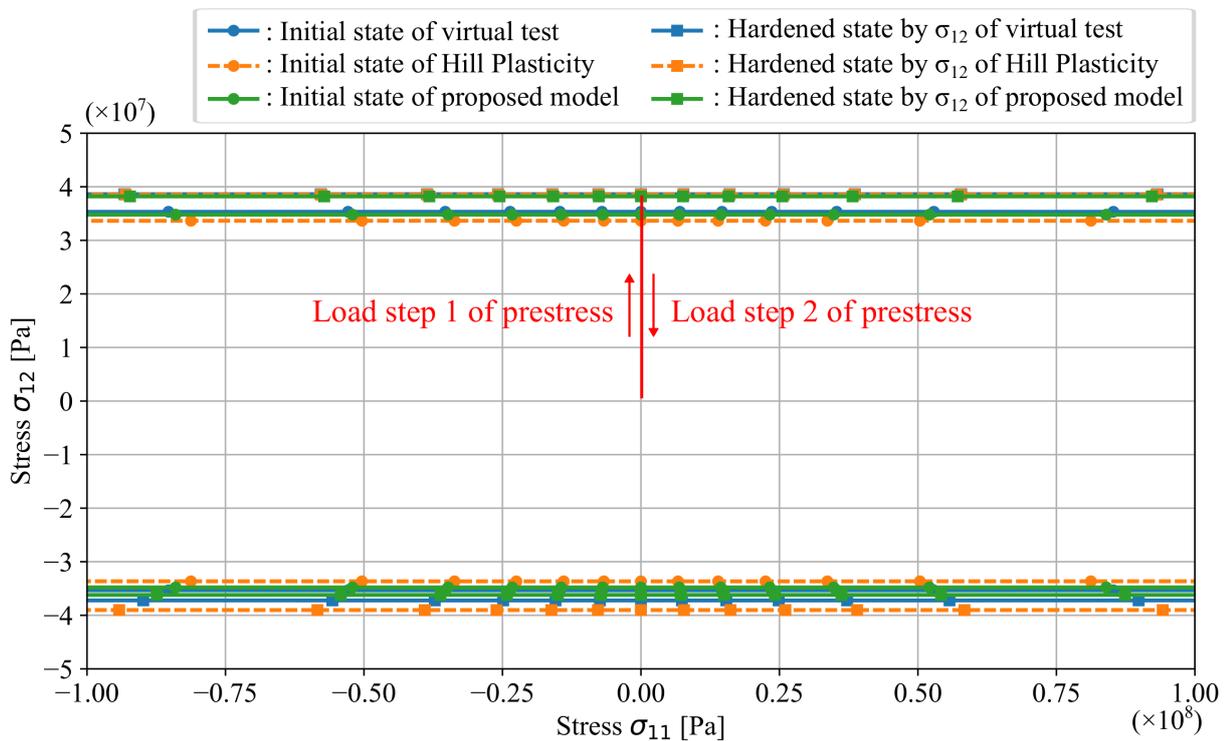


Figure- 3.21 Yield surface for initial and hardening state after pre-stress by shear of 12 component, displayed on Fiber Dominant Mode.

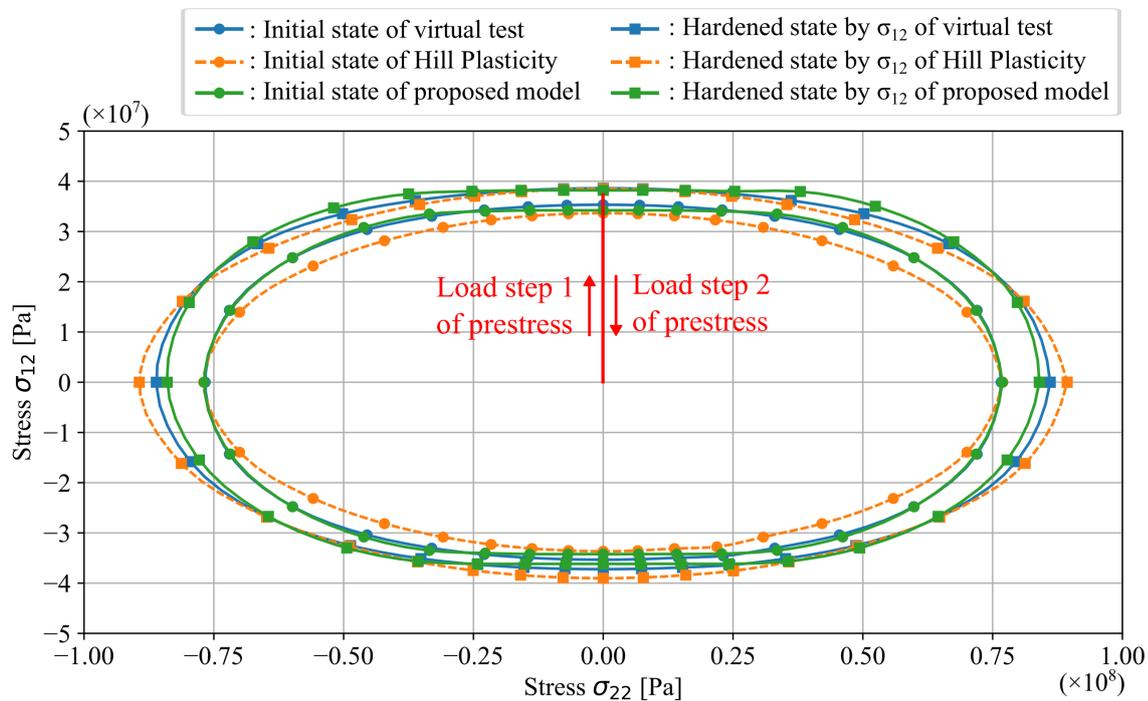
このような挙動はFRPやCFRTPなどの樹脂系複合材に特有の挙動と考えられる。実際、マトリクスに金属を用いたMMC (Metal Matrix Composite) やセラミクスを用いたCMC (Ceramics Matrix Composite) などではその限りではなく、 σ_{11} 軸方向を長軸とした楕円型になることが報告されている⁶²⁾。

MDMの降伏曲面について観察した結果を示す。Figure-3.22は、初期降伏曲面とせん断応力の予荷重による硬化後の後続曲面である。初期の降伏曲面について、数値材料試験とHill構成則の応答に着目すると、Hill構成則の材料物性値は σ_{22} の単軸引張と σ_{12} のプラス側の純せん断によって同定されているため、それらの変形モードに対応する降伏点は数値材料試験結果と合致している。しかしながら、多軸応力場の特に引張とせん断が等しく負荷された応力ベクトル 45° 近傍の曲面は大きくずれている。多軸応力場の試験データも含めた全体最適化解析を行って物性値を同定すれば、平均的な誤差はもう少し抑えられるかもしれないが、Hill構成則が前提としている楕円形状の降伏曲面では、フィッティング性能に限界があることが視覚的にも判別できる。

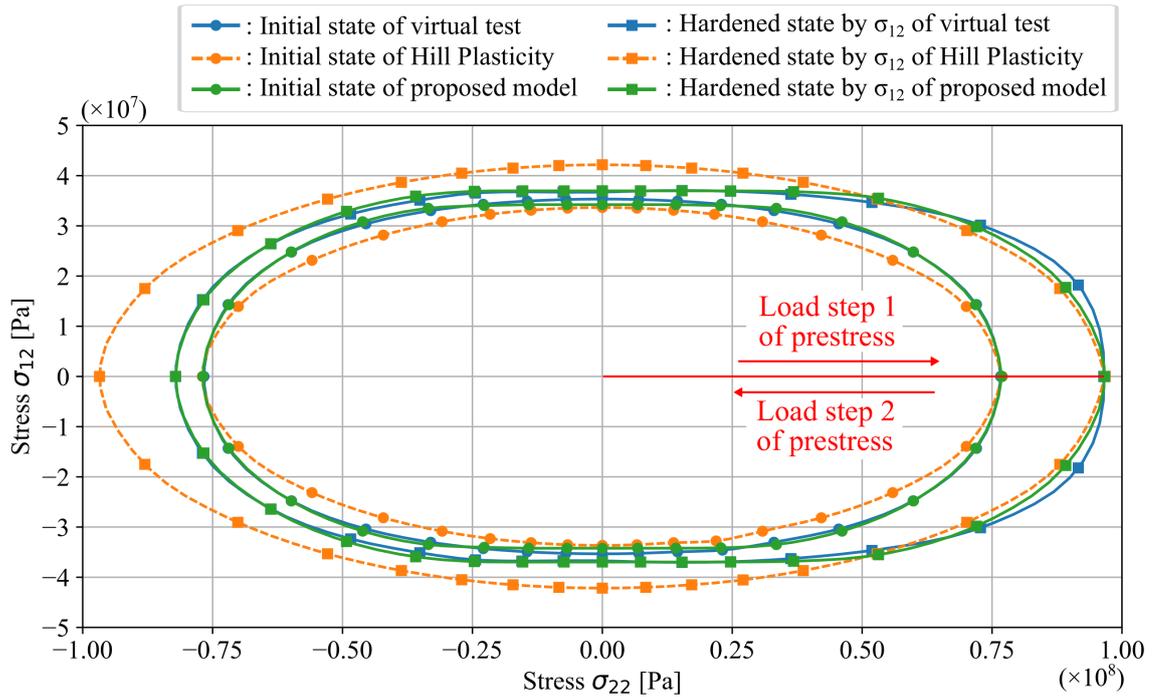
一方、純せん断応力 σ_{12} によって硬化された状態の降伏曲面について、数値材料試験の結果を観察すると、 σ_{22} 軸方向にも大きく硬化していることは前述した通りである。ところが、Hill構成則による応答は σ_{22} 軸方向の硬化を過剰に見積もっていることから、硬化前後の降伏曲面の相似関係は崩れている様子が改めて確認できる。一方、本研究が提案する材料構成則では、初期の降伏曲面は非常に良い一致を示しており、硬化後の曲面についても σ_{22} 軸上の降伏応力が若干高めには出ているものの、Hill構成則と比較してはるかに高精度でフィッティングができていることが確認できる。硬化後のせん断応力が支配的な応力領域では、平坦な領域が若干広くなり過ぎている傾向はみられるが、実用上は十分なフィッティング精度であると考えられる。

Figure-3.23は σ_{22} の垂直引張応力によって硬化させた場合の結果である。せん断応力による降伏時よりも対称性が大きく崩れた降伏曲面となることは前述した通りであ

る。その結果として、 σ_{22} の圧縮側では、Hill 構成則の応答が全体的にかなり過剰な降伏応力を示している。また、せん断応力軸方向にはさほど硬化しておらず、ほぼ σ_{22} 軸方向にだけ広がるような硬化挙動を示しているため、せん断応力方向のフィッティング精度もかなり悪い。それに対して、本研究で提案した材料構成則では、 σ_{12} 軸に対して非対称に変化する挙動はもちろんのこと、硬化に伴い σ_{22} 軸と平行になる領域が広がる傾向もうまくとらえられており、非常に優れたフィッティング結果を示すことが確認できる。



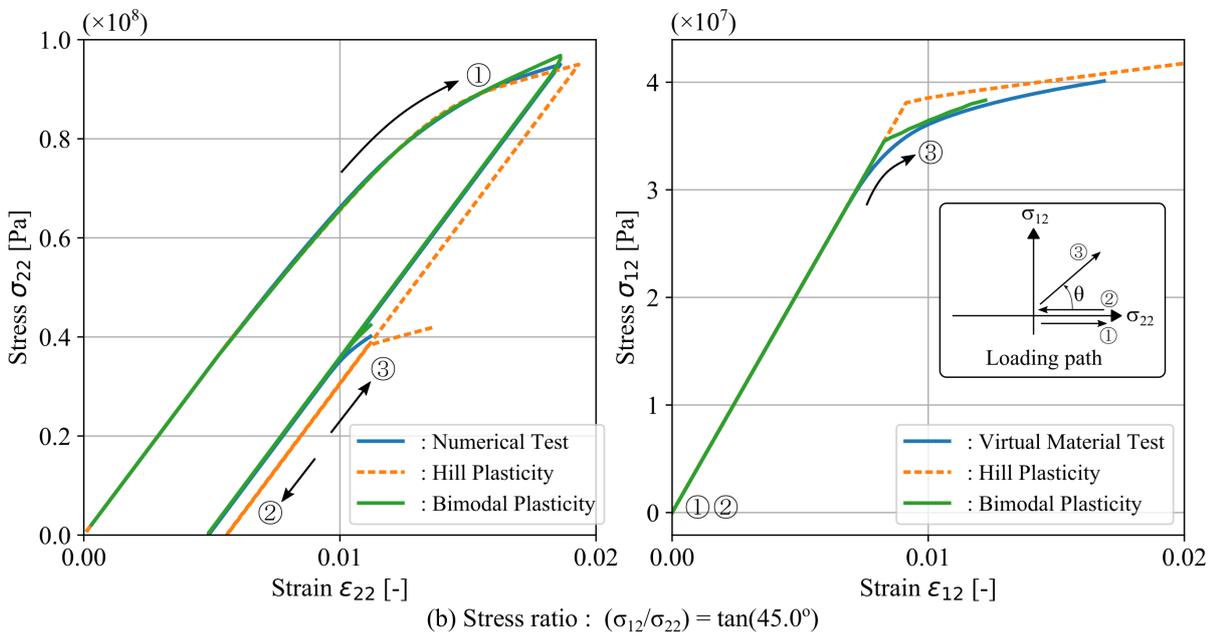
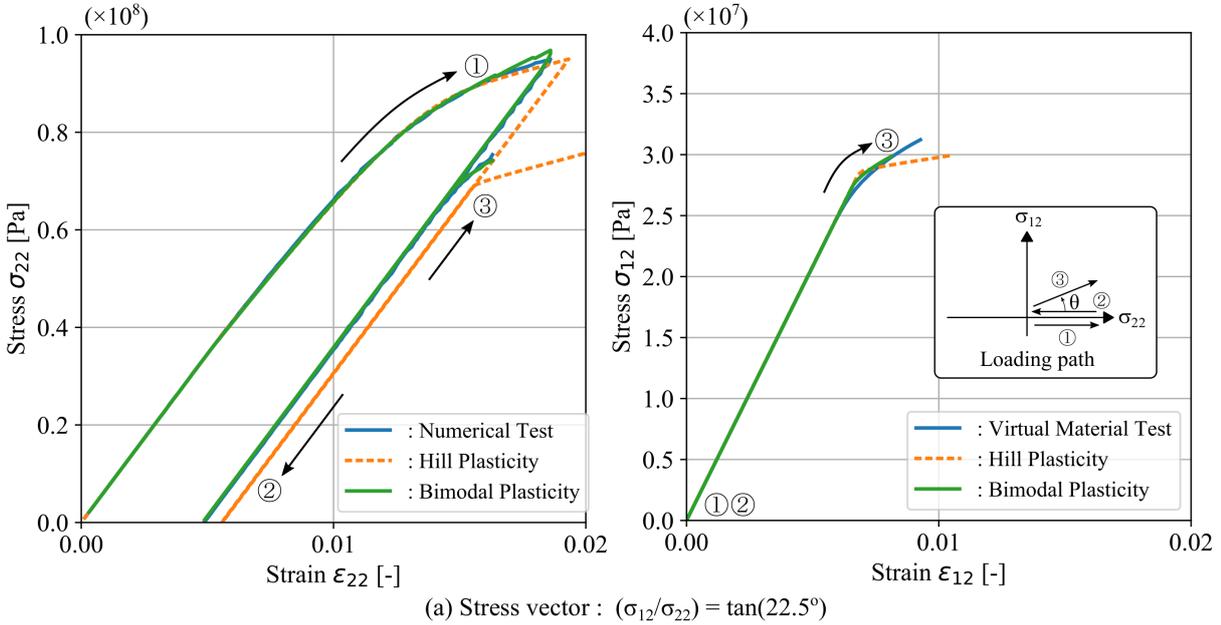
Figure– 3.22 Yield surface for initial and hardening state after pre-stress by shear of 12 component, displayed on Matrix Dominant Mode.



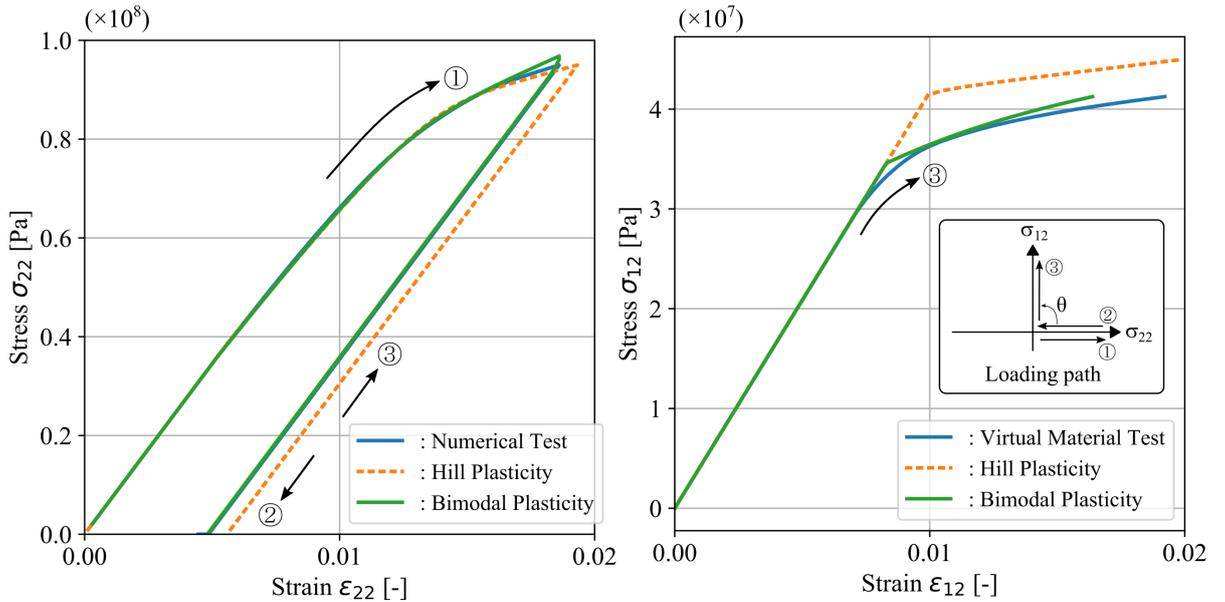
Figure– 3.23 Yield surface for initial and hardening state after pre-stress by shear of 22 component, displayed on Matrix Dominant Mode.

最後に、代表的な数パターンの応力比に対して、硬化後の履歴も含めて応力-ひずみ曲線を描画した結果を示す。Figure–3.24 と 3.25 は垂直方向の応力により硬化させた後に、2軸応力を負荷させた際の応力-ひずみ曲線である。まず、垂直成分の応力 σ_{22} については、今回構築した材料構成則では、あらゆる応力比の条件においても、良好なフィッティング結果を示すことが確認できる。一方、せん断成分の応力 σ_{12} については、降伏点に若干のズレが観測されるケースも散見されるものの、十分に塑性した後の接線勾配は数値材料試験の応答をうまく再現できている。一方、Hill 構成則については、特にせん断成分の応答において、降伏応力を過少あるいは過大に評価してしまうだけでなく、塑性後の接線勾配も材料試験とは大きく異なる結果となっている。せん断応力により硬化させた後の応力-ひずみ曲線については、Figure–3.26 と 3.27 に示す。全体的な傾向は垂直応力による硬化の場合と同様で、応力-ひずみ曲線において、材料を硬化させるために与えた応力成分の方では、Hill 構成則と本研究が提案する構成則と

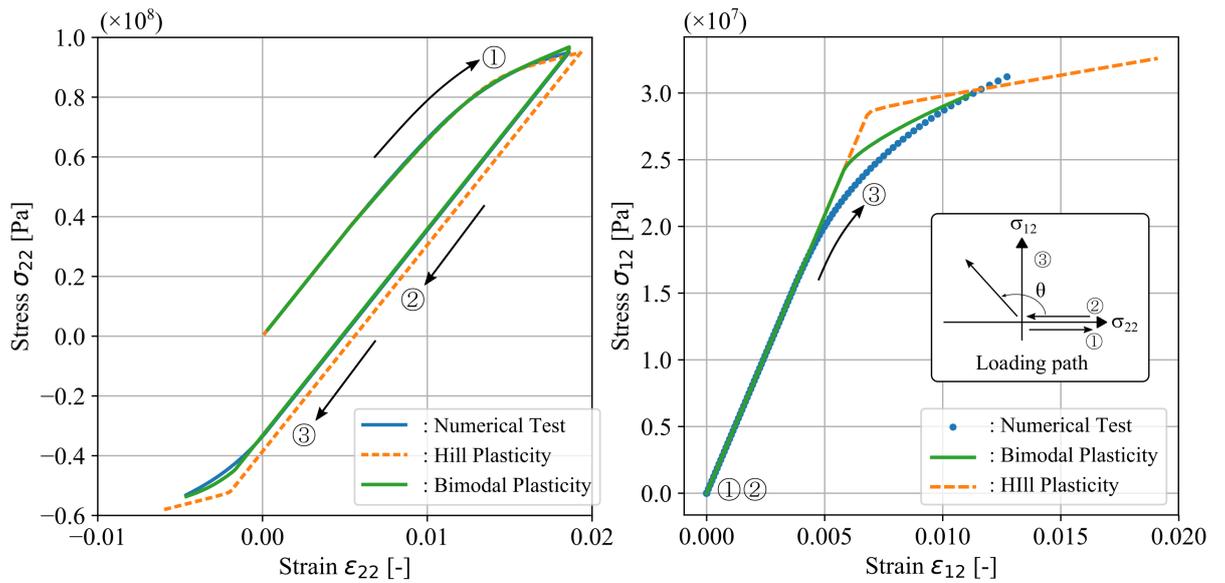
ではそれほど大きな差はみられない。その一方で、それとは異なる成分の応答は、本研究が提案する構成則の方が明らかに精度良く数値材料試験の応答が表現できている。



Figure– 3.24 Stress strain curve under the boundary condition of biaxial stress after hardening by normal stress σ_{22} . Stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ after hardening is 22.5° and 45.0° .

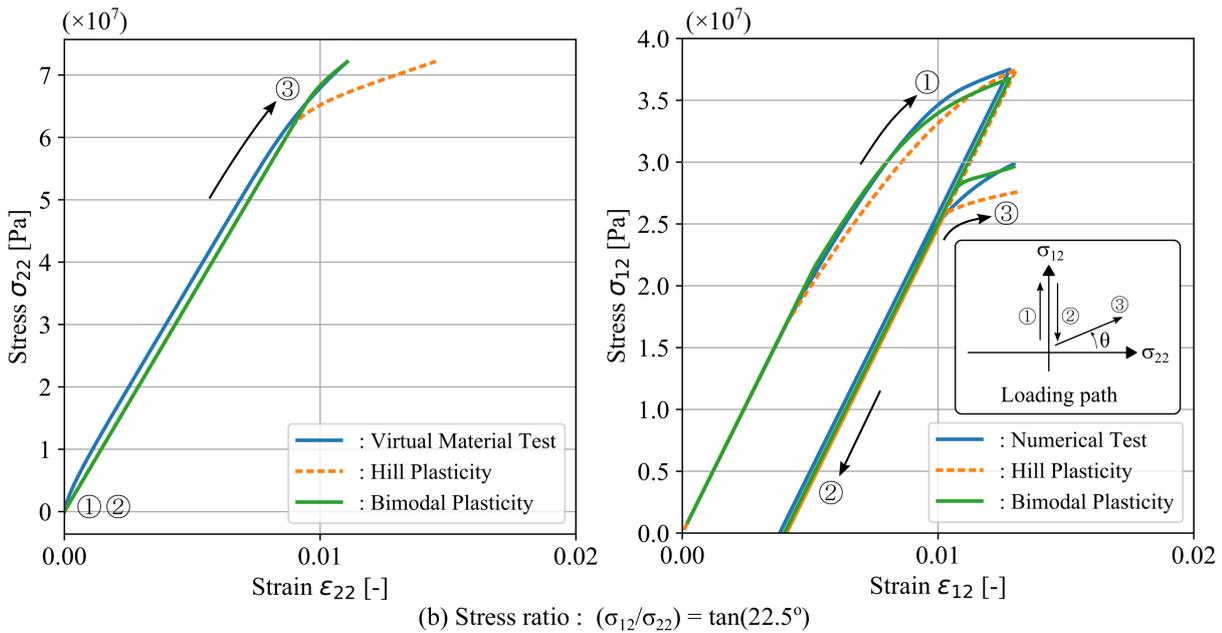
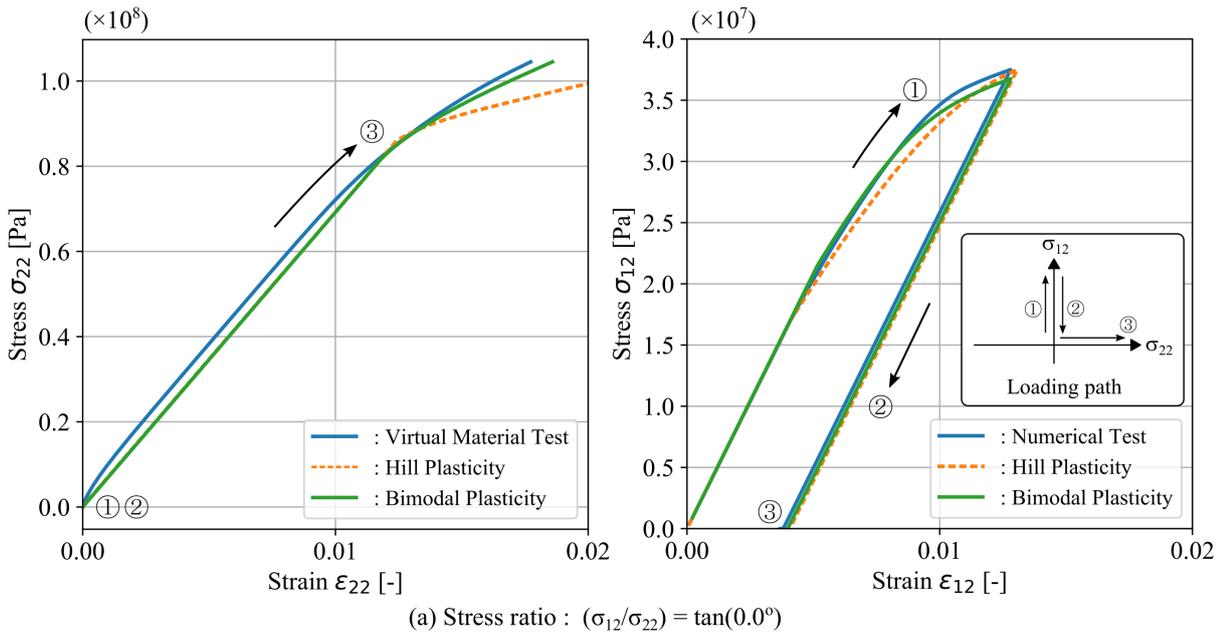


(c) Stress ratio : $(\sigma_{12}/\sigma_{22}) = \tan(90.0^\circ)$

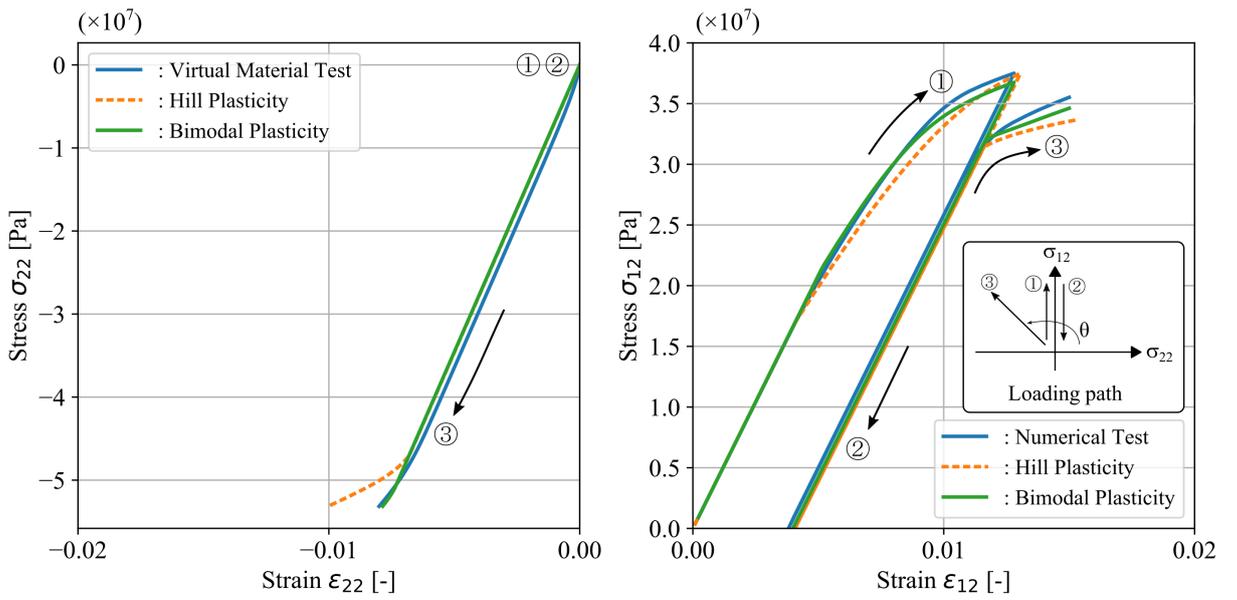
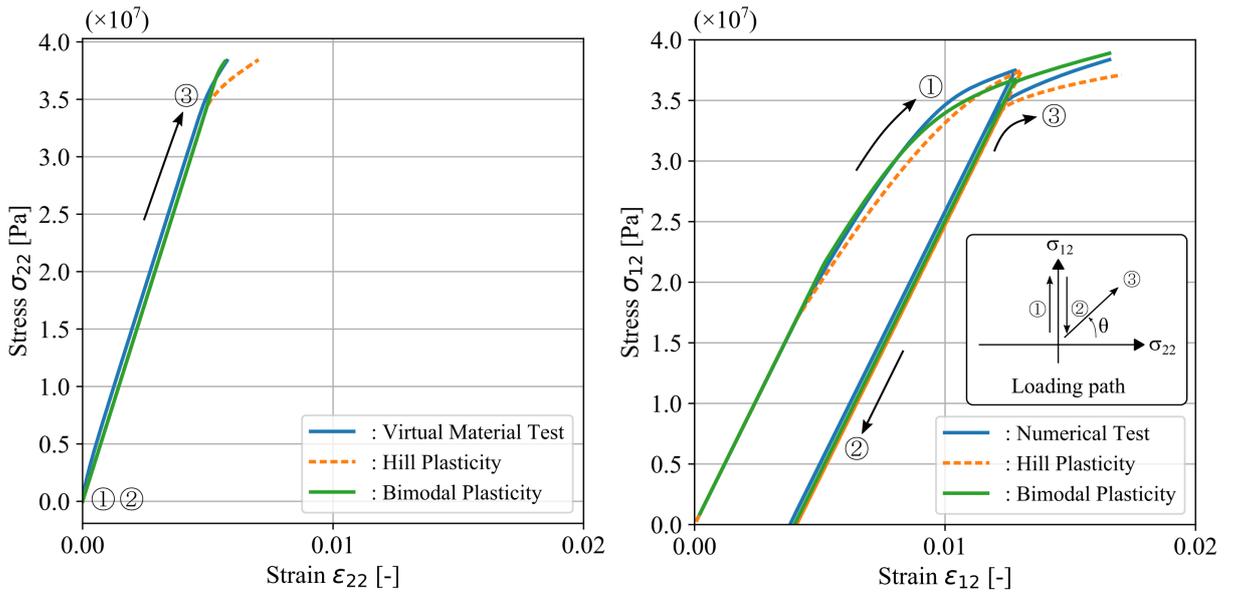


(d) Stress vector : $(\sigma_{12}/\sigma_{22}) = \tan(146.25^\circ)$

Figure– 3.25 Stress strain curve under the boundary condition of biaxial stress after hardening by normal stress σ_{22} . Stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ after hardening is 90.0° and 146.25° .



Figure– 3.26 Stress strain curve under the boundary condition of biaxial stress after hardening by shear stress σ_{12} . Stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ after hardening is 0.0° and 22.5° .



Figure– 3.27 Stress strain curve under the boundary condition of biaxial stress after hardening by shear stress σ_{12} . Stress ratio $\tan^{-1}(\sigma_{12}/\sigma_{22})$ after hardening is 45.0° and 146.25° .

3.6 Off-Axis 試験による妥当性検証

前節では、垂直応力とせん断応力の2軸応力場を厳密に制御した数値材料試験を実施することで応力-ひずみ曲線を取得し、そのデータを用いて提案する構成則の材料物性値を同定した後、その表現性能について検討した。これらの特性は実材料試験で取得することは困難であるため、数値材料試験で得られた結果を真値であると仮定して考察を進めてきた。本節では、実材料試験の実施が可能な単軸モードに限定して、前節で同定した材料物性値を用いた同条件の仮想試験結果と比較する。これは材料構成則の検証に留まらず、マイクロモデル作成から数値材料試験実施を含む一連の均質化解析フローの妥当性検証をも含む検討である。

3.6.1 角度をつけた CFRTP 材の実材料試験

一方向強化材の非主軸方向の材料挙動は、マトリックス樹脂の塑性変形や粘性の影響により異方性と強い非線形性を示すことが知られているため⁶³⁾、強化繊維の繊維方向を変化させた非主軸方向引張試験（以下、off-axis 試験と呼ぶ）行う必要がある。本研究では、荷重負荷方向に対して強化繊維の繊維方向をそれぞれ 0° 、 22.5° 、 45° 、 67.5° 、 90° に配向させた5種類の試験片を用意し off-axis の実材料試験を行った。

off-axis 試験では、面内カップリング変形をつかみ部で拘束することにより、試験片の掴み部においてせん断変形の発生が強制的に抑制される。このつかみ部の変位拘束によって、試験片中央部にせん断力と曲げモーメントが生じ、試験片のひずみ分布が一樣ではなくなるため、真の弾性率と試験片中央部で測定された見かけの弾性率の間に相違が生じることが知られている⁶⁴⁾。そこで、Sun と Chung は、端部拘束による応力集中の影響を低減させるため、斜めタブ（以下、oblique タブと呼ぶ）を用いる方法を提案した⁶⁵⁾。この斜向構造を持つ oblique タブを用いることで、応力集中を低減させ、精度の高い評価を行うことできる⁶⁶⁾。そこで本研究では、非主軸方向の試験片に

対してアルミ製の oblique タブを接着した。実際の試験片の写真を Figure-3.28 に示す。また、oblique タブのタブ角度は、試験片を模擬した解析モデルに対して強制変位を与え、タブに生じる応力集中が最も低減されるタブ角度を FEM による感度解析から求めた。各試験片の oblique タブのタブ角度を Table-3.5 に示す。

なお、oblique タブと試験片の接着は、接着面をサンドペーパーで研磨した後、接着剤（スリーエムジャパン株式会社：DP-410 オフホワイト）を用いて接着させた。また、試験条件は 3.2.1 節の実材料試験と同様、株式会社島津製作所製のサーボパルサにて引張試験を行った。

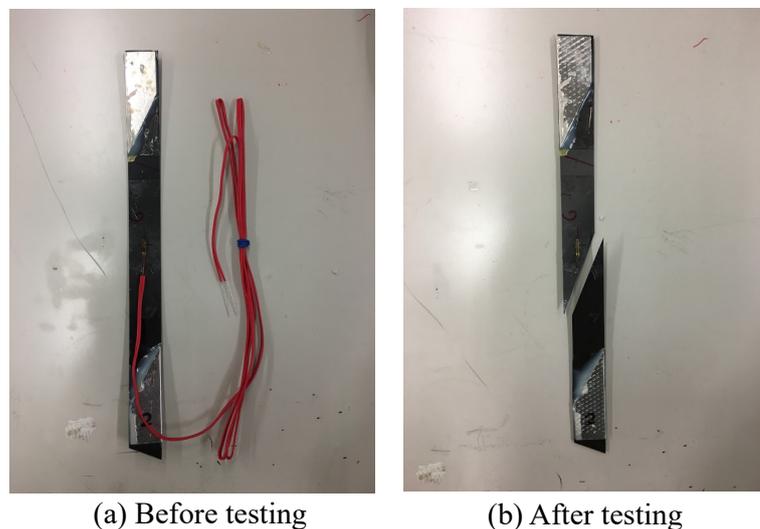


Figure- 3.28 Overview of CFRTP specimen for real material test. Specimen reinforced by fiber oriented to 22.5 degrees is displayed.

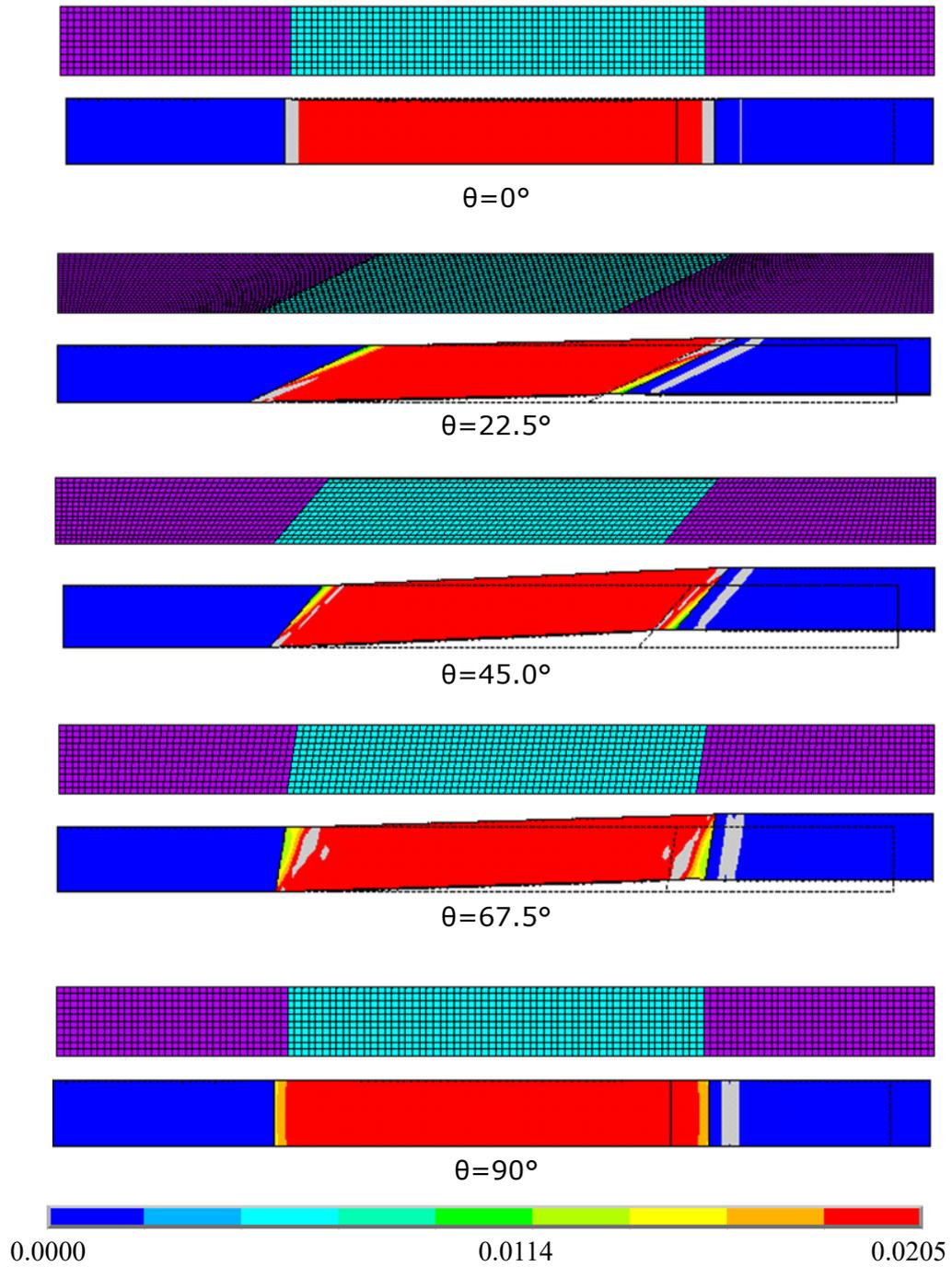
Table- 3.5 Angle of oblique tab for each fiber orientaion.

| Angle of fiber [deg.] | Volume fration of fiber [%] | Angle of oblique tab [deg.] |
|--------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 0 | 67.9 | 0 |
| 22.5 | 64.3 | 25 |
| 45 | 66.7 | 49 |
| 67.5 | 64.3 | 80 |
| 90 | 67.9 | 0 |

3.6.2 仮想材料試験のための解析

前節で述べた oblique タブを用いた材料試験について、HIII の異方性弾塑性および本研究で提案している弾塑性構成則を用いた FEM による再現解析を行う。CFRTP 試験片の FE モデルは均質体とし、いずれの構成則にも、それぞれ前節で同定済みの材料物性値を用いる。なお、平面応力状態を仮定するため試験片モデルは shell 要素によってモデル化する。oblique タブは、アルミニウム合金を想定した弾性率を定義したソリッドモデルで定義し、二つの材料間は節点を共有することによって固着させる。実材料試験に用いた試験片の形状には若干のばらつきがあったが、その FE モデルは平均的な値として幅 15.0 [mm]、板厚 0.60 [mm] の形状に統一する。境界条件は oblique タブの板厚方向に暴露している面上に対して与えた。一端は全変位成分を完全に拘束し、もう一端は長手方向にひずみを負荷するための強制変位を与えた。マクロな応力-ひずみ曲線は、試験片中央の節点解を使って評価する。

Figure-3.29 に、解析結果として得られた相当弾性ひずみ分布を示す。参考までに、変形前の FE モデルも記載する。変形形状は倍率を 5 倍にして表示している。また、全条件でコンターレンジは統一している。グレーはコンターレンジの範囲から逸脱している領域を意味する。0° と 90° 材以外では、材料界面近傍で若干のひずみが集中する傾向がみられるが、試験片中央部は、ほぼ均一なひずみ分布となっていることから単軸引張試験の解析は適切に行われたものと判断される。



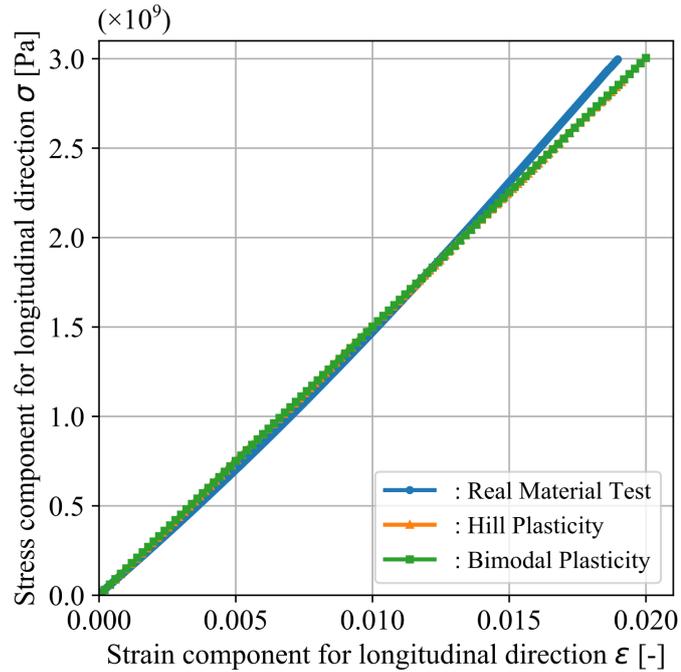
Figure– 3.29 Overview of FE and results for the model simulating real test condition. Contour map is showing the distribution of equivalent total mechanical strain.

3.6.3 実材料試験と解析結果の比較

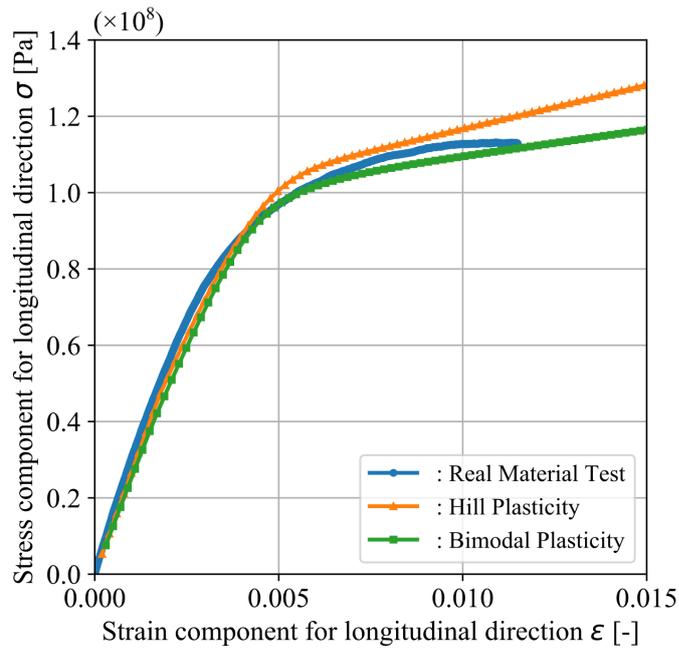
Figure-3.30~3.34 に、実材料試験ならびに実材料試験と同じ条件で行った再現解析、すなわち仮想材料試験の結果をまとめる。0° 方向は繊維の材料物性値が支配的であり、ほぼ弾性的な特性を示すので、非線形材料構成則は解析結果に影響を与えない。これに対して 90° 方向は強い非線形性を持つが、流れベクトルは Hill 構成則と提案した構成則で同じ方向になるため、硬化則に違いはあるものの引張特性だけをみれば両者に大きな違いはない。両者の差異は 2 軸応力場になった際に現れる。いずれの角度のモデルについても、全体的に Hill 構成則の方が若干大きめの応力を示す傾向がある。しかしながら、実測値との比較という観点においては、2 つの構成則間で優劣はつけがたい。これは、前述した応力比を厳密に制御した 2 軸応力場の考察結果とは異なる。すなわち、今回の結果からは、実材料試験が容易な Off-Axis 試験のみでは、CFRTP の弾塑性特性の本質を完全に把握できていない可能性で懸念され、応力比を厳密に制御した数値材料試験を併用して材料挙動を特徴づけることの重要性がうかがえる。なお、45° 材だけは除荷および再負荷の過程も示した。これらの応力-ひずみ曲線では、弾性領域にもかかわらず曲線的で、かつ除荷と再負荷で異なる経路をたどっていることが確認できる。このような特徴は今回構築した弾塑性材料構成則では表現できないため、粘性的挙動が含まれている可能性が示唆される。

また、繊維配向角が 45° よりも大きくなってくると、原点近傍の弾性領域においても、二つの材料構成則と実材料試験の応答に差が生じる結果となった。そして、この誤差は繊維の配向角が 90° に近づくほど大きくなる傾向を持つ。このような結果となった理由には、炭素繊維の半径方向の弾性率が不正確であったことが関係しているものと考えられる。炭素繊維の半径方向の弾性率は計測が困難であり、第 1 章で述べたようにいくつかの研究例はあるものの、研究者によって報告内容にばらつきがあり、確実な値が定まっていない。より厳密に実応答を再現するためには考察を深める必要が

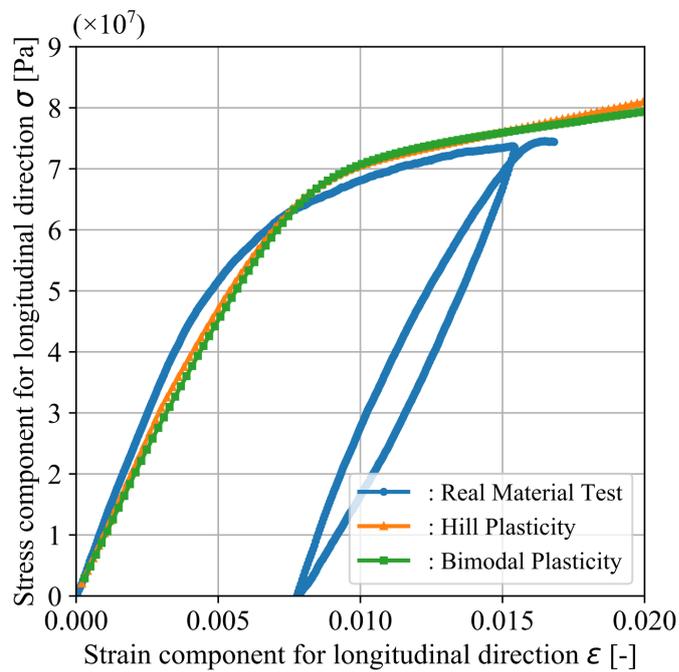
あるが、仮に解析条件を調整して実測結果と合わせこんだとしても、材料物性値が変わるだけで、今回提案した材料構成則の有効性が失われるわけではないと考えられる。そのため、これらの誤差の考察は、本研の目的にとっては重要ではないと考え、これ以上の合わせこみは行わなかった。



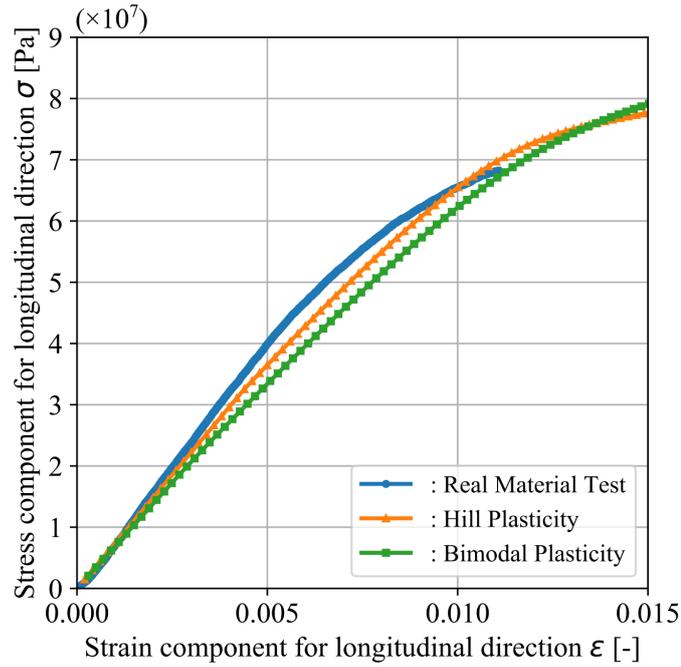
Figure– 3.30 Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 0 degrees.



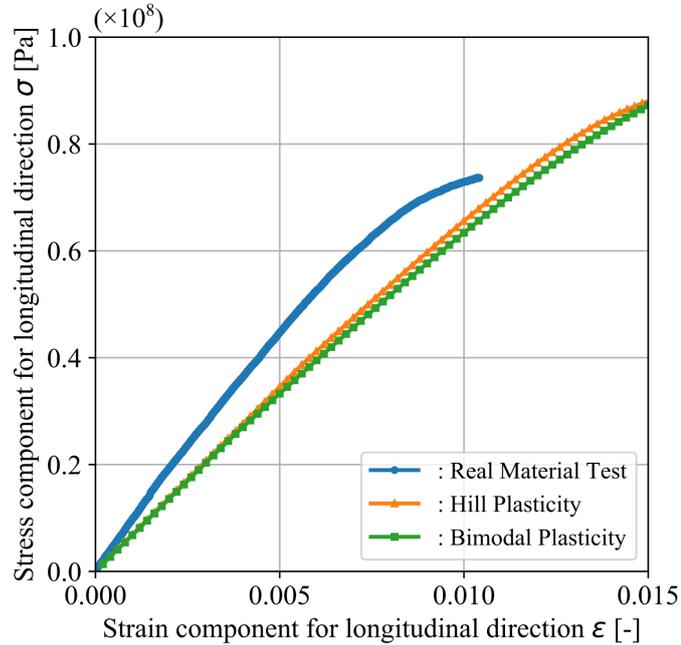
Figure– 3.31 Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 22.5 degrees.



Figure– 3.32 Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 45.0 degrees.



Figure– 3.33 Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 67.5 degrees.



Figure– 3.34 Comparison results between real and virtual tests using CFRTP specimen reinforced 90.0 degrees.

3.7 マルチスケール解析：マクロ解析および局所化解析

ここまで、一方向 CFRTP のミクロモデルを用いた数値材料試験解析によって、異方性の弾塑性材料挙動を詳細に観察するとともに、新しい材料構成則を用いてカーブフィットすることによってその物性値を同定してきた。これらの解析は、実際のものづくりの過程においては材料設計に位置付けられるものである。一方、均質化法に基づくマルチスケール解析一連のフローは、均質化解析に後続するマクロ構造解析や局所化解析、すなわち実製品スケールのモデルを対象とした解析も行うことで完結する。そこで、本節では、均質化解析によって求めた材料物性値を用いたマクロ構造の解析例と、マクロ構造を構成する FE モデルの一要素に着目して、ミクロモデル内部の応力やひずみ分布を観察する局所化の解析例を示す。なお、ここでは汎用 FEM 解析ツールである ANSYS2019R2 を用いて解析を行った。本研究が提案する材料構成則は、ANSYS が提供する材料構成則専用のカスタマイズ機能であるユーザーサブルーチン usermat を用いて実装した。

マクロ構造解析では、Dvorak らが行った実材料試験を模擬する。具体的には、一方向 CFRTP からなる円筒パイプに対して、内圧・ねじり・軸引張を組み合わせることで平面応力場の成分 ($\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$) を個別に制御する。解析モデルの概観と解析条件をまとめたものを Figure-3.35 に示す。FE モデルは、円筒のサーフェースデータを、ANSYS の Mindlin-Reissner のシェル理論^{101,102)}を用いた要素タイプである積層シェル要素 SHELL181 を使ってメッシングすることで作成されている。要素属性として厚さ 0.5 [mm] の単一層を定義し、また厚み方向に 3 つの積分点を定義しそれぞれの積分点に均質化解析で求めた一方向 CFRTP の材料物性値を適用する。繊維は全て長手方向に配向させる。円筒の端部は全ての並進変位成分をゼロ拘束し、もう一方の端部に対して強制変位によってねじりを与える。ここで、モーメントを負荷した荷重制御にすると、計算が不安定で収束性を得ることが難しかったため変位制御とした。さら

に、円筒全面に対して半径方向の圧力荷重も負荷する。これらのねじりと圧力荷重によって、それぞれ面内せん断応力と繊維と直交する垂直応力を独立して与えることができる点がこの試験方法の特徴である。ここでは、二つの応力成分がともに 40 [MPa] となるような荷重を与える。なお、前述した FDM モードの数値材料試験によって繊維方向の荷重は非線形材料挙動にほとんど影響を与えないことがわかったため、ここでは負荷しないこととする。このように、マクロ解析は理想的な 2 軸応力場に近い条件となるため、3.5 節でマイクロモデルに対して実施した MDM モードの数値材料試験と同じ条件が作り出せていることになる。

解析結果として得られた変位分布、円筒の角度方向（繊維と直交する垂直応力）の応力分布、面内せん断応力分布を、それぞれ Figure-3.36, 3.37, 3.38 に示す。変位分布からは、円筒モデルが正確にねじれており、モデルを構成する各要素がせん断変形している様子が確認できる。応力分布については、境界条件を負荷した領域近傍は若干特異な値を持つため、円筒の中心近傍領域だけに着目してコンター図を描画している。繊維直交方向の垂直応力と面内せん断応力のどちらについても、場所によって若干値が異なる様子が見られるが、ほぼ 40 [MPa] の値近傍で分布しており、正常に等 2 軸応力状態が再現できている様子が確認できる。最後に、端部から十分離れたモデル中心近傍の任意の 1 節点に着目して、応力-ひずみ曲線をプロットした結果を Figure-3.39 に示す。同図には、マイクロモデルを用いた数値材料試験で類似のマクロ境界条件を与えた Figure-3.19 の結果も示す。両社はほぼ一致していることから、マクロ材料構成則が正しく実装され適切なマクロ解析が実行出来ているといえる。

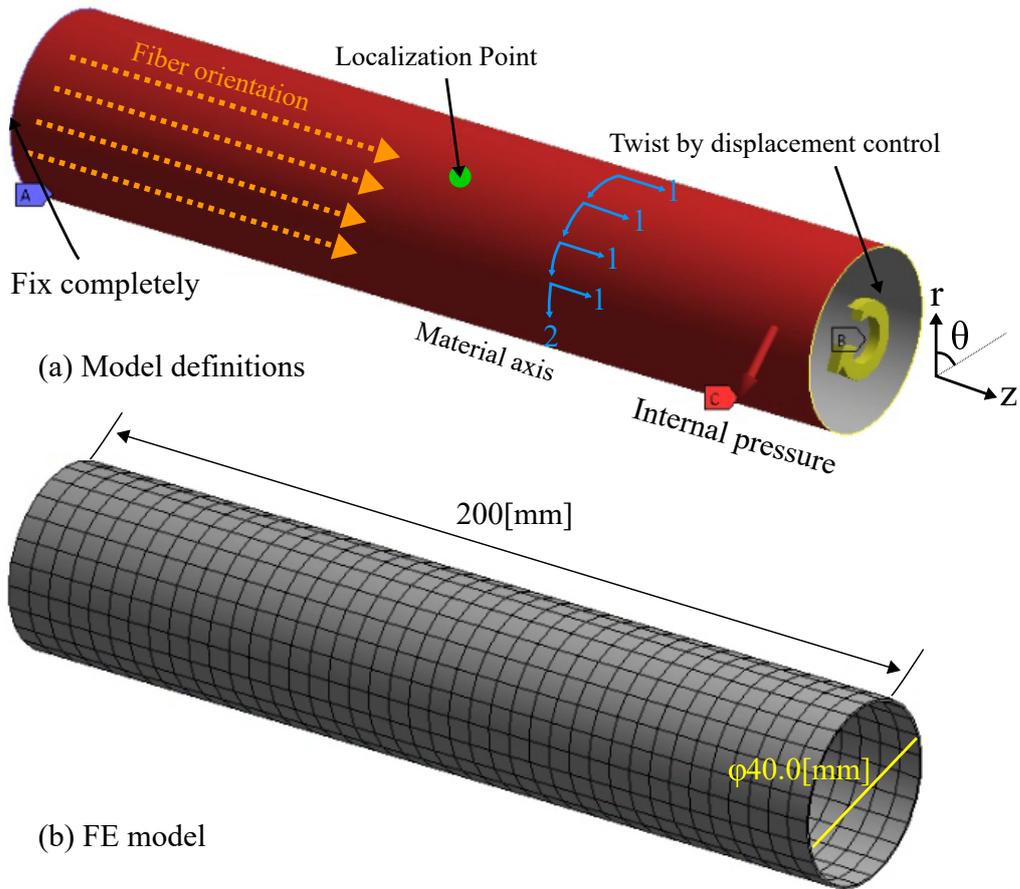


Figure- 3.35 Overview of boundary conditions and FE model for macroscopic analysis.

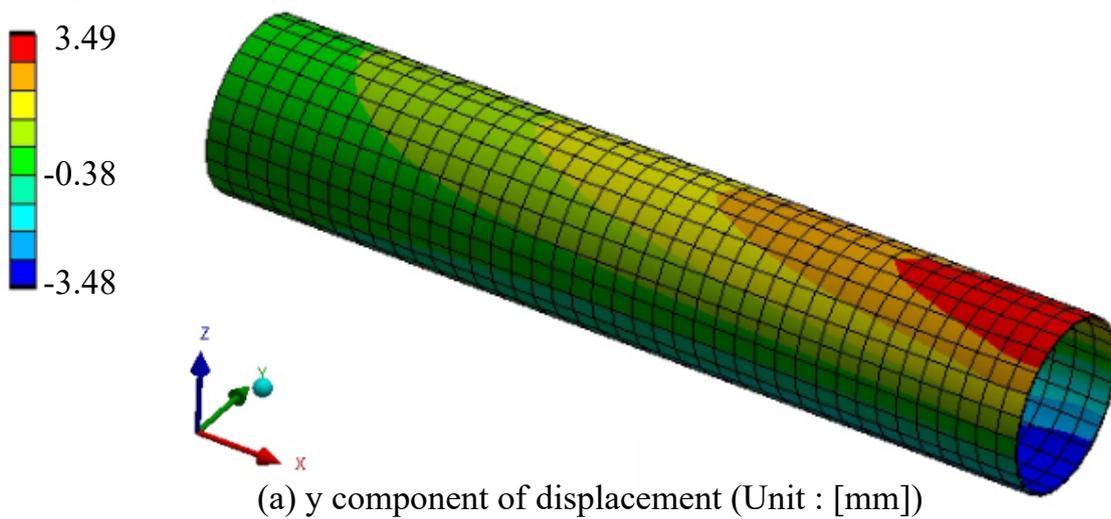
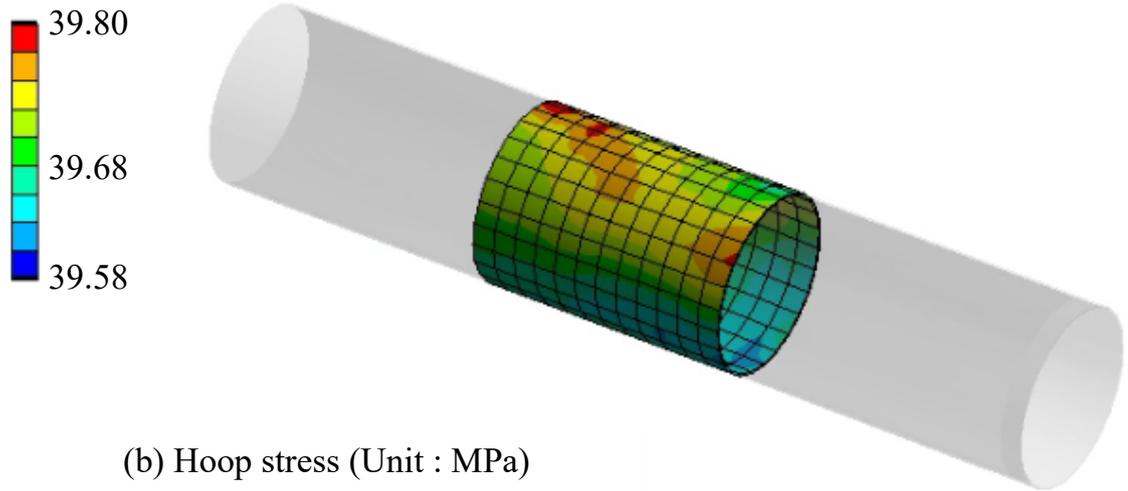
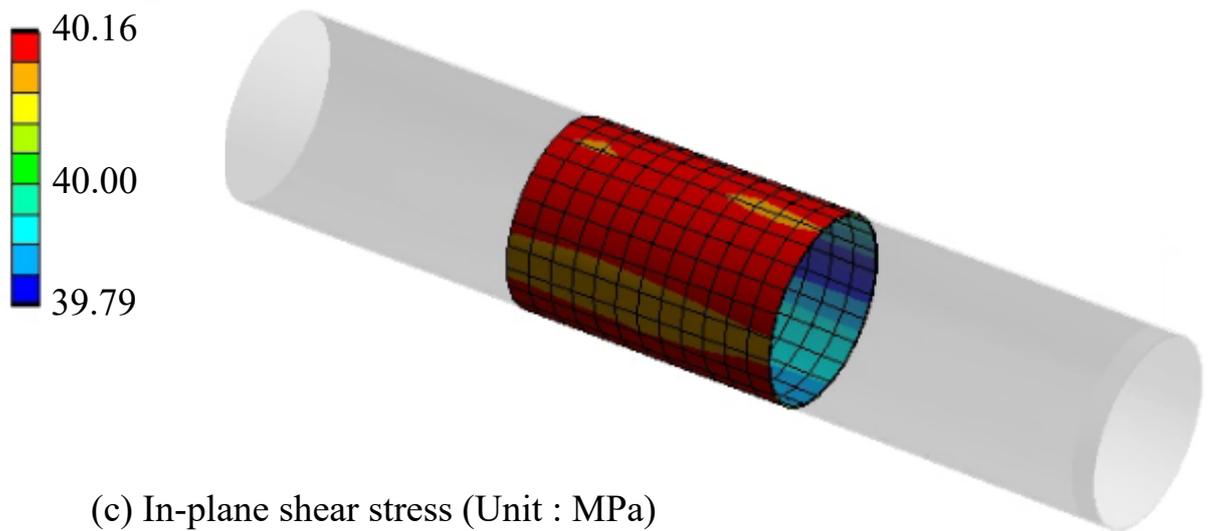


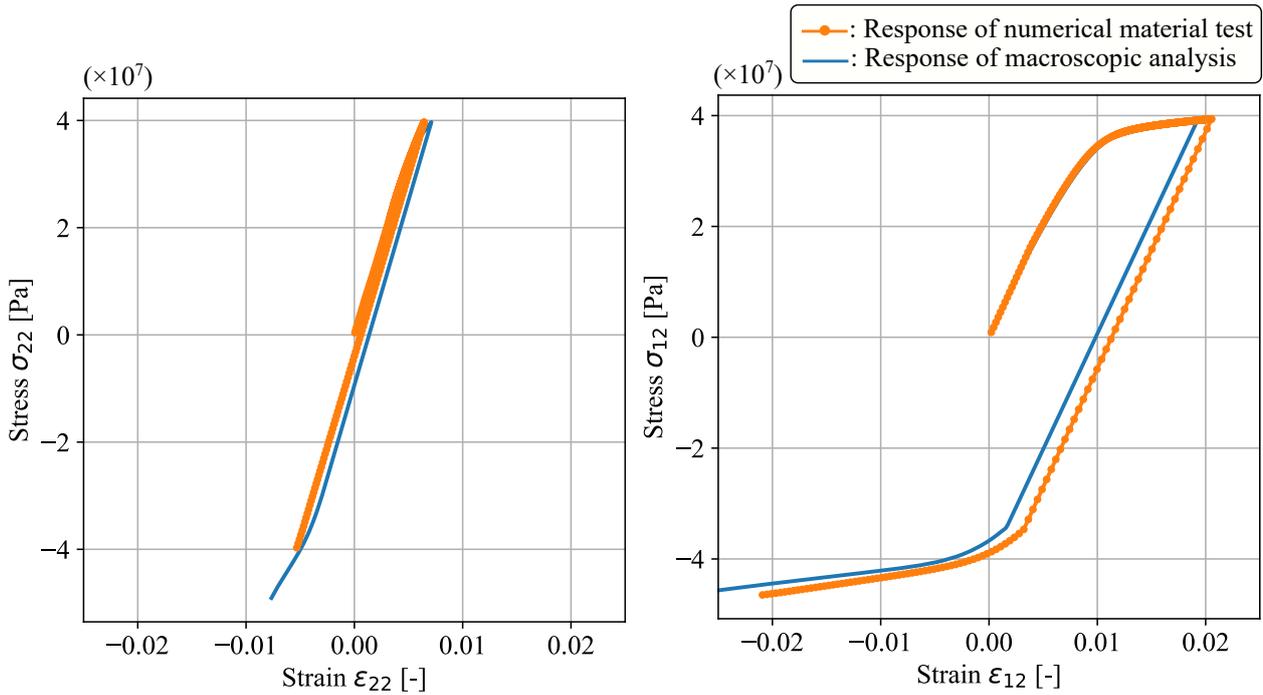
Figure- 3.36 Contour map for y component of displacement as a result of macroscopic analysis.



Figure– 3.37 Contour map for hoop stress as a result of macroscopic analysis.



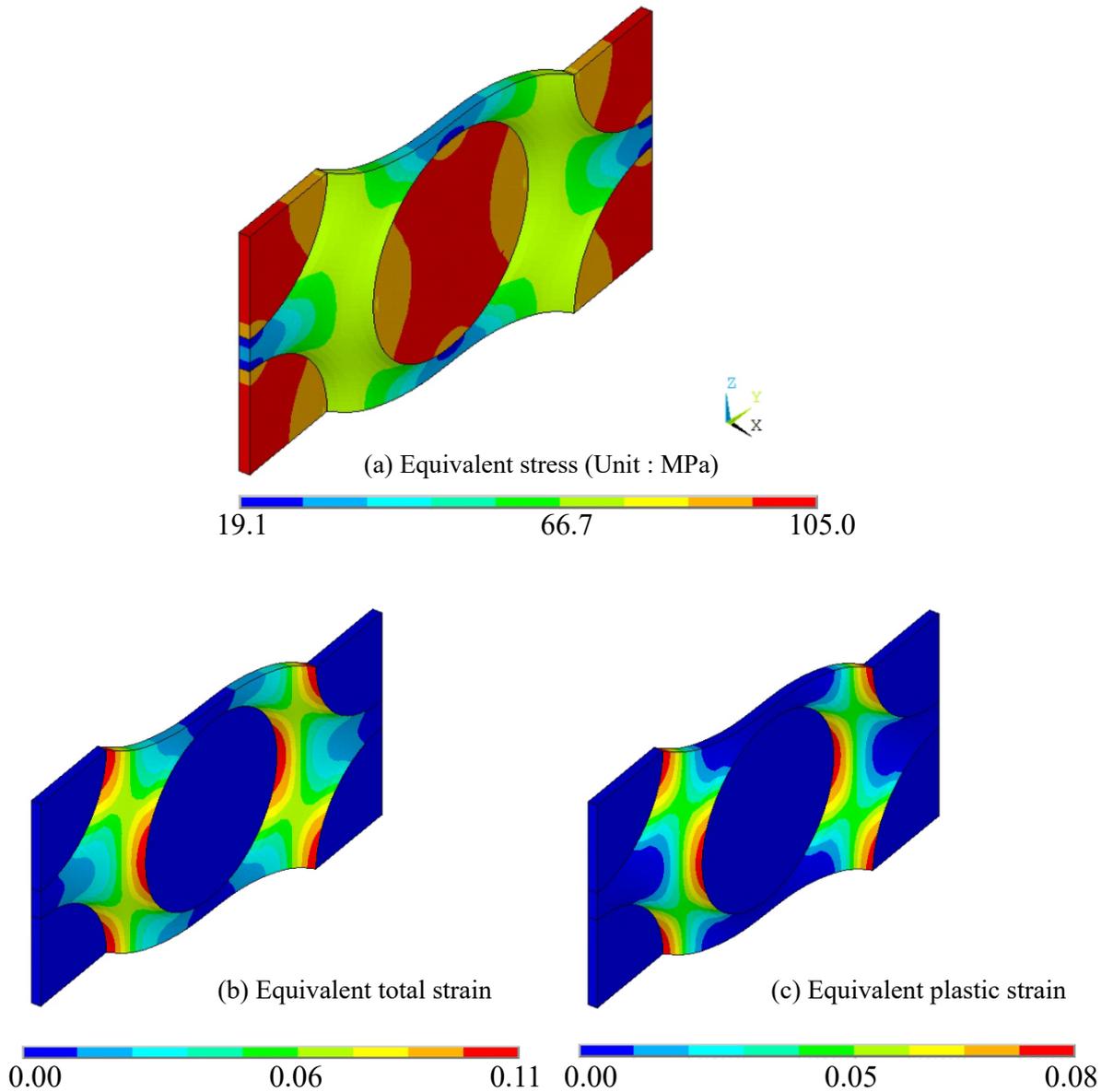
Figure– 3.38 Contour map for in-plane shear stress as a result of macroscopic analysis.



Figure– 3.39 Stress strain curve of 12 and 22 component at around the center of macroscopic model. Material response means the output of virtual material testings which is shown at figure 3.19

次に、マクロ構造の中心領域近傍の任意の1要素に着目し、そこでのマクロひずみ履歴を用いた局所化解析を実施する。解析結果として、von Mises 応力分布と相当塑性ひずみ分布を、Figure–3.40 に示す。繊維方向の荷重のみであれば、混合則により繊維や樹脂の応力値を予測することはできるが、それ以外の変形モードが存在する場合には、この解析例のように局所化解析を実施しなければ詳細に見積もることはできない。一方、同図の (b) や (c) からは、部分的に 10% を超える全ひずみと 8% を超える塑性ひずみが材料界面近傍で局所的に発生している様子がわかる。一方、Figure–3.39 はマクロ解析ではおおよそ 2% 程度しかひずみは発生していないことを示しているので、微視構造内部ではマクロひずみの 4 倍から 5 倍もの大きなひずみが局所的に発生することになる。このように、マクロには小さな負荷であってもマイクロな視点で見ると局所的に大きな応力が発生することになる。このような特徴は、CFRTP のような剛性差が

極めて大きい材料が混合された複合材料では、特に顕著に現れる傾向があるため、設計上は注意が必要であるといえる。提案したマクロ構成則を用れば、CFRTPに対して特徴づけた異方性の弾塑性挙動を正確にマクロ構造へ反映させられるため、このようなマルチスケール解析によって、より詳細な知見に基づいたCFRTPの製品設計が行えるようになる。



Figure– 3.40 Equivalent stress and strain distribution in microstructure as a result of localization analysis focused on around the center of macroscopic model.

3.8 まとめ

本章ではガラス転移点よりも十分に低い温度環境下で弾塑性の特徴のみが顕在化する状況を想定して、CFRTPの非弾性材料挙動の考察を行った。数値材料試験によって硬化前後のマクロ降伏曲面の動きを観察することで、CFRTPの異方硬化挙動を特徴づけた。そして、その結果から異方硬化を考慮したマクロ弾塑性構成則を構築した。同時にマクロ構成則の妥当性や有効性を検証するために、マクロ応力-ひずみ特性のフィッティング精度を確認し、さらに単軸引張の実試験結果とも比較をした。以下に得られた成果をまとめる。

- 1) 炭素繊維で強化していない熱可塑性エポキシ樹脂単体に対して、単軸引張・圧縮の実材料試験を実施した結果、常温環境においては弾塑性的な特徴が支配的であることが分かった。また、引張側と圧縮側では、ほぼ同じ降伏応力を示すことから、樹脂は等方硬化に属する特徴を持つことも確認した。
- 2) 一方向に配向させた炭素繊維で強化された熱可塑性エポキシ樹脂に対して、Dvorakらの提唱する繊維支配モード ($\sigma_{11}-\sigma_{12}$) およびマトリクス支配モード ($\sigma_{22}-\sigma_{12}$) それぞれの応力の組み合わせにて、サイクリック負荷を含めた2軸応力場の数値材料試験を実施した。そこで得られた数値材料試験結果に基づいてみかけの応力-ひずみ曲線、さらに各応力比における降伏点を算出することで降伏曲面も観測した。その結果、初期の降伏曲面はDvorakらの提唱するバイモーダル塑性理論とほぼ同じ形状を持つことを確認した。一方、予荷重を与えた後の降伏曲面は、一般的な移動硬化則や等方硬化則では表現のできない形状となり、しかも予荷重の応力成分に依存した異方硬化挙動を持つことが確認された。この硬化挙動は従来の異方性弾塑性構成則では表現することができないものである。
- 3) バイモーダル塑性理論を拡張する形で、上記の異方硬化挙動を表現するための異

方性弾塑性材料構成則を提案した。降伏曲面の初期形状やその動きを3つの降伏関数および3つの背応力の組み合わせで表現した。そして、各背応力成分を応力状態に応じて個別に発展させることで異方硬化挙動を表現した。これにより数値材料試験で特徴づけた初期の降伏曲面の形状のみならず、硬化後の降伏曲面や応力-ひずみ曲線についても実用上十分な精度でフィッティングさせることができた。このような良好なフィッティング結果は古典的な Hill 構成則では得ることができないことも確認した。

- 4) 一般的に最も容易に試験が実施できる単軸引張モードを使って、繊維配向を荷重軸から傾けた試験片 (Off Axis 材) を用いた実材料試験を実施した。また、材料構成則を使って均質化された FE モデルを用いて、同じ条件を再現した仮想試験解析も行って両者の結果を比較した。材料構成則には、Hill 構成則と本研究で提案する構成則の2つを用いた。まず、構成則の応答は今回検証した繊維配向角の条件においては、2つの構成則の結果に明瞭な差は見られなかった。2軸応力の数値材料試験結果をフィッティングした際に見られた特徴とは異なるものであった。これは Off Axis 材による引張試験のみでは、CFRTP の異方性弾塑性の特徴を完全にはとらえきれておらず、応力比を厳密に制御した数値材料試験の重要性を示唆するものである。一方、実材料試験結果と構成則応答との比較では、繊維配向が 45° よりも荷重軸方向に向いているケースでは、実材料試験と構成則の応答はほぼ一致したが、繊維が荷重軸に対して垂直な方向に近づくほど、結果に差異が見られるようになった。炭素繊維の材料物性値やマイクロモデルの繊維の位置が実際の条件を正確に反映できていなかった可能性が考えられるが、これらは構成則とは切り離して考えるべき問題であり、本研究の主旨とは逸脱するため、詳細な合わせこみなどは行わなかった。

3.1 本研究が提案する異方性の降伏関数および異方硬化の定式化

■ ひずみの加算分解とフックの法則, 降伏関数

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (3.59)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (3.60)$$

$$f^{[i]} = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}}^{[i]} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}^{[i]})} - \sigma_y(\alpha) \quad (3.61)$$

$$[i] = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma_{22} > \beta_{22}^{[1]} \\ 2 & \text{if } \sigma_{22} < \beta_{22}^{[2]} \\ 3 & \text{if } \beta_{22}^{[1]} \geq \sigma_{22} \geq \beta_{22}^{[2]} \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{M}_{\text{BM}}^{[1]} = \mathbf{M}_{\text{BM}}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{\text{BM}}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\sigma_y(\alpha) = \sigma_{y0}^{\text{iso}} + \sigma_y^{\text{iso}'} = \sigma_{y0}^{\text{iso}} + R_0\alpha + R_\infty \{1 - \exp(-b_1\alpha)\} \quad (3.64)$$

$$\boldsymbol{\beta}^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{y0}^{\text{kin}} + a\sigma_y^{\text{iso}'} + \beta_{22}^{[1]} \\ \beta'_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sigma_{y0}^{\text{kin}} - a\sigma_y^{\text{iso}'} + \beta_{22}^{[2]} \\ \beta'_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta'_{12} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

■ 状態変数の発展則

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma}_p \quad (3.66)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma}_p \frac{\partial f^{[i]}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \equiv \dot{\gamma}_p \mathbf{N} \quad (3.67)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = 2\dot{\gamma}_p \quad (3.68)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}^{[i]} = \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(1)[i]} + \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(2)[i]} \quad (3.69)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(1)[i]} = \mathbb{C}_1 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(2)[i]} = \mathbb{C}_2 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - b_2 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \boldsymbol{\beta}^{(2)[i]} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{122} & 0 \\ 0 & 0 & C_{112} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{222} & 0 \\ 0 & 0 & C_{212} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

※ $\boldsymbol{\beta}^{(1)[i]}$, $\boldsymbol{\beta}^{(2)[i]}$ は現在の応力状態が帰属する [i] の成分のみ発展する。

■ Kuhn-Tucker 条件

$$\dot{\gamma}_p \geq 0, \quad f^{[i]} \leq 0, \quad \dot{\gamma}_p f^{[i]} = 0 \quad (3.72)$$

■ 時間離散化アルゴリズム

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e + \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e + \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p \quad (3.73)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p) - \mathbb{C} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p \equiv \boldsymbol{\sigma}^{\text{tri}} - \Delta\gamma_p \mathbb{C} \mathbf{N}_{n+1} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{N}_{n+1} \approx \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} = \frac{2\mathbb{M}_{\text{MB}}^{[i]} : (\boldsymbol{\sigma}^{\text{tri}} - \boldsymbol{\sigma}_n)}{\bar{\sigma}_{\text{BM}}} \quad (3.75)$$

- $f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{tri}}, \boldsymbol{\beta}_n, \alpha_n) \leq 0$ の場合 (=弾性状態)

$$\Delta\gamma_p = 0 \quad (3.76)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{tri}} \quad (3.77)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n, \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]} = \boldsymbol{\beta}_n^{[i]}, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_n^p \quad (3.78)$$

- $f(\boldsymbol{\sigma}^{\text{tri}}, \boldsymbol{\beta}_n, \alpha_n) > 0$ の場合 (=塑性状態)

$$g(\Delta\gamma_p) = f = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}}^{[i]} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]})} = 0 \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_{n+1} &= \boldsymbol{\beta}_n + a\boldsymbol{\sigma}_y^{\text{iso}'}(\Delta\alpha) + \Delta\boldsymbol{\beta}'^{(1)[i]} + \Delta\boldsymbol{\beta}'^{(2)[i]} \\ &= \boldsymbol{\beta}_n + a\boldsymbol{\sigma}_y^{\text{iso}'}(\Delta\alpha) + \mathbb{C}_1 : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p + \mathbb{C}_2 : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^p - b_2\Delta\bar{\epsilon}^p\boldsymbol{\beta}_n'^{(2)[i]} \\ &= \boldsymbol{\beta}_n + a\boldsymbol{\sigma}_y^{\text{iso}'}(\Delta\gamma_p) + \Delta\gamma_p\mathbb{C}_1 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} + \Delta\gamma_p\mathbb{C}_2 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} - 2b_2\Delta\gamma_p\boldsymbol{\beta}_n'^{(2)[i]} \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{tri}} - \Delta\gamma_p\mathbb{C} : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} \quad (3.81)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma_p \quad (3.82)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \Delta\gamma_p\mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} \quad (3.83)$$

$$\Delta\boldsymbol{\beta}'^{(1)[i]} = \Delta\gamma_p\mathbb{C}_1 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} \quad (3.84)$$

$$\Delta\boldsymbol{\beta}'^{(2)[i]} = \Delta\gamma_p\mathbb{C}_2 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} - 2b_2\Delta\gamma_p\boldsymbol{\beta}_n'^{(2)[i]} \quad (3.85)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]} = \boldsymbol{\beta}_n^{[i]} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_y^{\text{iso}'}(\Delta\gamma_p) + \Delta\boldsymbol{\beta}'^{(1)[i]} + \Delta\boldsymbol{\beta}'^{(2)[i]} \quad (3.86)$$

※ $\boldsymbol{\beta}'^{(1)[i]}$, $\boldsymbol{\beta}'^{(2)[i]}$ は現在の応力状態が帰属する [i] の成分のみ発展する。

■ Kuhn-Tucker 条件

$$\Delta\gamma_p \geq 0, f^{[i]} \leq 0, \Delta\gamma_p f^{[i]} = 0 \quad (3.87)$$

第4章 平面応力問題に対応した異方性粘弾性・ 塑性・損傷構成則

前章で用いた熱可塑性エポキシ樹脂では明確に観測ができなかったが、同じ熱可塑性樹脂であっても比較的小さなひずみ状態から、微視的な損傷によりマクロ弾性率が減少する挙動が卓越することがある。このような損傷挙動は、高い剛性や強度が必要とされる構造部材としての用途においては特に重要な特性である。もちろん、損傷挙動を発現しない樹脂を採用できることに越したことはないが、コストや成形性等、製品の品質を左右する機械的特性以外の要因が設計に介在することは多分にあり、やはり様々な材料挙動を考慮して汎用性を高めておくことが肝要と考えられる。そこで本章では、より汎用的な問題に対して、CFRTP製の構造物の設計にFEM解析が適用ができるように、第2章および第3章で提案した粘弾性および弾塑性構成則に損傷の効果を導入した統合的材料構成則を提案する。さらにここでは、CFRTPの実運用上、最も一般的である薄板構造物への適用を想定して、平面応力問題のためのマクロ材料構成則を構築する。

まずはじめに、樹脂単体の材料挙動を対象に、一般的な等方性損傷材料構成則と、それを等方性の粘弾性や弾塑性の構成則と結合した統合材料構成則について概説する。次いで、PC樹脂単体に対して引張除荷の実試験で得られた応力-ひずみ曲線の結果を示す。弾性率の変化に着目し損傷挙動が介在していることを確認し、さらに等方性粘弾性・弾塑性・損傷の統合材料構成則における物性値を同定する。これらの物性値をミ

クロモデルのマトリクスに適用し、第3章と同様の単軸や純せん断のサイクリック荷重、あるいは2軸応力の数値材料試験を実施することで、CFRTPのマクロな異方性粘弾性・塑性・損傷の材料挙動を特徴づける。そして、平面応力状態を想定したマクロ材料構成則を構築し、数値材料試験結果をカーブフィットすることでその材料物性値を同定する。最後に、同定された材料物性値を用いて、CFRTP積層板のマクロ構造解析および局所化解析を実施することで平面応力問題のマルチスケール解析を例示するとともにその有用性について言及する。

4.1 熱可塑性樹脂の等方性損傷材料モデル

材料の損傷は、微視構造内部に発生するクラックやボイドなどによって外力を支えるための断面積が減少によって生じると定義付けられる。この損傷挙動は、原子あるいは分子結合が完全に分断されるため、マクロ的な材料挙動には弾性率の変化として現れることになる。その概念図を Figure-4.1 に示す。ここでは、損傷のない状態の物理量を \bullet と定義しているため、無損傷状態のヤング率と試験片の断面積は \tilde{E} および \tilde{A} である。同図 (b) に示すように、ボイド発生などによって損傷が発生すると微視構造内部でボイドの存在しない領域のヤング率は変わらず \tilde{E} であるが、材料全体の断面積は減少する。したがって、同図 (c) のようにボイドを均質化したマクロ挙動としては、微視構造内部で断面積が減少した分だけ応力は増加する。すなわち応力-ひずみ関係は、無損傷状態の

$$\tilde{\sigma} = \tilde{E}\tilde{\epsilon} \quad (4.1)$$

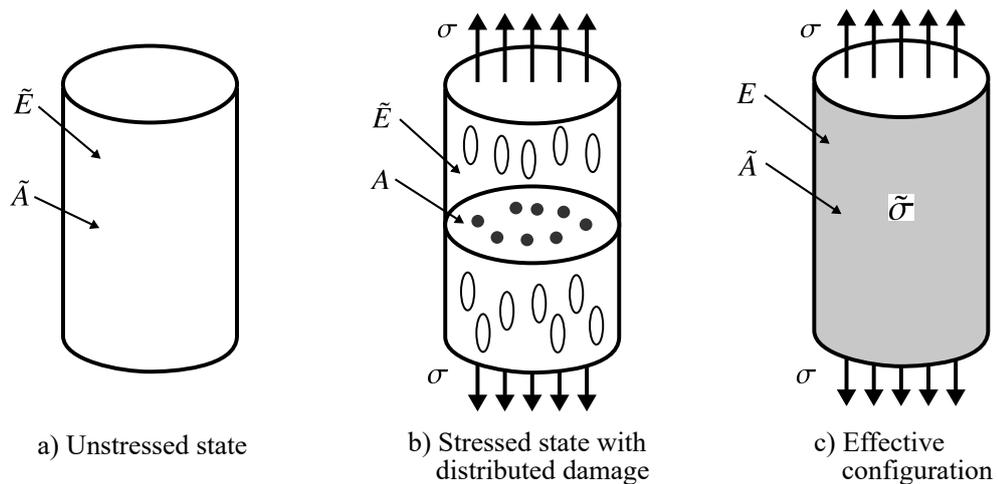
から、損傷の発生によって

$$\sigma = E\epsilon \quad (4.2)$$

へと変化する． E は損傷状態にある材料の等価弾性率を意味しており，損傷の程度を表した量である損傷変数 D を用いて次のように定義される．

$$E = E(D) = (1 - D) \tilde{E} \quad (4.3)$$

ボイド発生をミクروسケール FE モデル内に実際に埋め込んだうえで数値材料試験を実施できれば，原理上は特別な材料構成則を準備することなくマクロな損傷挙動を評価可能であろう．しかしながら，その発生や進展のメカニズムを定式化し，その物性値を同定したうえで数値モデル内に陽に表現することは極めて困難であるため，マクロな材料挙動を表す損傷変数 D を定式化して，実試験で得られる材料応答からその発展則を決定することで間接的に損傷挙動を表現することが現実的である．



Figure– 4.1 Mechanism of damage occurrence in micro scale view point.

これまでに様々な損傷変数の発展則が提案されてきたが，本研究では定式化が簡便でかつ複合材料への適用実績がある Terada ら¹⁰⁰⁾ に利用されている式を参照した．具体的には，3次元応力状態の損傷が材料が経験した最大の相当ひずみ量 $\bar{\epsilon}_{\max}$ に支配されると仮定した次の形式の損傷発展則である．

$$D = d_1 (\bar{\epsilon}_{\max})^{d_2} \quad (4.4)$$

ここで、相当ひずみ $\bar{\epsilon}$ は次式で定義されている。

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.5)$$

このとき、損傷変数 D が 1 を超えないように $\bar{\epsilon}_{\max}$ に上限値を設定する。本研究が提案する材料構成則では、一般化 Maxwell モデルによる粘弾性構成則も組み合わせるため、弾性要素が複数存在する。第二章で行った縦軸シフトの議論と合わせて、損傷発展も純弾性項と Maxwell 項とを分けて以下のように記述することが自然である。

$$D^{\infty} = d_1^{\infty} \bar{\epsilon}_{\max}^{d_2^{\infty}} \quad (4.6)$$

$$D^v = d_1^v \bar{\epsilon}_{\max}^{d_2^v} \quad (4.7)$$

しかしながら、このような設定では物性値同定が困難であったため、一般化 Maxwell モデル内の全弾性要素に関する損傷変数は同一の進展則に従うものと仮定する。また、損傷変数は弾性率 E_{∞} , E_{α} に対してのみ直接的に影響を与えるものとし、ポアソン比は変化しないものと仮定する ($\bar{\nu} = \nu$)。さらに、体積弾性係数とせん断弾性係数は、一般的な等方性弾性体の理論に準ずるものとして次式で定義する。

$$G = \frac{(1-D)\tilde{E}}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{(1-D)\tilde{E}}{3(1-2\nu)} \quad (4.8)$$

4.2 等方性粘弾性・弾塑性・損傷の統合材料構成則

提案する粘弾性・弾塑性・損傷の統合構成則のレオロジーモデルを Figure-4.2 に再掲する。粘弾性要素と塑性要素は直列に接続しているので、全ひずみおよび全偏差ひずみを、それぞれ次式のように粘弾性成分と塑性成分の和として表す。

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{ve} + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (4.9)$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{ve} + \boldsymbol{e}^p$$

一方、応力は両要素とも共通である。ただし、塑性要素は応力に直接寄与しないため、粘弾性要素で計算された応力が塑性要素を駆動する力として伝達される。偏差応力は、第2章で言及した式(2.16)~(2.18)に、塑性ひずみ成分を加えた形で表現ができて次式のようにまとめることができる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(K^\infty + \sum_{\alpha=1}^N K_\alpha^v \right) \epsilon^{\text{vol}} \mathbf{I} + \mathbf{s}_\infty + \sum_{\alpha}^N \mathbf{s}_\alpha \quad (4.10)$$

$$\mathbf{s}_\infty = 2G_\infty \mathbf{e}^{\text{ve}} = 2G_\infty (\mathbf{e} - \mathbf{e}^{\text{p}}) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{s}_\alpha = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_\alpha}\right) \gamma_\alpha \frac{\partial \mathbf{s}_\infty}{\partial s} ds \quad (4.12)$$

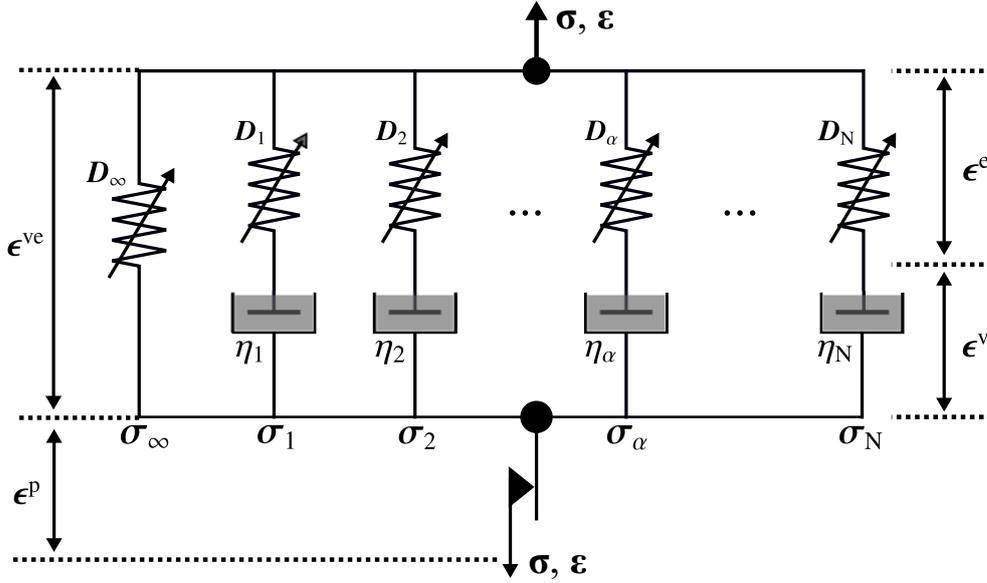
塑性は、一般的なミーゼスの降伏関数に基づいて発生すると考えれば、次式のように表される。

$$f = \sqrt{\left(\mathbf{s}_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}_\alpha \right) : \left(\mathbf{s}_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{s}_\alpha \right)} + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y(\alpha) \quad (4.13)$$

以下では、これらの構成方程式に対して時間方向の離散化を行う。次に、増分形式のひずみの加算分解は

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{ve}} + \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{p}} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1}^{\text{ve}} + \mathbf{e}_{n+1}^{\text{p}} \quad (4.15)$$



Figure– 4.2 Rheology model of anisotropic material constitutive law integrating with viscoelastic, plastic and damage..

である。損傷変数は次式で算定される相当ひずみの式 (4.5) を用いて陽に記述できる。

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{3}{2} \epsilon_{n+1} : \epsilon_{n+1}} \quad (4.16)$$

すなわち、過去に経験した相当ひずみ値よりも大きな場合のみ $\bar{\epsilon}_{\max}$ を更新し、式 (4.6) および式 (4.7) によって損傷変数を計算しなおして、式 (4.8) によって Maxwell 要素を構成する各弾性定数 ($K_\infty, K_\alpha, G_\infty, G_\alpha$) を減ずればよい。

粘弾性要素における応力は次式で算定される。

$$\sigma_{n+1} = \left(K^\infty + \sum_{\alpha=1}^N K_\alpha^v \right) \epsilon_{n+1}^{\text{vol}} \mathbf{I} + s_{n+1}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N s_{n+1}^\alpha \quad (4.17)$$

ここで、偏差成分である第3項と第4項はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} s_{n+1}^\infty &= 2G_\infty (\mathbf{e}_{n+1}^{\text{ve}}) = 2G_\infty (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^{\text{p}}) \\ &= 2G_\infty (\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^{\text{p}}) - 2G_\infty \Delta \mathbf{e}^{\text{p}} \\ &\equiv s_\infty^{\text{tri}} - 2G_\infty \Delta \mathbf{e}^{\text{p}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$s_{n+1}^\alpha = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) s_n^\alpha + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \gamma_\alpha (s_{n+1}^\infty - s_n^\infty) \quad (4.19)$$

塑性に寄与する偏差応力成分としてこれらを足し合わせると、

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{n+1} &= (\mathbf{s}_{\infty}^{\text{tri}} - 2G_{\infty}\Delta\mathbf{e}^p) + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \mathbf{s}_n^{\alpha} + \frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \gamma_{\alpha} (\mathbf{s}_{\infty}^{\text{tri}} - 2G_{\infty}\Delta\mathbf{e}^p - \mathbf{s}_n^{\infty}) \right] \\ &= \mathbf{s}_{\infty}^{\text{tri}} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \gamma_{\alpha} (\mathbf{s}_{\infty}^{\text{tri}} - \mathbf{s}_n^{\infty}) - \left[2G_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N 2G_{\alpha} \frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \right] \Delta\boldsymbol{\epsilon}_p \end{aligned} \quad (4.20)$$

のようになり、塑性乗数に依存する項（第1, 2項）としない項（第3, 4項）に分離することができる。このうち前者が試行応力であり、

$$\mathbf{s}_{n+1}^{\text{tri}} = \mathbf{s}_{\infty}^{\text{tri}} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \gamma_{\alpha} (\mathbf{s}_{\infty}^{\text{tri}} - \mathbf{s}_n^{\infty}) \quad (4.21)$$

のように定義される。したがって、降伏判定は次式により行うことになる。

$$f = \sqrt{\mathbf{s}_{n+1}^{\text{tri}} : \mathbf{s}_{n+1}^{\text{tri}}} - \sigma_y(\alpha_n) \quad (4.22)$$

以上より、降伏判定時のリターンマッピング方程式は

$$g(\Delta\gamma_p) = f = \sqrt{\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}} - \sigma_y(\alpha_{n+1}) = 0 \quad (4.23)$$

に(4.20)式を代入することで得られる。上記の非線形方程式をニュートンラプソン法で解く際に必要となる導関数は次式のようにになる。

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta\gamma_p} = (\mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1})^{-1/2} \frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p} : \mathbf{s}_{n+1} - \frac{\partial \sigma_y(\alpha_{n+1})}{\partial \alpha_{n+1}} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p} \quad (4.24)$$

ここで、本式中の各項は次の通りである。

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p} = - \left[2G_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N 2G_{\alpha} \frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \right] \mathbf{N}_{n+1} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \sigma_y(\alpha_{n+1})}{\partial \alpha_{n+1}} = R_0 + b_1 R_{\infty} \exp(-b_1 \alpha_{n+1}) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (4.27)$$

本節で述べた構成方程式とその増分形式を章末のボックス4.1にもまとめておく。

4.3 ポリカーボネート樹脂の材料特性

4.3.1 実材料試験の条件

熱可塑性樹脂の弾塑性挙動と損傷による弾性率の低下を観察するためのポリカーボネート樹脂の実材料試験では、変位制御によって、所定のひずみ値に達するまで試験片を引張り、その後に荷重値がゼロになるまで除荷を行うプロセスを2回繰り返す引張除荷を負荷条件とした。ここで、一回目と二回目では、それぞれひずみゲージで測定したひずみ値が室温下での単軸引張試験において最大応力が生じたときのひずみ（以下、基準ひずみ）の65%と75%の値になるまで引張り、荷重値がゼロになるまで除荷した。この際、荷重負荷時と荷重除荷時のひずみ速度は 1.25×10^{-4} [-/sec]とした。また、恒温槽内の雰囲気温度は60[°C]とし、恒温槽内に試験片を入れてから30分後に試験を開始した。

試験機には恒温槽付き精密万能試験機（株式会社島津製作所，オートグラフ AG-I）を使用し、試験片はJIS K7161に準拠したダンベル形試験片とした。応力は、試験機に取り付けたロードセルにより測定した荷重値を試験片中央部の断面積で除した値とし、ひずみは試験片中央部に接着したひずみゲージにより測定した。

4.3.2 実材料試験結果とカーブフィッティング結果

負荷除荷試験で得られた試験結果とそのカーブフィット結果を Figure-4.3 に示す。粘弾性の材料物性は第2章において既に確定しているため、ここでは塑性と損傷に係る物性値のみを未知量として、最適化解析によって実験と材料構成則の応答が最小になるように同定した。実測結果を見ると、試験開始直後の接線勾配と比較して、一回目の除荷、二回目の除荷と進むにつれ剛性が単調に減少していることから、損傷挙動の存在が確認できる。そして、フィッティング結果を見ても両方の除荷曲線が非常に

良く再現できている。Terada らによる弾塑性・クリープ・損傷構成則による検証では、除荷時の曲線的な挙動が正確に捉えられていなかった。粘弾性の特徴を取り入れることによって、実試験データの再現能力が高くなったことが示唆される。一方、除荷時とそれに続く負荷時の曲線は異なるヒステリシスを持つ特徴についても、材料構成則でも同じ傾向が再現ができている。とはいえ、負荷時の特性にはまだ誤差が残っている点については課題が残る。とはいえ、今回は除荷時の弾性率低下が表現されていることが重要と考え、次節以降で行う CFRTP の数値材料試験におけるユニットセルモデルに適用する。ここで同定された実際の物性値も Table-4.1 に示しておく。

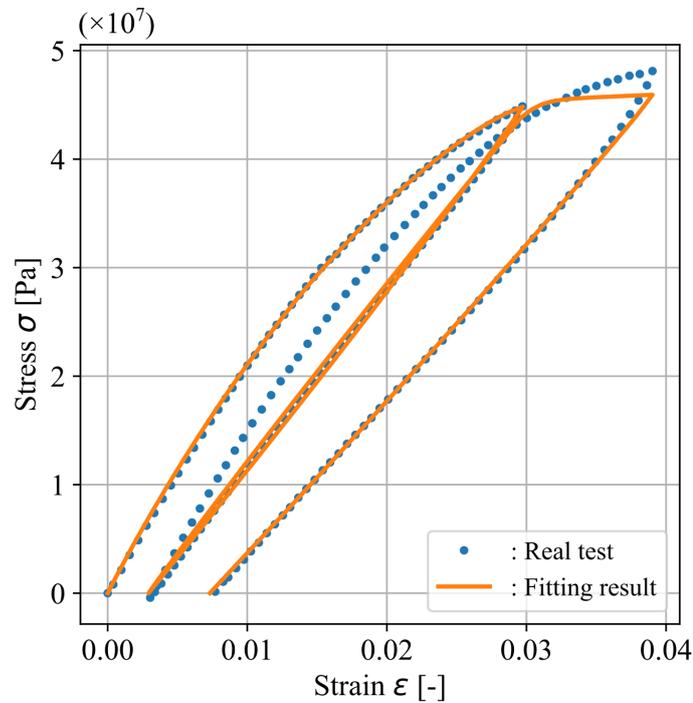


Figure- 4.3 Results of real testing and fitting analysis for polycarbonate resin.

Table– 4.1 Material constants of polycarbonate resin considering damage characteristic as a results of curvefitting analysis.

| Description | Label | Value |
|--------------------------------------|---------------|------------------------------|
| Initial Yield Stress | σ_{y0} | 2.78445×10^7 [Pa] |
| Voce's constant 1 | R_0 | 1.51633×10^8 [Pa] |
| Voce's constant 2 | R_∞ | 1.72298×10^7 [Pa] |
| Voce's constant 3 | b_1 | 3.00000×10^3 [-] |
| Damage's constant 1 of ∞ term | d_1^∞ | 4.58215 [-] |
| Damage's constant 2 of ∞ term | d_2^∞ | 8.24368×10^{-1} [-] |
| Damage's constant 1 of maxwell term | d_1^V | 4.58215 [-] |
| Damage's constant 2 of maxwell term | d_2^V | 8.24368×10^{-1} [-] |
| Maximum damage constant | d_{\max} | 9.00000×10^{-1} [-] |

4.4 異方性の損傷構成則

FRPのマクロ材料挙動を表すことを目的として、異方性に拡張された損傷構成則も様々な研究者によって提案されてきているが、粘弾性において弾性項を行列形式にすることで異方性に拡張したように、損傷についても4.1節にて解説した損傷変数 D を行列形式 D_{ij} に拡張することが自然である。Barberoらは D_{ij} の各成分にそれぞれ独立した発展則を適用する方式を提案しているが、構成則が煩雑となり実用性に乏しいと判断し、ここでも Teradaら¹⁰⁰⁾が採用したアプローチを踏襲する。すなわち、損傷変数は等方性と同様のルールで発展するスカラー値として、方向に応じて異なる重み係数を乗ずることによって損傷発展の異方性を表現する。Teradaらは3次元応力状態を想定しクリープ・弾塑性・損傷を考慮した材料構成則を提案したが、本研究ではこれを平面応力に変更し、またクリープ部を粘弾性に置換する。すなわち、純弾性項と Maxwell

項に対応する損傷変数を Voigt 表記でそれぞれ次式のように定義する.

$$\mathbf{C}_\infty = \begin{bmatrix} (1 - S_1^\infty) D^\infty \tilde{C}_{11}^\infty & (1 - S_4^\infty) D^\infty \tilde{C}_{12}^\infty & 0 \\ (1 - S_4^\infty) D^\infty \tilde{C}_{21}^\infty & (1 - S_2^\infty) D^\infty \tilde{C}_{22}^\infty & 0 \\ 0 & 0 & (1 - S_3^\infty) D^\infty \tilde{C}_{33}^\infty \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{C}_\alpha = \begin{bmatrix} (1 - S_1^v) D^v \tilde{C}_{11}^\alpha & (1 - S_4^v) D^v \tilde{C}_{12}^\alpha & 0 \\ (1 - S_4^v) D^v \tilde{C}_{21}^\alpha & (1 - S_2^v) D^v \tilde{C}_{22}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1 - S_3^v) D^v \tilde{C}_{33}^\alpha \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

ここで, $S_1^\infty \sim S_4^\infty$ および $S_1^v \sim S_4^v$ は材料物性値である.

なお, 本研究で用いる構成則では (4.4) 式や (4.5) 式に示したように, 材料の損傷を相当全ひずみによって表現している. 通常, 非線形有限要素法における収束計算内では, 各要素の積分点から呼び出される材料構成則では応力と接線剛性マトリクスを評価するが, 基本的にはひずみ値は材料構成則内では既知量として取り扱われることが一般的である. しかし, 平面応力問題では, 面外方向のひずみ成分も材料構成則の演算対象となることは Table-3.3 に示した通りである. そのため, 材料構成則の演算開始時では, 全機械ひずみのすべての成分が既知量とはならず, 損傷状態もまた不明である. したがって, 損傷後の弾性マトリクスも 3次元応力状態とは異なって, 既知量のみから陽的に求めることはできない点に注意が必要となる.

4.5 異方性粘弾性・塑性・損傷の統合材料構成則

4.5.1 平面応力状態の粘弾性構成則

本章では, CFRTP から構成されるマクロ構造物は, 最も一般的な利用方法である薄板形状を持つことを想定するため, 平面応力状態のマクロ材料構成則を構築する. そのため, 各非線形挙動を統合するに先立ち, 第2章で構築した 3次元応力状態の粘弾性

構成則を平面応力状態に縮退する．平面応力状態とするために必要な処理は，Maxwell要素を構成する各弾性マトリクスの縮退と，面外方向ひずみ発展（ \approx 板厚変化）のためのアルゴリズム構築である．

4.5.2 弾性マトリクスの縮退

純弾性問題における弾性マトリクスは，3次元問題（ $\mathbf{C}^{[3D]}$ ）と2次元平面応力問題（ $\mathbf{C}^{[2D]}$ ）では，それぞれ

$$\mathbf{C}^{[3D]} = \begin{bmatrix} C_{11}^{[3D]} & C_{12}^{[3D]} & C_{13}^{[3D]} & C_{14}^{[3D]} & C_{15}^{[3D]} & C_{16}^{[3D]} \\ C_{21}^{[3D]} & C_{22}^{[3D]} & C_{23}^{[3D]} & C_{24}^{[3D]} & C_{25}^{[3D]} & C_{26}^{[3D]} \\ C_{31}^{[3D]} & C_{32}^{[3D]} & C_{33}^{[3D]} & C_{34}^{[3D]} & C_{35}^{[3D]} & C_{36}^{[3D]} \\ C_{41}^{[3D]} & C_{42}^{[3D]} & C_{43}^{[3D]} & C_{44}^{[3D]} & C_{45}^{[3D]} & C_{46}^{[3D]} \\ C_{51}^{[3D]} & C_{52}^{[3D]} & C_{53}^{[3D]} & C_{54}^{[3D]} & C_{55}^{[3D]} & C_{56}^{[3D]} \\ C_{61}^{[3D]} & C_{62}^{[3D]} & C_{63}^{[3D]} & C_{64}^{[3D]} & C_{65}^{[3D]} & C_{66}^{[3D]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{[2D]} = \begin{bmatrix} C_{11}^{[2D]} & C_{12}^{[2D]} & C_{13}^{[2D]} \\ C_{21}^{[2D]} & C_{22}^{[2D]} & C_{23}^{[2D]} \\ C_{31}^{[2D]} & C_{32}^{[2D]} & C_{33}^{[2D]} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

と一般化することができる．ここで， $\mathbf{C}^{[2D]}$ の構成要素は，3次元問題における面外方向応力（Voigt表記で第3成分）をゼロと仮定することで $\mathbf{C}^{[3D]}$ から換算ができる．すなわち，3次元ひずみベクトル $\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6\}^T$ を用いて $\mathbf{C}^{[3D]}$ から面外方向応力を求めると，

$$\sigma_3 = C_{3i}\epsilon_i \quad (4.31)$$

であるから，平面応力においては上式の応力をゼロと仮定して，面外方向ひずみを

$$\epsilon_3 = -\frac{C_{31}^{[3D]}\epsilon_1 + C_{32}^{[3D]}\epsilon_2 + C_{34}^{[3D]}\epsilon_4 + C_{35}^{[3D]}\epsilon_5 + C_{36}^{[3D]}\epsilon_6}{C_{33}^{[3D]}} \quad (4.32)$$

と表現できる．平面応力状態では常に上式の関係が成り立つ．このひずみ関係を保持するように単一のひずみ成分のみ単位量を与えることで求められる応力ベクトルは，弾性マトリクスの単位量を与えた成分列と等しくなる．例えば，1方向成分の垂直ひずみ

のみ単位量を与えれば

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{[2D]} \\ C_{21}^{[2D]} \\ 0 \\ C_{31}^{[2D]} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{[3D]} & C_{12}^{[3D]} & C_{13}^{[3D]} & C_{14}^{[3D]} & C_{15}^{[3D]} & C_{16}^{[3D]} \\ C_{21}^{[3D]} & C_{22}^{[3D]} & C_{23}^{[3D]} & C_{24}^{[3D]} & C_{25}^{[3D]} & C_{26}^{[3D]} \\ C_{31}^{[3D]} & C_{32}^{[3D]} & C_{33}^{[3D]} & C_{34}^{[3D]} & C_{35}^{[3D]} & C_{36}^{[3D]} \\ C_{41}^{[3D]} & C_{42}^{[3D]} & C_{43}^{[3D]} & C_{44}^{[3D]} & C_{45}^{[3D]} & C_{46}^{[3D]} \\ C_{51}^{[3D]} & C_{52}^{[3D]} & C_{53}^{[3D]} & C_{54}^{[3D]} & C_{55}^{[3D]} & C_{56}^{[3D]} \\ C_{61}^{[3D]} & C_{62}^{[3D]} & C_{63}^{[3D]} & C_{64}^{[3D]} & C_{65}^{[3D]} & C_{66}^{[3D]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -C_{31}^{[3D]}/C_{33}^{[3D]} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

となるため、 $C^{[2D]}$ の第 1 列は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} C_{11}^{[2D]} &= C_{11}^{[3D]} - \frac{C_{13}^{[3D]}C_{31}^{[3D]}}{C_{33}^{[3D]}} \\ C_{21}^{[2D]} &= C_{21}^{[3D]} - \frac{C_{23}^{[3D]}C_{31}^{[3D]}}{C_{33}^{[3D]}} \\ C_{31}^{[2D]} &= C_{41}^{[3D]} - \frac{C_{43}^{[3D]}C_{31}^{[3D]}}{C_{33}^{[3D]}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

同様に、第 2 列および第 3 列についても 2 方向の垂直単位ひずみ、12 方向のせん断単位ひずみを仮定することでそれぞれ評価することができ、すべての成分をまとめると次のように一般化できる。

$$C_{ij}^{[2D]} = C_{(i+\delta_{i3})(j+\delta_{3j})}^{[3D]} - D_{(i+\delta_{i3})3} \frac{C_{3(j+\delta_{3j})}^{[3D]}}{C_{33}^{[3D]}} \quad (4.35)$$

ところが、一般化 Maxwell モデルに基づく粘弾性構成則においては、上記の換算式を適用することはできない。なぜなら粘弾性構成則の面外方向応力は、並列に接続された各弾性バネの和である

$$\sigma_3 = \sigma_3^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \sigma_3^\alpha = C_{\infty,3i}^{[3D]} \epsilon_i + \sum_{\alpha=1}^N C_{\alpha,3i}^{[3D]} \epsilon_i \quad (4.36)$$

によって計算されるためである。すなわち、あくまで上式右辺の合計値がゼロなのであって、個々の項がゼロになる保証はない。仮に全ての弾性バネにおいて面外方向の

応力をゼロとすれば，並列接続された Maxwell 要素が，それぞれ異なる面外ひずみを持つことを許容してしまうため，レオロジーモデルが破綻してしまう．従って，一般化 Maxwell モデルを用いた粘弾性構成則では，3次元応力状態と平面応力状態の弾性マトリクス間に，(4.35) 式のような相関関係を見出すことはできない．そこで本研究では平面応力状態を想定して面外方向をフリーとした応力緩和試験を別途行って，平面応力状態における弾性マトリクス $C_{\infty}^{[2D]}$ および $C_{\alpha}^{[2D]}$ を個別に評価した．なお，次節以降では，平面応力場の弾性マトリクスには添え字 [2D] を付けずに記述することにする．

4.5.3 面外方向のひずみの発展

前述したように，平面応力状態では面外方向成分のひずみ量を材料構成則の中で計算する必要がある．この面外方向のひずみ成分 ϵ_{33} は，3次元応力状態の仮定から σ_{33} がゼロとなるように求めればよい．ただし，この際の一般化 Maxwell モデルにおいて並置された各要素のひずみ値はどれも同一とする条件を満足するために，各要素の面外成分応力をゼロとすることはできず，あくまでトータルの応力を使って評価する．これを定式化するにあたり，以下では Voigt 表記を用いることとする．

本研究で対象としている一方向強化材は，繊維が配向している方向に材料主軸を取れば，直交異方性の特徴から逸脱することはない．すなわち，せん断成分と垂直成分がカップリングすることはなく，せん断ひずみ成分は面外ひずみに影響を与えない．したがって，本節では便宜上ひずみと応力の Voigt 表記は，せん断成分を除外して次のように定義する．

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

そして、未知変数である面外方向のひずみ増分 ($\Delta\epsilon_{33}$) と分離し、任意イタレーション $n+1$ における離散化されたひずみベクトルの形で書き直すと次式のようになる。

$$\boldsymbol{\epsilon}^{n+1} = \begin{Bmatrix} \epsilon_1^{n+1} \\ \epsilon_2^{n+1} \\ \epsilon_3^n + \Delta\epsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

以下、面外方向のひずみに関する議論においては、便宜上 Voigt 表記に統一していくこととする。

一方、粘弾性材料モデルの 3 次元応力状態における応力ベクトルと面外応力成分を以下に再掲する。

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\alpha \quad (4.39)$$

$$\sigma_{n+1,3} = \sigma_{n+1,3}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \sigma_{n+1,3}^\alpha \quad (4.40)$$

このうちの純弾性項の応力テンソルと面外方向の応力は、それぞれ

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\infty = \mathbf{C}_\infty \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \mathbf{C}_\infty (\boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\epsilon}) \quad (4.41)$$

$$\sigma_{n+1,3}^\infty = \sum_{i=1}^3 C_{3i}^\infty \epsilon_{n+1,i} = \sum_{i=1}^3 C_{3i}^\infty (\epsilon_{n,i} + \Delta\epsilon_i) \quad (4.42)$$

である。そして、Maxwell 要素における応力についても同様にまとめると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\alpha &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \boldsymbol{\sigma}_n^\alpha + \frac{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)}{\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}} \boldsymbol{\gamma}_\alpha (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\infty - \boldsymbol{\sigma}_n^\infty) \\ &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \boldsymbol{\sigma}_n^\alpha + \frac{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)}{\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}} \boldsymbol{\gamma}_\alpha (\mathbf{C}_\infty \Delta\boldsymbol{\epsilon}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\therefore \sigma_{n+1,3}^\alpha = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \sigma_{n,3}^\alpha + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{3i}^\alpha (C_{ij}^\infty \Delta\epsilon_j) \quad (4.44)$$

これら各応力項(4.42)および(4.44)を(4.40)に代入すると、Maxwellモデル全体の面外方向応力は次式のようにまとめられる。

$$\sigma_{n+1,3} = \sum_{i=1}^3 C_{3i}^{\infty} (\epsilon_{n,i} + \Delta\epsilon_i) + \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \sigma_{n,3}^{\alpha} + \frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{3i}^{\alpha} C_{ij}^{\infty} \Delta\epsilon_j \right\} \quad (4.45)$$

平面応力状態においては $\sigma_3^{n+1} = 0$ であることを念頭に、面外方向ひずみ増分 ($\Delta\epsilon_3$) で分離して上式の純弾性項と Maxwell 項をそれぞれ整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \{C_{3i}^{\infty} (\epsilon_{n,i} + \Delta\epsilon_i)\} &= C_{31}^{\infty} \epsilon_{n+1,1} + C_{32}^{\infty} \epsilon_{n+1,2} + C_{33}^{\infty} (\epsilon_{n,3} + \Delta\epsilon_3) \\ &= \sum_{i=1}^2 (C_{3i}^{\infty} \epsilon_{n+1,i}) + C_{33}^{\infty} \epsilon_{n,3} + C_{33}^{\infty} \Delta\epsilon_3 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\gamma_{3i}^{\alpha} C_{ij}^{\infty} \Delta\epsilon_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (\gamma_{3i}^{\alpha} C_{ij}^{\infty} \Delta\epsilon_j) + \sum_{i=1}^3 (\gamma_{3i}^{\alpha} C_{i3}^{\infty}) \Delta\epsilon_3 \quad (4.47)$$

したがって、面外方向ひずみは以下の形に帰着する。

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_3 = & \\ & \frac{\sum_{i=1}^2 C_{3i}^{\infty} \epsilon_{n+1,i} + C_{33}^{\infty} \epsilon_{n,3} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \sigma_{n,3}^{\alpha} + \frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (\gamma_{3i}^{\alpha} C_{ij}^{\infty} \Delta\epsilon_j) \right]}{C_{33}^{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 (\gamma_{3i}^{\alpha} C_{i3}^{\infty}) \right]} \end{aligned} \quad (4.48)$$

4.5.4 応力発展式

ここでは、4.1節と4.2節で与えた粘弾性・塑性・損傷構成則を平面応力の異方性構成則に拡張した定式化を行う。基本的な流れは、材料定数がスカラー表現から Voigt 表記での行列表現に変わることで、応力やひずみを偏差成分と体積成分に分離しないことだけである。そのため、そのような等方性の考察内容をほぼ踏襲して展開できる内容については、詳細を割愛して結論のみ記述することとする。

採用しているレオロジーモデルでは、応力は異方性一般化 Maxwell モデルより次式のように決定される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_\alpha \quad (4.49)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\sigma}_\infty = \mathbb{C}_\infty : \boldsymbol{\epsilon}^{\text{ve}} = \mathbb{C}_\infty : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{\text{p}}) \quad (4.50)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_\alpha}\right) \boldsymbol{\gamma}_\alpha : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\infty}{\partial s} ds \quad (4.51)$$

である。これらを時間離散化して表記すると

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\alpha \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\infty &= \mathbb{C}_\infty : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^{\text{p}}) - \mathbb{C}_\infty : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{\text{p}} \\ &\equiv \boldsymbol{\sigma}_\infty^{\text{tri}} - \Delta \gamma_{\text{p}} \mathbb{C}_\infty : \boldsymbol{N}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\alpha = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)\right\} \boldsymbol{\gamma}_\alpha : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^\infty - \boldsymbol{\sigma}_n^\infty) \quad (4.54)$$

であるため、全応力は試行成分と修正成分に分解ができて次式のようなになる。

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tri}} - \Delta \gamma_{\text{p}} \left[\mathbb{I}_{\text{s}} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)\right\} \boldsymbol{\gamma}_\alpha \right] : \mathbb{C}_\infty : \boldsymbol{N}_{n+1} \quad (4.55)$$

$$\therefore \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tri}} = \boldsymbol{\sigma}_\infty^{\text{tri}} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \boldsymbol{\sigma}_n^\alpha + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right)\right\} \boldsymbol{\gamma}_\alpha : (\boldsymbol{\sigma}_\infty^{\text{tri}} - \boldsymbol{\sigma}_n^\infty) \right] \quad (4.56)$$

4.5.5 面内塑性変形のリターンマッピング方程式

まずはじめに、試行応力の式 (4.56) を用いて降伏関数による塑性判定を行い、降伏している場合にはリターンマッピング方程式によって塑性増分を計算するとともに本来の応力を求める。降伏判定式は次式のようなになる。

$$f_{n+1}^{[i], \text{tri}} = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tri}} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}}^{[i]} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{tri}} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]})} - \sigma_{\text{y}}^{\text{iso}}(\alpha_{n+1}^{\text{tri}}) \quad (4.57)$$

そして、塑性ひずみ増分 $\Delta\epsilon^p$ が計算できたら、(4.55)式によって本来の応力テンソルを評価する。

一方、リターンマッピング方程式 ($g(\Delta\gamma^p)$) は式(4.55)および式(4.56)に示した塑性増分を仮定した応力を上式の試行応力と置換することで求められる。すなわち、

$$g_p(\Delta\gamma^p, \Delta\epsilon_3^{ve}) = f_{n+1}^{[i]} = \sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}}^{[i]} : (\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}^{[i]})} - \sigma_y^{\text{iso}}(\alpha_{n+1}) = 0 \quad (4.58)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tri}} - \Delta\gamma_p \left[\mathbb{I}_s + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \gamma_\alpha \right] : \mathbb{C}_\infty : \mathbf{N}_{n+1} \quad (4.59)$$

$$\beta_{n+1}^{[i]} = \beta_n^{[i]} + (a\sigma_y^{\text{iso}'} + \mathbb{C}_1 : \Delta\epsilon^p + \mathbb{C}_2 : \Delta\epsilon^p - b_2\Delta\bar{\epsilon}^p\beta_n^{(2)}) \quad (4.60)$$

$$= \beta_n^{[i]} + (a\sigma_y^{\text{iso}'} + \Delta\gamma_p\mathbb{C}_1 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} + \Delta\gamma_p\mathbb{C}_2 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} - b_2\Delta\bar{\epsilon}^p\beta_n^{(2)}) \quad (4.61)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma_p \quad (4.62)$$

である。 $\Delta\epsilon_3^{ve}$ は面外方向ひずみの粘弾性成分であり、次節に述べるもう一つのリターンマッピング方程式によって算定される。このように平面応力状態において、相当ひずみ依存する損傷を用いると、リターンマッピング方程式は二つの未知変数を有することになる。式中には明示的に記述されていないが、弾性マトリクスが $\Delta\epsilon_3^{ve}$ にも依存する量となっていることに注意されたい。

4.5.6 面外ひずみ成分のリターンマッピング

4.5.3項で述べた、面外方向の応力が発生しないような条件について、塑性ひずみ分も考慮して探索すれば良い。すなわち、(4.45)式のひずみ成分に塑性ひずみの存在を考慮して考える。そのためには、同式のトータル機械ひずみを粘弾性項のひずみ成分 (ϵ^{ve}) に置換すれば良く

$$g_d(\Delta\gamma_p, \Delta\epsilon_3^{ve}) = \sigma_{n+1,3} = \sum_{i=1}^3 (C_{\infty 3i}^{[3D]} \epsilon_{n+1,i}^{ve[3D]}) + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \sigma_{n,3}^\alpha + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{\alpha 3i}^{[3D]} C_{\infty ij}^{[3D]} \Delta\epsilon_j^{ve[3D]} \right] = 0 \quad (4.63)$$

が解くべきリターンマッピング方程式となる。繰り返しになるが、剛性に関する項 $C_{\infty}, \gamma_{\alpha}$ は未知量である面外方向ひずみ，言い換えると塑性定数 $\Delta\gamma_p$ や面外粘性ひずみ $\Delta\epsilon_3^{ve}$ に依存する関数である。

ここで，ひずみベクトルの3つの垂直成分について，未知量である面外方向ひずみ増分 ($\Delta\epsilon_3$) を明示的に分離して表すと次式のようなになる。

$$\epsilon_{n+1}^{ve[3D]} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{n+1,1}^{ve} \\ \epsilon_{n+1,2}^{ve} \\ \epsilon_{n+1,3}^{ve} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{n+1,1}^{ve} \\ \epsilon_{n+1,2}^{ve} \\ \epsilon_{n,3}^{ve} + \Delta\epsilon_3^{ve} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{n+1,1} - \epsilon_{n+1,1}^p \\ \epsilon_{n+1,2} - \epsilon_{n+1,2}^p \\ \epsilon_{n,3} - \epsilon_{n,3}^p + \Delta\epsilon_3^{ve} \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

$$\Delta\epsilon_{ve}^{[3D]} = \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_1^{ve} \\ \Delta\epsilon_2^{ve} \\ \Delta\epsilon_3^{ve} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_1 - \Delta\epsilon_1^p \\ \Delta\epsilon_2 - \Delta\epsilon_2^p \\ \Delta\epsilon_3 - \Delta\epsilon_3^p \end{Bmatrix} \quad (4.65)$$

ここで，面外方向の塑性ひずみ成分 ($\Delta\epsilon_3^p$) は，3.4.4 節で考察結果を利用して評価する。すなわち，塑性ひずみには非圧縮性条件が成り立つものとし，さらに繊維方向には塑性しないレベルのマクロひずみを想定しているので，

$$\Delta\epsilon_3^p = -\Delta\epsilon_2^p \quad (4.66)$$

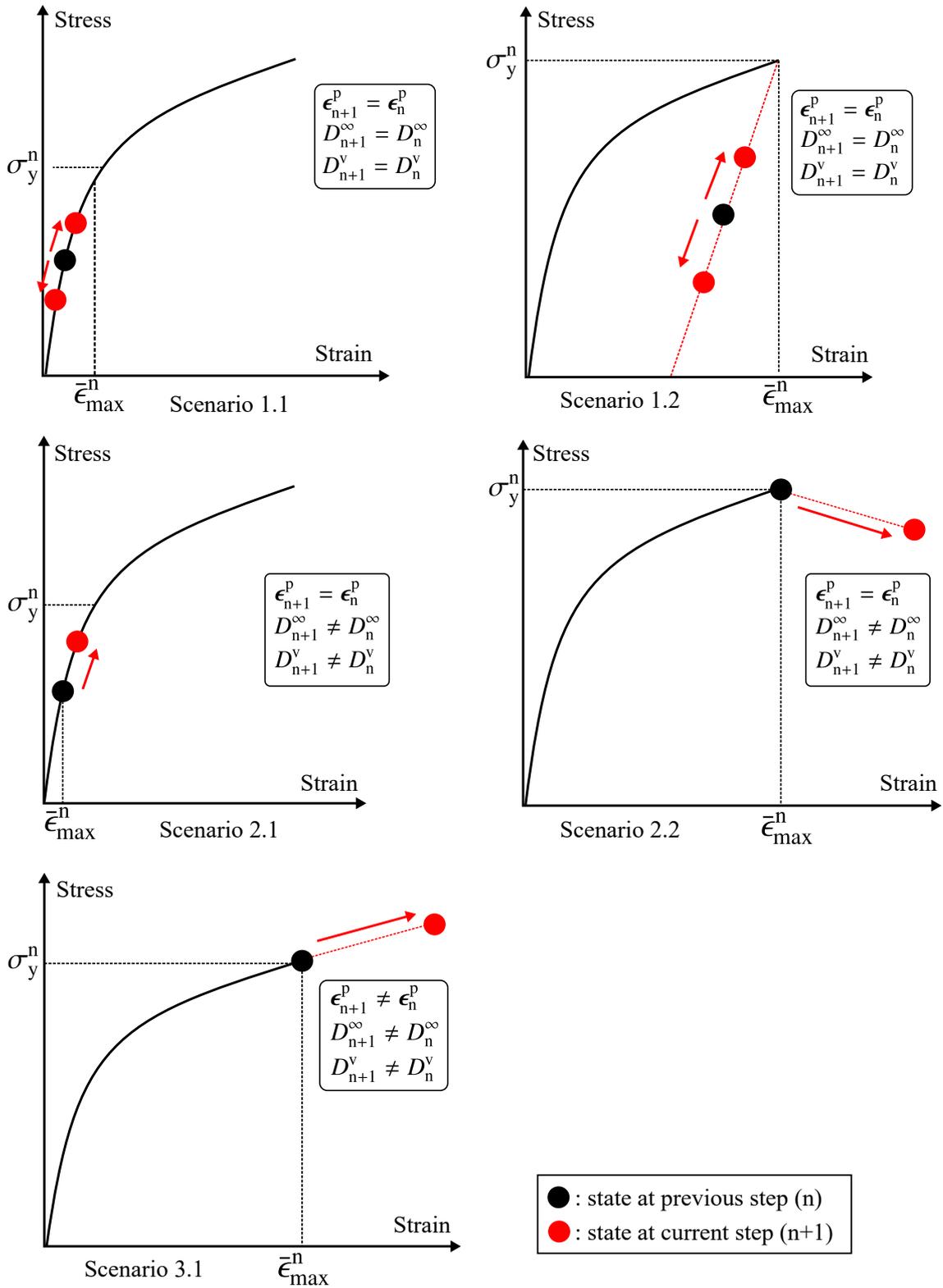
である。したがって，面外方向のトータル機械ひずみは次式に帰着する。

$$\Delta\epsilon_3 = \Delta\epsilon_3^{ve} + \Delta\epsilon_3^p = \Delta\epsilon_3^{ve} - \Delta\epsilon_2^p \quad (4.67)$$

4.5.7 リターンマッピング方程式の解

4.5.5 項と 4.5.6 項で述べてきたように，本材料構成則には面外方向の粘性ひずみ増分 $\Delta\epsilon_3^{ve}$ と $\Delta\gamma_p$ の二つの未知数が存在する。既往の弾塑性材料構成則の時間離散化と同様に，まずはじめに塑性ひずみの進展がないものと仮定した試行状態を考え，塑性や損傷の

発生有無を判定しながら計算を進めていく。損傷と塑性が混在する場合は、Figure-4.4に示すような3つのケースに対して、状態変数の発展を評価する必要がある。



Figure– 4.4 Five types of scenario which drive plastic and damage development. Plastic strain does not develop without damage.

<ケース1: 損傷も塑性も発展しない状態 ($\bar{\epsilon}_{n+1} \leq \bar{\epsilon}_{\max}$ and $f(\sigma_{n+1}^{\text{tri}}) \leq 0$) >

塑性を経験していない材料において、経験済みの最大相当ひずみ以下の範囲内に応力がおさまっている状況、あるいは塑性変形を受けて硬化した状態の材料に対して弾性の範囲内で荷重が負荷あるいは除荷された状況に対応する。(Figure-4.4の1.1あるいは1.2)。このとき、弾性マトリクスには損傷発展に伴う変化はないため、式(4.63)のリターンマッピング方程式は $\Delta\epsilon_3^{\text{ve}}$ に対する線形方程式となり、

$$\Delta\epsilon_3^{\text{ve}} = \frac{\sum_{i=1}^2 C_{3i}^{\infty} \epsilon_{n+1,i}^{\text{ve}} + C_{33}^{\infty} \epsilon_{n,3}^{\text{ve}} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \sigma_{n,3}^{\alpha} + \frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (\gamma_{3i}^{\alpha} C_{ij}^{\infty} \Delta\epsilon_j^{\text{ve}}) \right]}{C_{33}^{\infty} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 (\gamma_{3i}^{\alpha} C_{i3}^{\infty}) \right]} \quad (4.68)$$

$$\therefore \Delta\epsilon_3 = \Delta\epsilon_3^{\text{ve}} + \Delta\epsilon_3^{\text{p}} = \Delta\epsilon_3^{\text{ve}} - \Delta\epsilon_1^{\text{p}} - \Delta\epsilon_2^{\text{p}} \quad (4.69)$$

のように直接的に厳密解が得られる。対応する状態変数は以下のとおりである。

$$\epsilon_{n+1,3} = \epsilon_{n,3} + \Delta\epsilon_3^{\text{ve}} \quad (4.70)$$

$$D_{n+1}^{\infty} = D_n^{\infty} \quad (4.71)$$

$$D_{n+1}^{\text{v}} = D_n^{\text{v}} \quad (4.72)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tri}} \quad (4.73)$$

厳密に言えば、面外ひずみ増分を求めなければ損傷の進展有無は判定ができないため、まずはじめに進展がないことを仮定して、(4.68)および(4.69)を解き、その結果を用いて再度相当ひずみを計算する。そして、最大ひずみを超えていた場合には次に示すケース2の計算を行う。

<ケース2: 損傷のみ発展して塑性は発展しない状態 ($\bar{\epsilon}_{n+1}^{\text{tri}} > \bar{\epsilon}_{\text{max}}$ and $f(\sigma_{n+1}^{\text{tri}}) \leq 0$) >

このケースは、塑性を経験していない材料が弾性範囲内で荷重増加を受けた場合、あるいは降伏点を越えた変形を受けたが、損傷によって応力が降伏点より低い値まで低下した状況に対応する (Figure-4.4 の 2.1 もしくは 2.2)。後者は、微視構造内部で材料界面が剥離した場合などの大きな損傷形態に起因する。このような場合は、損傷のみが進展することになる。リターンマッピング方程式 (4.63) は非線形となるため、ニュートンラプソン法による数値的に求解することになる。そしてその漸化式は、次式のようなになる。

$$\Delta \epsilon_{33}^{\text{ve},(k+1)} = \Delta \epsilon_{33}^{\text{ve},(k)} - \frac{\partial g_d(\Delta \epsilon_{33}^{\text{ve},(k)})}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{\text{ve}}} g_d(\Delta \epsilon_{33}^{\text{ve},(k)}) \quad (4.74)$$

上式を構成している導関数について以下に示す。これ以降、式展開の便宜上、テンソル形式で記載することにする。また、本構成則では平面応力状態を仮定しているため、面外せん断応力を計算上考慮する必要はないが、総和規約に則った式展開をするためにあえて考慮して表記する。例えば、3次元のひずみテンソルおよびその増分を未知量である面外ひずみを用いて表現すると

$$\epsilon_{n+1}^{\text{ve}[3D]} = \begin{pmatrix} \epsilon_{n+1,11} - \epsilon_{n,11}^{\text{p}} \\ \epsilon_{n+1,22} - \epsilon_{n,22}^{\text{p}} \\ \epsilon_{n,33}^{\text{ve}} + \Delta \epsilon_{33}^{\text{ve}} \\ \epsilon_{n+1,12} - \epsilon_{n,12}^{\text{p}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta \epsilon_{\text{ve}}^{\text{ve}[3D]} = \begin{pmatrix} \Delta \epsilon_{11} \\ \Delta \epsilon_{22} \\ \Delta \epsilon_{33}^{\text{ve}} \\ \Delta \epsilon_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

である。したがって、その導関数は

$$\frac{\partial \epsilon_{n+1}^{\text{ve}[3D]}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{\text{ve}}} = \frac{\partial \Delta \epsilon_{\text{ve}}^{\text{ve}[3D]}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{\text{ve}}} = \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^{\text{T}} \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{n+1}^{\text{ve}}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{\text{ve}}} = \frac{\partial \Delta \epsilon_{\text{ve}}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{\text{ve}}} = \{0 \ 0 \ 0\} \quad (4.77)$$

となる。リターンマッピング方程式の導関数の導出に先立ち、これらを構成する4つの導関数

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}, \quad \frac{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}, \quad \frac{\partial \mathbf{C}_{\infty}^{[3D]'}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}, \quad \frac{\partial \mathbf{C}_{\alpha}^{[3D]'}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \quad (4.78)$$

についてまとめる。なお、弾性マトリクスの導関数は純弾性項と Maxwell 項で同じであるため、一般形という意味で添え字*を付して表す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}) \mathbf{1} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve} + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p) \mathbf{1} \right\} \\ &= \underbrace{\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}}_{\text{equ.(4.77)}} - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\underbrace{\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}}_{\text{equ.(4.77)}} \right) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \left(\frac{2}{3} \mathbf{e}_{n+1} : \mathbf{e}_{n+1} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{e}_{n+1} : \mathbf{e}_{n+1}}} \frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \left(\frac{2}{3} \mathbf{e}_{n+1} : \mathbf{e}_{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{e}_{n+1} : \mathbf{e}_{n+1}}} \mathbf{e}_{n+1} : \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}}_{\text{equ.(4.79)}} \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}'_*}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \left(1 - s_{ijkl} D_{n+1}^* \right) \mathbf{C}'_{ijkl*} \\ &= - \frac{\partial D_{n+1}^*}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} s_{ijkl} \mathbf{C}'_{ijkl*} \\ &= - \frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \left(d_1^* \bar{\epsilon}_{n+1}^{d_2^*} \right) s_{ijkl} \mathbf{C}'_{ijkl*} \\ &= - d_1^* d_2^* \bar{\epsilon}_{n+1}^{d_2^*} \underbrace{\frac{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}}_{\text{equ.(4.80)}} s_{ijkl} \mathbf{C}'_{ijkl*} \quad (\text{no sum}) \end{aligned} \quad (4.81)$$

これらを踏まえて、実際にリターンマッピング方程式(4.63)の導関数を求めると次の

ようになる.

$$\frac{\partial g_d}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}} \mathbf{C}'_{\infty 33} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{ve}}_A + \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha 33} : \mathbf{C}'_{\infty} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve}}_B \right] \quad (4.82)$$

ここで、A項とB項を個別に式展開していく、まずA項については

$$A = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}'_{\infty 33}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{ve}}_{\text{equ.(4.81)}} + \mathbf{C}'_{\infty 33} : \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{ve}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}}_{\text{equ.(4.77)}} \quad (4.83)$$

である。一方、B項は

$$\begin{aligned} B &= \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha 33}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \mathbf{C}'_{\infty} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve} + \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha 33} \frac{\partial \mathbf{C}'_{\infty}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve} + \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha 33} : \mathbf{C}'_{\infty} : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{C}'_{\alpha 33}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \mathbf{C}'_{\infty}{}^{-1} + \mathbf{C}_{\alpha 33} : \frac{\partial \mathbf{C}'_{\infty}{}^{-1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \right) : \mathbf{C}'_{\infty}{}^{-1} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve} + \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha 33} \frac{\partial \mathbf{C}'_{\infty}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve} + \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha 33} : \mathbf{C}'_{\infty} : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \\ &= \left(\underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}'_{\alpha 33}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \mathbf{C}'_{\infty}{}^{-1} + \mathbf{C}_{\alpha 33} : \mathbf{C}'_{\infty}{}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{C}'_{\infty}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \mathbf{C}'_{\infty}{}^{-1}}_{\text{equ.(4.81)}} \right) : \mathbf{C}'_{\infty} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve} \\ &\quad + \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha 33} : \underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}'_{\infty}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve}}_{\text{equ.(4.81)}} + \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha 33} : \mathbf{C}'_{\infty} : \underbrace{\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{ve}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}}_{\text{equ.(4.81)}} \end{aligned} \quad (4.84)$$

とまとめられる。その他の状態変数については、次のように更新する。

$$\boldsymbol{\epsilon}_3^{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_3^n + \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{33}^{ve} \quad (4.85)$$

$$D_{n+1}^{\infty} = d_1^{\infty} (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1})^{d_2^{\infty}} \quad (4.86)$$

$$D_{n+1}^v = d_1^v (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1})^{d_2^v} \quad (4.87)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\infty, \text{tri}} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \boldsymbol{\sigma}_n^{\alpha} + \frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \boldsymbol{\gamma}_{\alpha} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\infty, \text{tri}} - \boldsymbol{\sigma}_n^{\infty}) \right] \quad (4.88)$$

$$(\because \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\infty, \text{tri}} = \mathbf{C}_{\infty} : (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_n^p))$$

＜ケース3：損傷，塑性ともに発展する状態（ $\bar{\epsilon}_{n+1}^{\text{tri}} > \bar{\epsilon}_{\text{max}}$ and $f(\sigma_{n+1}^{\text{tri}}) > 0$ ）

このケースは，塑性を受けて硬化した状態の材料が，これまでに経験した最大相当ひずみを超える変形を受けている状況に対応する．例えば，CFRTPを構成する樹脂のみが損傷を受けて剛性低下する状況が考えられる．この場合，面外粘性ひずみ増分と塑性定数の2つを修正する必要がある．すなわち，式(4.58)と式(4.63)からなる次の2元連立非線形方程式に帰着し，以下のニュートンラプソン法における変数の更新式により反復計算で求解すればよい．

$$\begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_3^{\text{ve},(k+1)} \\ \Delta\gamma_p^{(k+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_3^{\text{ve},(k)} \\ \Delta\gamma_p^{(k)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial g_d(\Delta\epsilon_3^{\text{ve},(k)}, \Delta\gamma_p^{(k)})}{\partial \Delta\epsilon_3^{\text{ve}}} & \frac{\partial g_d(\Delta\epsilon_3^{\text{ve},(k)}, \Delta\gamma_p^{(k)})}{\partial \gamma_p} \\ \frac{\partial g_p(\Delta\epsilon_3^{\text{ve},(k)}, \Delta\gamma_p^{(k)})}{\partial \Delta\epsilon_3^{\text{ve}}} & \frac{\partial g_p(\Delta\epsilon_3^{\text{ve},(k)}, \Delta\gamma_p^{(k)})}{\partial \gamma_p} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_d(\Delta\epsilon_3^{\text{ve},(k)}, \Delta\gamma_p^{(k)}) \\ g_p(\Delta\epsilon_3^{\text{ve},(k)}, \Delta\gamma_p^{(k)}) \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

右辺の2行2列の行列はヤコビマトリクスであり，各リターンマッピング方程式の導関数から構成される．11成分はケース2で示した(4.82)-(4.84)式であるから，その他の要素の具体的な形を12成分，21成分，22成分の順にテンソル形式にて示していくが，各成分の具体的な形式の中で

$$\frac{\partial \Delta\epsilon_{\text{ve}}}{\partial \Delta\gamma_p}, \frac{\partial \Delta\epsilon_p}{\partial \Delta\gamma_p}, \frac{\partial \sigma_y^{\text{iso}}}{\partial \Delta\epsilon_{33}^{\text{ve}}}, \frac{\partial \sigma_y^{\text{iso}}}{\partial \Delta\gamma_p}, \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta\epsilon_{33}^{\text{ve}}}, \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p}, \frac{\partial \beta_{n+1}^{[i]}}{\partial \Delta\epsilon_{33}^{\text{ve}}}, \frac{\partial \beta_{n+1}^{[i]}}{\partial \Delta\gamma_p}, \frac{\partial C'_\infty}{\partial \Delta\gamma_p}, \frac{\partial C'_\alpha}{\partial \Delta\gamma_p} \quad (4.90)$$

らが共通する導関数として表れるため，予め式をまとめておく．

[ひずみ増分テンソルの導関数]

$$\Delta\epsilon_{ve}^{[3D]} = \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{11} - \Delta\epsilon_{11}^p \\ \Delta\epsilon_{22} - \Delta\epsilon_{22}^p \\ \Delta\epsilon_{33}^{ve}\Delta\epsilon_{12} - \Delta\epsilon_{12}^p \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{11} - \Delta\gamma_p N_{n+1,11}^{tri} \\ \Delta\epsilon_{22} - \Delta\gamma_p N_{n+1,22}^{tri} \\ \Delta\epsilon_{33}^{ve} \\ \Delta\epsilon_{12} - \Delta\gamma_p N_{n+1,12}^{tri} \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

$$\therefore \frac{\partial \Delta\epsilon_{ve}^{[3D]}}{\partial \Delta\gamma_p} = \{-N_{n+1,11}^{tri} \quad -N_{n+1,22}^{tri} \quad 0.0 \quad -N_{n+1,12}^{tri} \quad 0.0 \quad 0.0\}^T \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \Delta\epsilon_{ve}}{\partial \Delta\gamma_p} = \{-N_{n+1,11}^{tri} \quad -N_{n+1,22}^{tri} \quad -N_{n+1,12}^{tri}\}^T \quad (4.93)$$

$$\Delta\epsilon_p^{[3D]} = \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{11}^p \\ \Delta\epsilon_{22}^p \\ -\Delta\epsilon_{11}^p - \Delta\epsilon_{22}^p \\ \Delta\epsilon_{12}^p \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\gamma_p N_{n+1,11}^{tri} \\ \Delta\gamma_p N_{n+1,22}^{tri} \\ -\Delta\gamma_p N_{n+1,11}^{tri} - \Delta\gamma_p N_{n+1,22}^{tri} \\ \Delta\gamma_p N_{n+1,12}^{tri} \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

$$\therefore \frac{\partial \Delta\epsilon_p^{[3D]}}{\partial \Delta\gamma_p} = \{N_{n+1,11}^{tri} \quad N_{n+1,22}^{tri} \quad -N_{n+1,11}^{tri} - N_{n+1,22}^{tri} \quad N_{n+1,12}^{tri} \quad 0.0 \quad 0.0\}^T \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial \Delta\epsilon_p}{\partial \Delta\gamma_p} = \{N_{n+1,11}^{tri} \quad N_{n+1,22}^{tri} \quad N_{n+1,12}^{tri}\}^T \quad (4.96)$$

[等方硬化関数の導関数]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y^{iso}}{\partial \Delta\gamma_p} &= \frac{\partial \sigma_y^{iso}}{\partial \alpha_{n+1}} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \Delta\gamma_p} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{n+1}} \left\{ \sigma_{y0} + R_0 \alpha_{n+1} + R_\infty (1 - \exp(-b_1 \alpha_{n+1})) \right\} \frac{\partial}{\partial \Delta\gamma_p} (\alpha_n + \Delta\gamma_p) \\ &= R_0 - R_\infty b_1 \exp(-b_1 \alpha_{n+1}) \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial \sigma_y^{iso}}{\partial \Delta\epsilon_{33}^{ve}} = 0.0 \quad (4.98)$$

[損傷弾性マトリクスの導関数]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{C}'_*}{\partial \Delta \gamma_p} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \gamma_p} \left(1 - s_{ijkl} D_{n+1}^* \right) C_{*ijkl} \\
&= - \frac{\partial}{\partial \Delta \gamma_p} \left(d_1^* \bar{\epsilon}_{n+1}^{d_2^*} \right) s_{ijkl} C_{*ijkl} \\
&= - d_1^* d_2^* \bar{\epsilon}_{n+1}^{d_2^*} \frac{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}}{\partial \Delta \gamma_p} s_{ijkl} C_{*ijkl} \quad (\text{no sum})
\end{aligned} \tag{4.99}$$

ケース2の場合と同様に、損傷弾性マトリクスは純弾性項と Maxwell 項とで式の形は同じなので添え字*を付すことで一般化した。なお、上式を構成する相当ひずみの導関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\epsilon}_{n+1}}{\partial \Delta \gamma_p} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \gamma_p} \left\{ \epsilon_n + \Delta \epsilon_{ve} + \Delta \epsilon_p - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\epsilon_n + \Delta \epsilon_{ve} + \Delta \epsilon_p \right) \mathbf{1} \right\} \\
&= \underbrace{\frac{\partial \Delta \epsilon_p}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{Eqn.(4.95)}} - \frac{1}{3} \text{tr} \underbrace{\frac{\partial \Delta \epsilon_p}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{Eqn.(4.95)}} \mathbf{1}
\end{aligned} \tag{4.100}$$

[応力テンソルの導関数]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \left(\mathbf{C}'_\infty : \epsilon_{n+1}^{ve} \right) + \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{\Delta t}{\tau_\alpha} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \left(\gamma'_\alpha : \mathbf{C}'_\infty : \Delta \epsilon_{33}^{ve} \right) \right] \\
&= \underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}'_\infty}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \epsilon_{n+1}^{ve}}_{\text{equ.(4.81)}} + \mathbf{C}'_\infty : \underbrace{\frac{\partial \epsilon_{n+1}^{ve}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}}_{\text{equ.(4.77)}} + \sum_{\alpha} \left[\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{\Delta t}{\tau_\alpha} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. \left(\underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}'_\alpha}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \mathbf{C}'_\infty^{-1} + \mathbf{C}'_\alpha : \mathbf{C}'_\infty^{-1} : \frac{\partial \mathbf{C}'_\infty}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \mathbf{C}'_\infty^{-1}}_{\text{equ.(4.81)}} : \mathbf{C}'_\infty : \Delta \epsilon_{ve} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \gamma'_\alpha : \underbrace{\frac{\partial \mathbf{C}'_\infty}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} : \Delta \epsilon_{ve}}_{\text{equ.(4.81)}} + \gamma'_\alpha : \mathbf{C}'_\infty : \underbrace{\frac{\partial \Delta \epsilon_{ve}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}}_{\text{equ.(4.77)}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta \gamma_p} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \gamma_p} (\mathbb{C}'_{\infty} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{ve}}) + \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \frac{\partial}{\partial \Delta \gamma_p} (\boldsymbol{\gamma}'_{\alpha} : \mathbb{C}'_{\infty} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{33}^{\text{ve}}) \right] \\
&= \underbrace{\frac{\partial \mathbb{C}'_{\infty}}{\partial \Delta \gamma_p} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{ve}}}_{\text{equ.(4.99)}} + \mathbb{C}'_{\infty} : \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{ve}}}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{equ.(4.99)}} + \sum_{\alpha} \left[\frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \right. \\
&\quad \left. \left(\underbrace{\frac{\partial \mathbb{C}'_{\alpha}}{\partial \Delta \gamma_p} : \mathbb{C}'_{\infty}^{-1} + \mathbb{C}'_{\alpha} : \mathbb{C}'_{\infty}^{-1} : \frac{\partial \mathbb{C}'_{\infty}}{\partial \Delta \gamma_p} : \mathbb{C}'_{\infty}^{-1}}_{\text{equ.(4.99)}} : \mathbb{C}'_{\infty} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{\text{ve}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha} : \underbrace{\frac{\partial \mathbb{C}'_{\infty}}{\partial \Delta \gamma_p} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{\text{ve}}}_{\text{equ.(4.99)}} + \boldsymbol{\gamma}'_{\alpha} : \mathbb{C}'_{\infty} : \underbrace{\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{\text{ve}}}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{equ.(4.93)}} \right] \quad (4.102)
\end{aligned}$$

[背応力テンソルの導関数]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}}{\partial \Delta \gamma_p} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \gamma_p} (\boldsymbol{\beta}_n^{[i]} + a \boldsymbol{\sigma}_y^{\text{iso}[i]} + \mathbb{C}_1 : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p + \mathbb{C}_2 : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p - b \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p \boldsymbol{\beta}_n^{(2)[i]}) \\
&= a \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_y^{\text{iso}'}}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{equ.(4.97)}} + \mathbb{C}_1 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} + \mathbb{C}_2 : \mathbf{N}_{n+1}^{\text{tri}} - b \boldsymbol{\beta}_n^{(2)[i]} \quad (4.103)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}}{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{33}^{\text{ve}}} = 0 \quad (4.104)$$

ここで、ケース2の式展開とほぼ同じ過程を辿るものについては導出過程の詳細を省いた。以上より、各構成要素を用いて大元の式(4.89)のヤコビマトリクスを構成する12成分、21成分および22成分を求めると次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_d}{\partial \Delta \gamma_p} &= \frac{\partial}{\partial \Delta \gamma_p} (\mathbb{C}_{\infty 33}^{[3D]'} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{ve}[3D]}) + \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \frac{\partial}{\partial \Delta \gamma_p} (\boldsymbol{\gamma}_{\alpha 33}^{[3D]'} : \mathbb{C}_{\infty}^{[3D]'} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{\text{ve}[3D]}) \right] \\
&= \underbrace{\frac{\partial \mathbb{C}_{\infty 33}^{[3D]'}}{\partial \Delta \gamma_p} : \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{ve}[3D]}}_{\text{equ.(4.99)}} + \mathbb{C}_{\infty 33}^{[3D]'} : \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{\text{ve}[3D]}}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{equ.(4.92)}} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\tau_{\alpha}}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_{\alpha}}\right) \right\} \right. \\
&\quad \left. \left(\underbrace{\frac{\partial \mathbb{C}_{\alpha}^{[3D]'}}{\partial \Delta \gamma_p} : \mathbb{C}_{\infty}^{[3D]'} + \mathbb{C}_{\alpha}^{[3D]'} : \mathbb{C}_{\infty}^{[3D]'} : \frac{\partial \mathbb{C}_{\infty}^{[3D]'}}{\partial \Delta \gamma_p} : \mathbb{C}_{\infty}^{[3D]'} : \mathbb{C}_{\infty}^{[3D]'} : \mathbb{C}_{\infty}^{[3D]'} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{\text{ve}}^{[3D]}}_{\text{equ.(4.99)}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \boldsymbol{\gamma}_{\alpha}^{[3D]'} : \underbrace{\frac{\partial \mathbb{C}_{\infty}^{[3D]'}}{\partial \Delta \gamma_p} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{\text{ve}[3D]}}_{\text{equ.(4.99)}} + \boldsymbol{\gamma}_{\alpha}^{[3D]'} : \mathbb{C}_{\infty}^{[3D]'} : \underbrace{\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{\text{ve}}^{[3D]}}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{equ.(4.92)}} \right] \quad (4.105)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_p}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} &= \frac{(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) : \mathbb{M}_{BM} : \frac{\partial}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} (\sigma_{n+1} - \beta_{n+1})}{\sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) : \mathbb{M}_{BM} : (\sigma_{n+1} - \beta_{n+1})}} - \frac{\partial \sigma_y^{iso}}{\partial \alpha_{n+1}} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}} \\ &= \frac{(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) : \mathbb{M}_{BM}}{\sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) : \mathbb{M}_{BM} : (\sigma_{n+1} - \beta_{n+1})}} : \underbrace{\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon_{33}^{ve}}}_{\text{equ.(4.102)}} \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial g_p}{\partial \Delta \gamma_p} = \frac{(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) : \mathbb{M}_{BM}}{\sqrt{(\sigma_{n+1} - \beta_{n+1}) : \mathbb{M}_{BM} : (\sigma_{n+1} - \beta_{n+1})}} : \left(\underbrace{\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{equ.(4.101)}} - \underbrace{\frac{\partial \beta_{n+1}}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{equ.(4.103)}} \right) - \underbrace{\frac{\partial \sigma_y^{iso}}{\partial \alpha_{n+1}} \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \Delta \gamma_p}}_{\text{equ.(4.97)}} \quad (4.107)$$

以上のべた定式化を章末のボックス4.2にもまとめておく。

4.6 CF RTP のマクロ構成則の性能検証

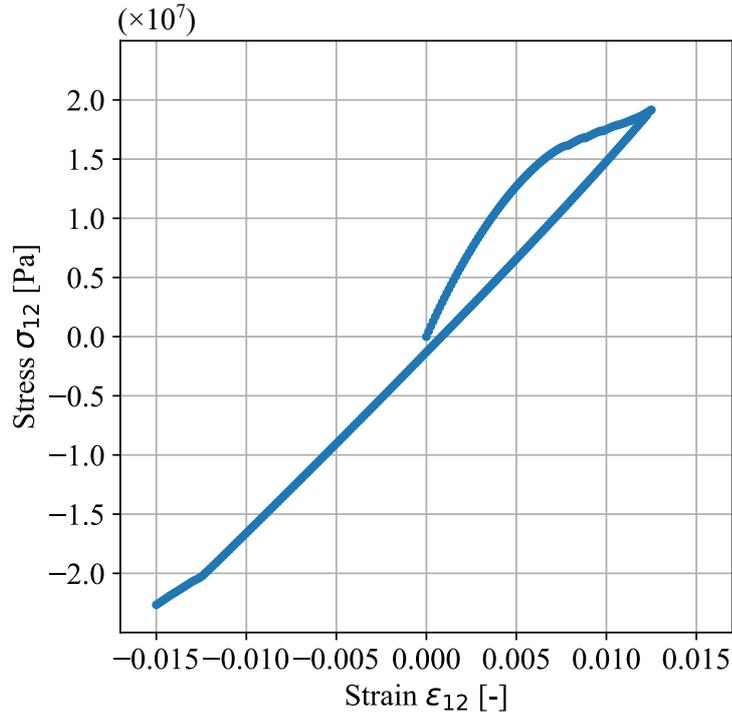
本章で提案した異方性粘弾性・塑性・損傷構成則を、一方向強化材のマクロ材料応答に対して採用してカーブフィットを行い、その精度を確認することで妥当性を検証する。なお、一般に溶融時の粘度が高いためポリカーボネート樹脂を使った一方向強化材は作成できないため、マクロ材料応答は数値材料試験によってのみ観察する。

4.6.1 数値材料試験の条件

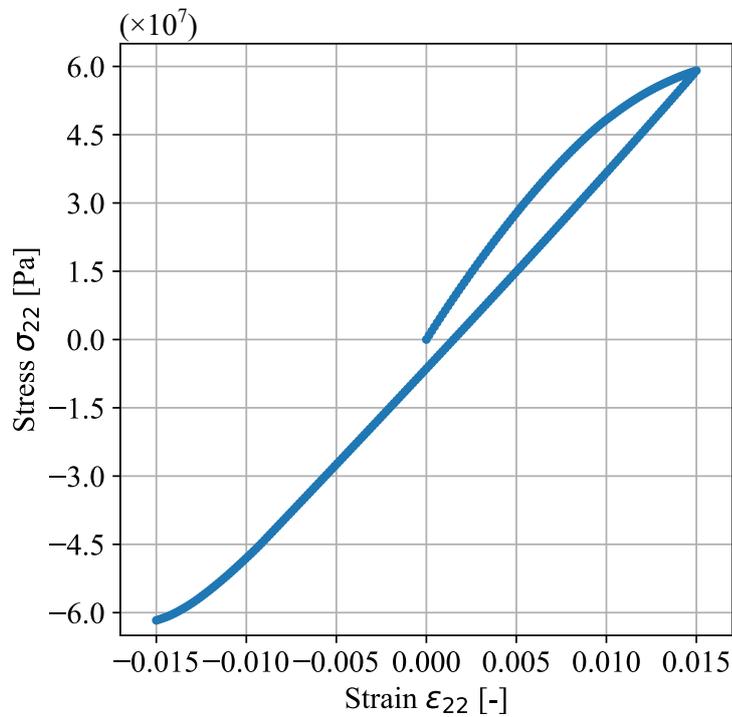
数値材料試験に用いるユニットセル（マイクロ）モデルには第2章を同じものを採用した（Figure-2.8 参照）。ただしマトリクスには、4.3 節にて同定した樹脂単体の実測データに基づいて同定した等方性粘弾性・塑性・損傷構成則のパラメータを利用する（Figure-4.3 および Table-4.1 参照）。荷重条件は第3章と同じく、繊維垂直方向の単軸サイクリック試験と、純せん断のサイクリック試験、さらにその二つの成分に対して様々な比率を与えた2軸応力試験を模擬する。2つのサイクリック試験は各変形モードにおける硬化特性の確認のために行うものである。

4.6.2 数値材料試験結果とカーブフィット

まずはじめに、純せん断サイクリック試験と繊維垂直方向のサイクリック試験結果を、それぞれ Figure-4.5 と Figure-4.6 に示す。除荷曲線の傾きに注目すると、どちらの変形モードにおいても除荷特性の勾配が初期弾性率よりも大きく減少していることから、損傷の影響が大きく表れているといえる。特にせん断モードの方が損傷の影響は大きく、永久ひずみは小さい。そのため、はじめの負荷時における非線形な特性は損傷が支配的に寄与しているものと推察される。一方、垂直モードについては、荷重ゼロ点にて比較的大きな永久ひずみと思われる領域も確認できることから、少なからず塑性の影響が混在した挙動が得られている。しかしながら、接線勾配の変化するポイントを降伏点とみなせば、圧縮側の降伏点は引張から除荷に転ずる応力値と絶対値がほぼ同じである。これは第3章の熱可塑性エポキシをマトリクスとした場合の複合硬化挙動とは大きく異なる。マトリクスに損傷特性が存在する場合には、応力集中が損傷によって緩和されるため、マトリクス内の応力分布は一様分布に近づくように働くため、移動硬化挙動の原因とされる残留応力が発生していることが原因として考えられる。そこで、ポリカーボネート樹脂による強化材は等方硬化挙動を持つものと仮定し、これ以降の議論は引張側のみに着目して行う。



Figure– 4.5 Stress strain curve of CFRTP obtained by virtual material test for pure shearing mode of 12 direction.



Figure– 4.6 Stress strain curve of CFRTP obtained by virtual material test for uniaxial mode of 22 direction.

まず、これらの試験に対してカーブフィットした結果を示す。同定手順は Figure-3.13 や 3.14 に示した弾塑性均質化の手法を参考に、純せん断試験，単軸試験，2軸応力試験の結果を個別に使用して、それぞれに関連する材料物性値を順番に同定した。ただし、本章では、等方硬化挙動を仮定し、損傷を考慮する点において 3.4.5 項に示した弾塑性構成則の同定フローとは実施内容が異なる。その要点をまとめると以下の通りである。

- 1) 純せん断試験と単軸試験は引張除荷の過程のデータのみを使用し、圧縮側のデータは使用しない。硬化は等方的に生じると考えるため、移動硬化に関する材料物性値である C_1, C_2, b はゼロとおき、 $\sigma_y^{iso}(\alpha)$ と $a\sigma_y^{iso'}(\alpha)$ の項だけで硬化を考慮する。
- 2) 損傷発展に関する定数は以下のような順番で同定および最終調整していく

- ・ 純せん断試験： $d_1^\infty, d_1^y, d_2^\infty, d_2^y, S_3$
- ・ 単軸試験： S_2
- ・ 2軸試験： S_4
- ・ 全試験データ：上記全ての結果を微調整

なお、繊維方向には非線形的な特性がほとんど見られないため $S_1 = 0$ とする。

実際に同定された結果について、単軸試験結果を Figure-4.7 にせん断試験結果を Figure-4.8 に、そして2軸試験の結果を Figure-4.9~4.10 に示す。また、Figure-4.11 には Maxwell モデルを構成する純弾性項のひずみと、最小・最大・中間に対応する時定数 τ_α を持った Maxwell 要素の弾性ひずみの履歴を示す。各ひずみは、個々の Maxwell 要素内で応力が共有されることを考慮して、以下のように算出した。

$$\epsilon_\infty^{ve} = C_\infty^{-1} \sigma_\infty \quad (4.108)$$

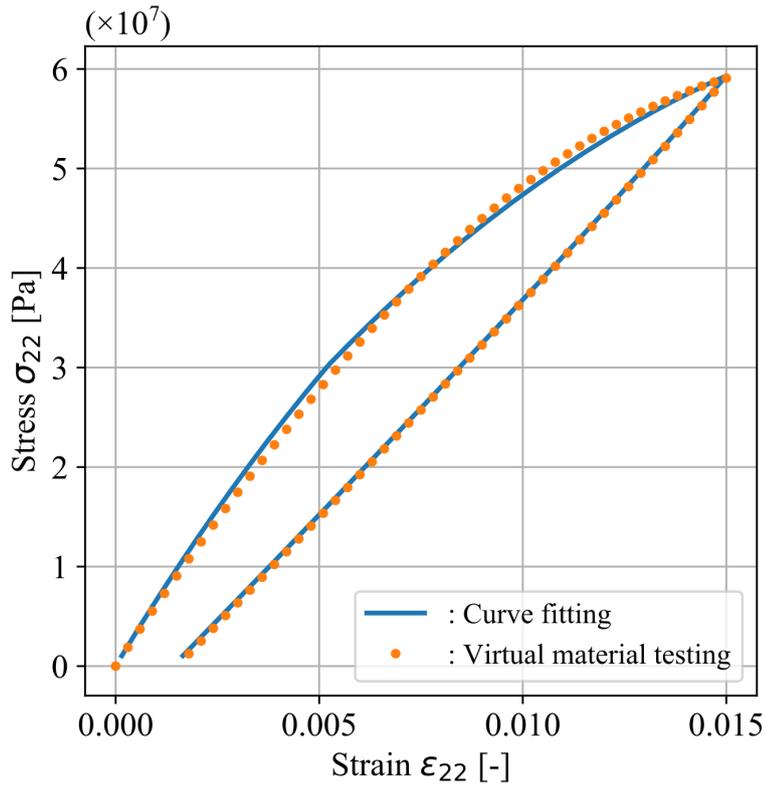
$$\epsilon_\alpha^e = C_\alpha^{-1} \sigma_\alpha \quad (4.109)$$

最も時定数が小さな Maxwell 要素では、純せん断要素と完全に追従した履歴を示す一方で、その他の要素は追従せず、より小さな値を示している。これは、粘性を示すダッシュポット成分のひずみが発生していることを示唆している。つまり、今回の試験条件において材料は粘性的挙動を少なからず含んでいるおり、負荷時の応力-ひずみ曲線の非線形な形状や完全除荷した際の残留ひずみにも影響を与えている。応力-ひずみ曲線における負荷時の傾きの変化から降伏点を特定したり、除荷時の残留ひずみから塑性ひずみを決定することができない。そのため、最適化解析において、初期値や探索範囲を決定するにもある程度のノウハウが要求される。

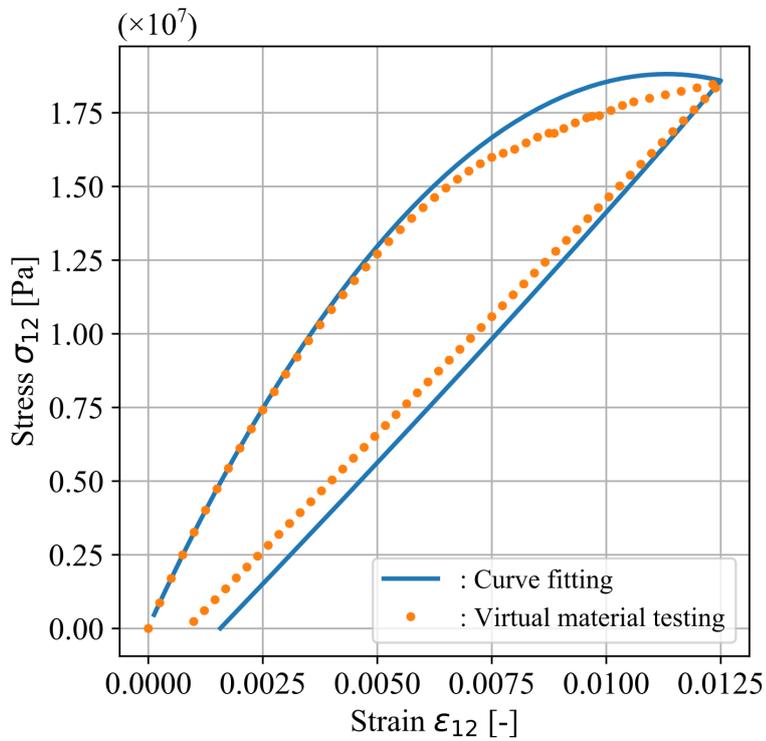
さて、Figure-4.7 と Figure-4.8 におけるフィッティング結果を見てみると、単軸試験の精度は良好であるが、純せん断の応答は除荷開始の応力のピーク点近傍と、除荷終了点近傍は比較的同定精度が若干良くない傾向は見られる。数値材料試験の結果では、せん断応答と単軸応答では負荷曲線の形が異なっており、せん断応答の方がより鋭角に曲がった2直線近似に近い形をしている。本研究で提案した材料構成則は、損傷特性の異方性は共通の損傷変数を係数倍することで表現しているため、このような成分ごとの応答の違いを表現する性能にある程度限界がある。そうはいつても、大まかな傾向はうまく捉えられており、同様のことが Figure-4.9~4.10 に示す二軸応力場においても観察される。このような二軸応力場の領域まで踏み込んだ研究例はほとんどなく、ここまで傾向をうまく捉えられている背景には、バイモーダル塑性理論を組み合わせることが重要であると考えられる。

Table– 4.2 Identified material constants related to plastic and damage characteristics. Visco-elastic properties have been already identified by DMA test shown in Chapter.2.

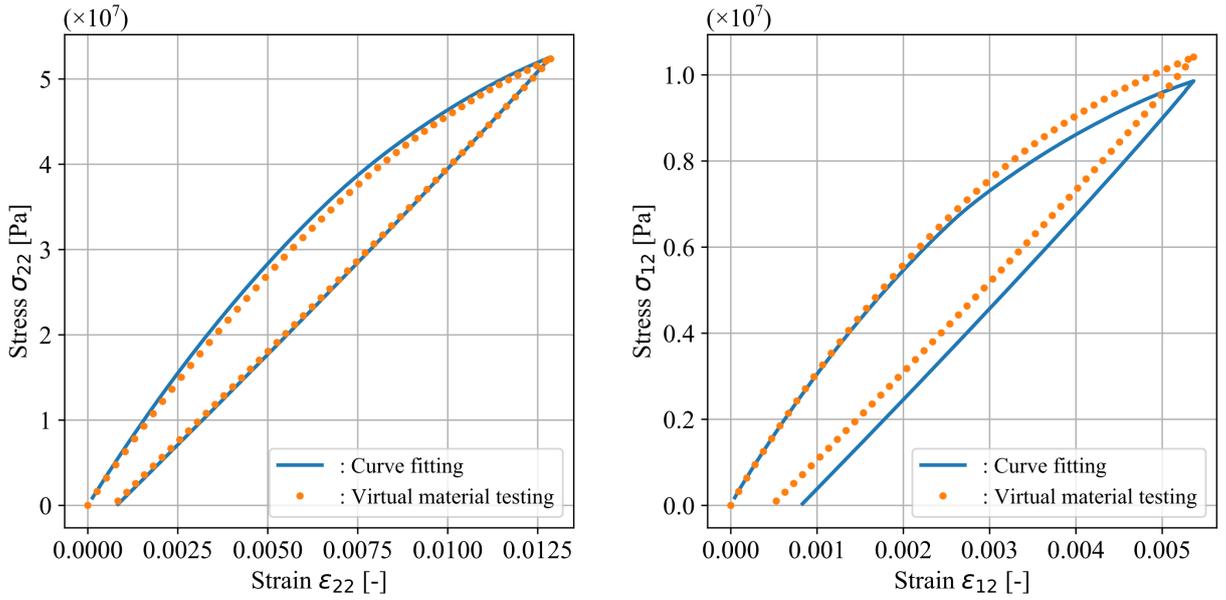
| Material Type | Description | Label | Value |
|--|---|------------------------------|------------------------------|
| Plastic | Initial Yield Stress for 12 direction | σ_{y0}^{iso} | 3.98998×10^5 [Pa] |
| | Voce's constant 1 | R_0 | 1.37744×10^8 [Pa] |
| | Voce's constant 2 | R_∞ | 7.24483×10^7 [Pa] |
| | Voce's constant 3 | b_1 | 6.81368×10^2 [-] |
| | Initial back stress | σ_{y0}^{kin} | 2.99896×10^7 [Pa] |
| | Coefficient 22 for linear back stress | $C_{1,22}$ | 0.00000 [Pa] |
| | Coefficient 12 for linear back stress | $C_{1,12}$ | 0.00000 [Pa] |
| | Coefficient 22 for nonlinear back stress | $C_{2,22}$ | 0.00000 [Pa] |
| | Coefficient 12 for nonlinear back stress | $C_{2,12}$ | 0.00000 [Pa] |
| | Damping coefficient for nonlinera back stress | b_2 | 0.00000 [-] |
| Coefficient for curvature of yield surface | F | 2.49993 [-] | |
| Coupling coefficient for isotropic & kinematic | a | 6.53360×10^{-1} [-] | |
| Damage | Coefficient 1 to define damage state | d_1^∞, d_1^v | 2.76995×10^1 [-] |
| | Coefficient 2 to define damage state | d_2^∞, d_2^v | 1.00000 [-] |
| | Weighting factor for 11 component | S_1^∞, S_1^v | 9.75668×10^{-4} [-] |
| | Weighting factor for 22 component | S_2^∞, S_2^v | 1.13909 [-] |
| | Weighting factor for 33 component | S_3^∞, S_3^v | 1.38521 [-] |
| | Weighting factor for 42 component | S_4^∞, S_4^v | 3.55166 [-] |
| | Maximum damage value | d_{max} | 0.10000 [-] |



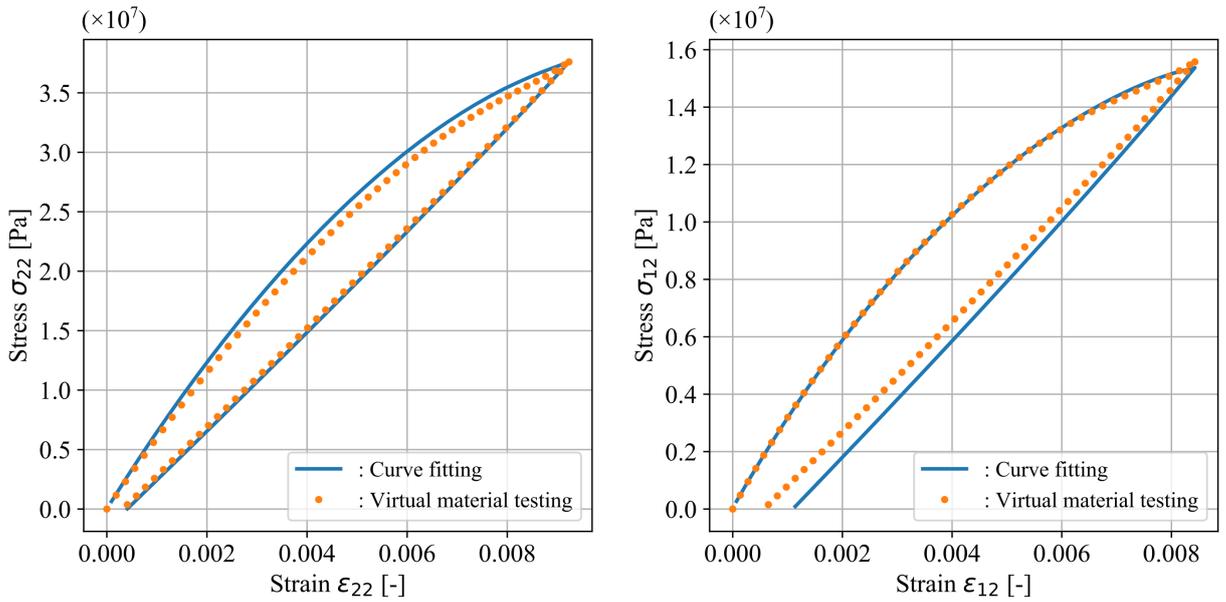
Figure– 4.7 Curve fitting results by proposed material model for uniaxial test.



Figure– 4.8 Curve fitting results by proposed material model for pure shearing test.

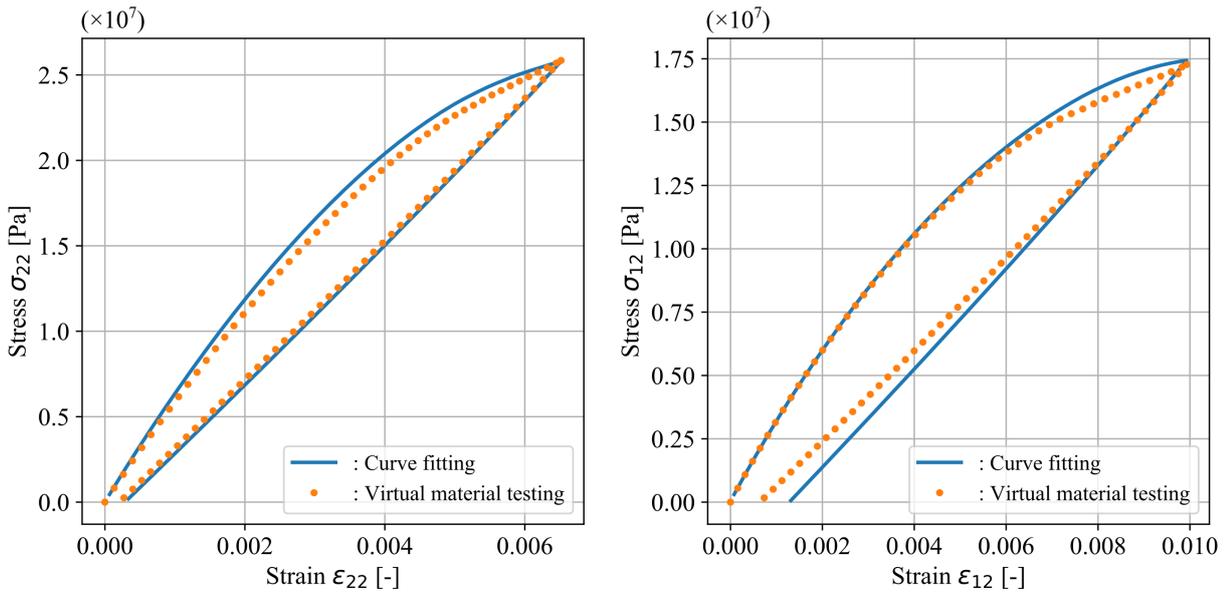


(a) Angle of stress vector = 11.25 [deg.]

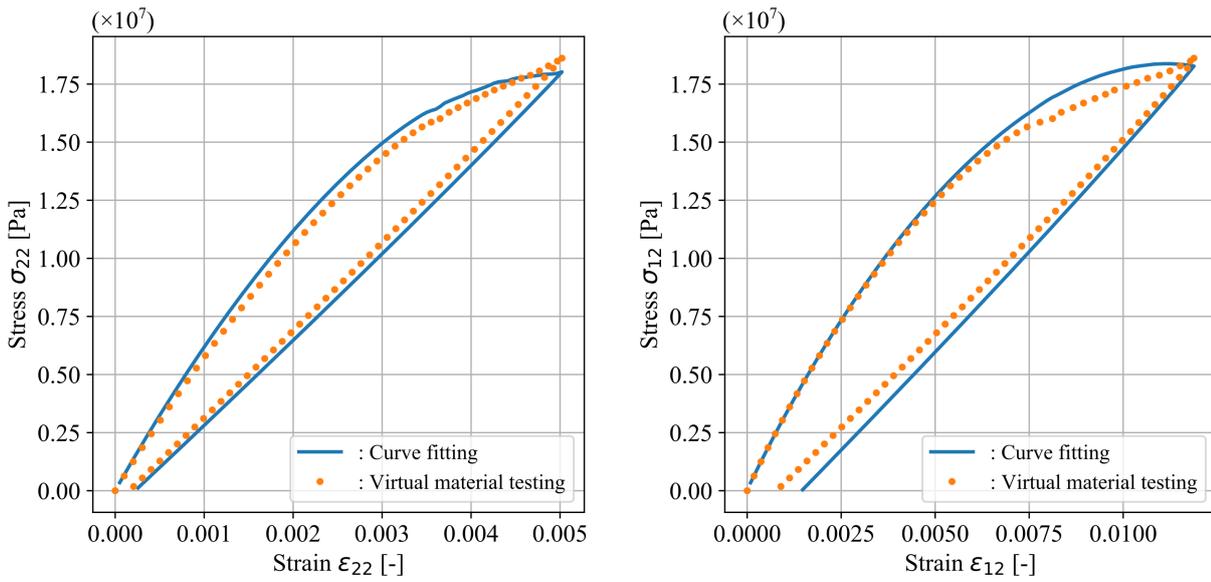


(b) Angle of stress vector = 22.50 [deg.]

Figure– 4.9 Curve fitting results by proposed material model for biaxial test.

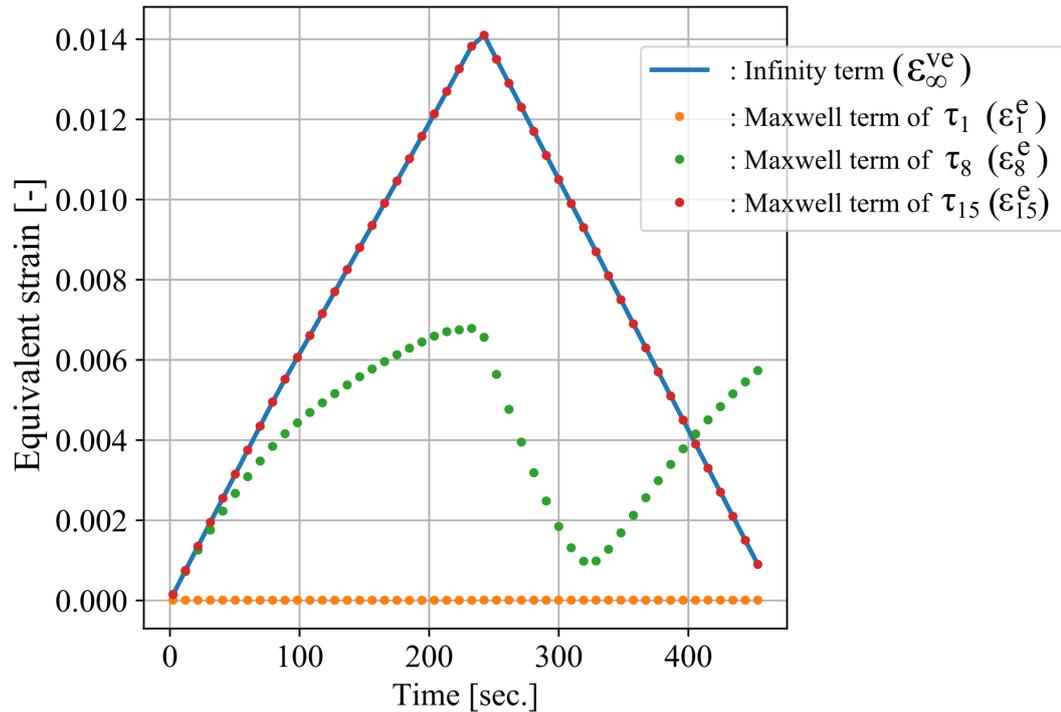


(c) Angle of stress vector = 33.75 [deg.]



(d) Angle of stress vector = 45.00 [deg.]

Figure– 4.10 Curve fitting results by proposed material model for biaxial test.



Figure– 4.11 History of strain for elastic element of pure term and maxwell term during virtual testing.

4.7 積層理論を用いたマクロ解析と局所化解析

一般に、一方向強化材は単一の層でマクロ構造を形成することはほとんどなく、様々な方向に配向させた層を積み重ねることで用いられることが一般的である。しかし、一層あたりの厚みはマクロ構造の面内方向に対して極めて薄いため、3次元応力状態を仮定したソリッド要素で各層をモデリングすることは現実的ではなく、積層方向をさらに均質化してFEモデルの幾何形状としては1層だけの平面応力要素でモデル化するのが最も現実的なアプローチである。汎用FEMツールでは、厚み方向の均質化は積層理論によって内部的に自動的に行われるため、実用上は一層あたりの材料物性値さえ既知であればよい。そこで本節では、各層の材料モデルに提案する材料構成則を採用し、4.6節で同定した物性値を用いて積層パターンの設計検討を模擬したマクロ解析と局所

化解析例を示し、その有効性について議論する。なお、3.7節と同様に、解析ツールには ANSYS2019R2 を利用し、本研究で提案する材料構成則はこれにユーザーサブルーチン `usermat` の形式で実装した。

4.7.1 解析条件

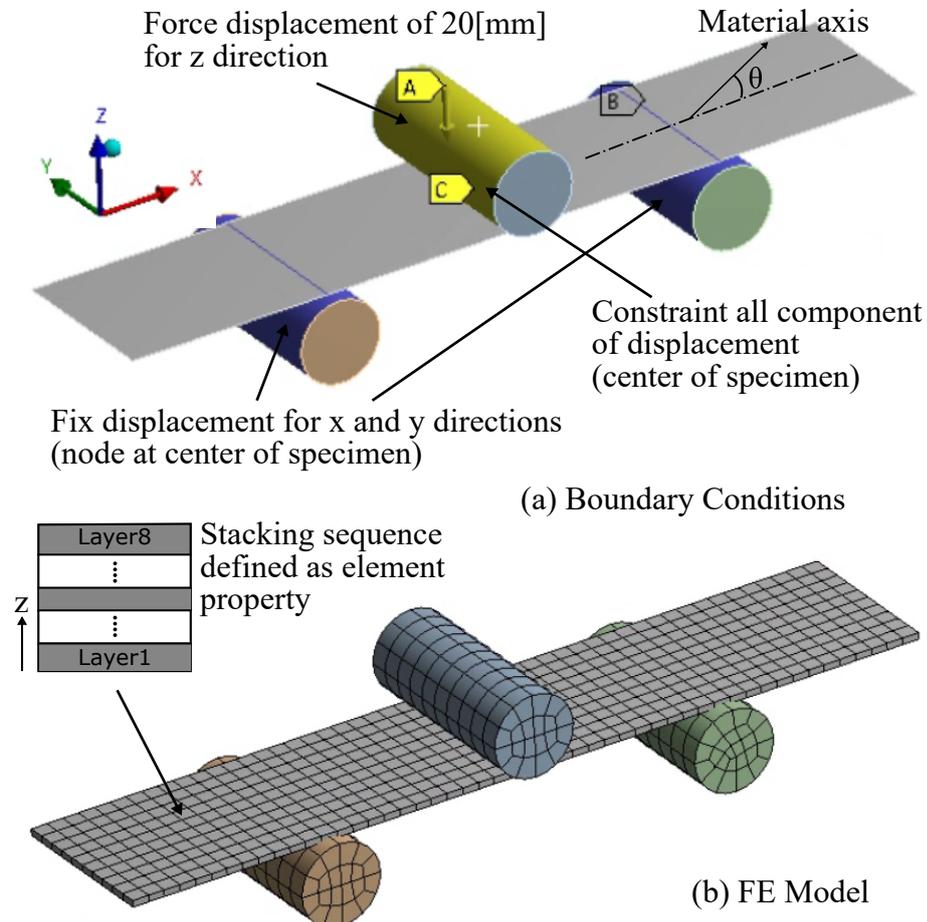
マクロ解析は3点曲げ試験を想定する。試験片のFEモデルの外観と具体的な境界条件を Figure-4.12 に示す。幅 100 [mm]、長さ 500 [mm] の面を定義して、要素には Mindlin-Reissner のシェル理論^{101,102)} を用いた要素タイプである SHELL181 を採用する。要素属性として後述する積層パターンを定義する。圧子や固定子は全て剛体を仮定した円柱形状とし、支点間距離は 250 [mm] とする。固定子は変位を完全拘束し、圧子に試験片法線方向に対して 20 [mm] の強制変位を与えてその反力履歴および試験片の応力や塑性ひずみ分布を評価する。各パーツ間は接触要素によって関連付けており、摩擦係数は全て 0.1 [-] に設定する。また、条件によっては、繊維の向きに対称性がない場合もあるため、モデルには対称条件を適用せず全体モデルとする。試験片モデルは、面内方向に変位拘束がなく接触のみで支えられているため、モデル位置の安定性を高めるため、試験片中央の節点に対して面内方向の変位成分をゼロ拘束する。

対象とする積層板は、厚み方向には厚み 0.5 [mm] の8層の一方向CFRTP層から構成されるものとし、以下に示す3種類の積層パターンを用意する。

- 1) 積層パターン 1 : [0° / 0° / 0° / 0° / 0° / 0° / 0° / 0°]
- 2) 積層パターン 2 : [0° / 90° / 0° / 90° / 90° / 0° / 90° / 0°]
- 3) 積層パターン 3 : [0° / 45° / -45° / 90° / 90° / -45° / 45° / 0°]

ここで示した各層の繊維角は、材料主軸に対する傾きを示す。材料主軸は長手方向と平行な方向を 0° とし、試験片モデルの上向き法線方向からみて右ねじの方向に 0°, 45°,

90° の 3 方向に設定した場合でそれぞれ解析結果を比較する．各層の厚み方向には 3 つの積分点を配置し，各積分点に一方向 CFRTP の材料物性値を適用する．その他の要素属性については解析ツールのデフォルト設定を用いる．



Figure– 4.12 Overview of FE model and boundary conditions for macroscale analysis.

4.7.2 マクロ解析結果

積層パターン $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{\text{sym}}$ において，3 種類の材料主軸を設定した場合の結果を Figure–4.13 に示す．繊維はすべて同じ方向に向いているため，今回採用した積層パターンの中では最も異方性が強い条件である．3 点曲げの条件では，主応力ベクトルは長手方向に向くため，それと平行な材料主軸 0° が最も剛な挙動となる．本解析では変位制

御によってすべて同じ変位量が圧子に負荷されているため、材料が剛であるほど応力は高くなっている。材料主軸 0° の結果が最も応力が高く出力されており妥当な結果であるといえる。また、 45° に傾いたケースでは変形の対称性が崩れる様子も上手く捉えられている。

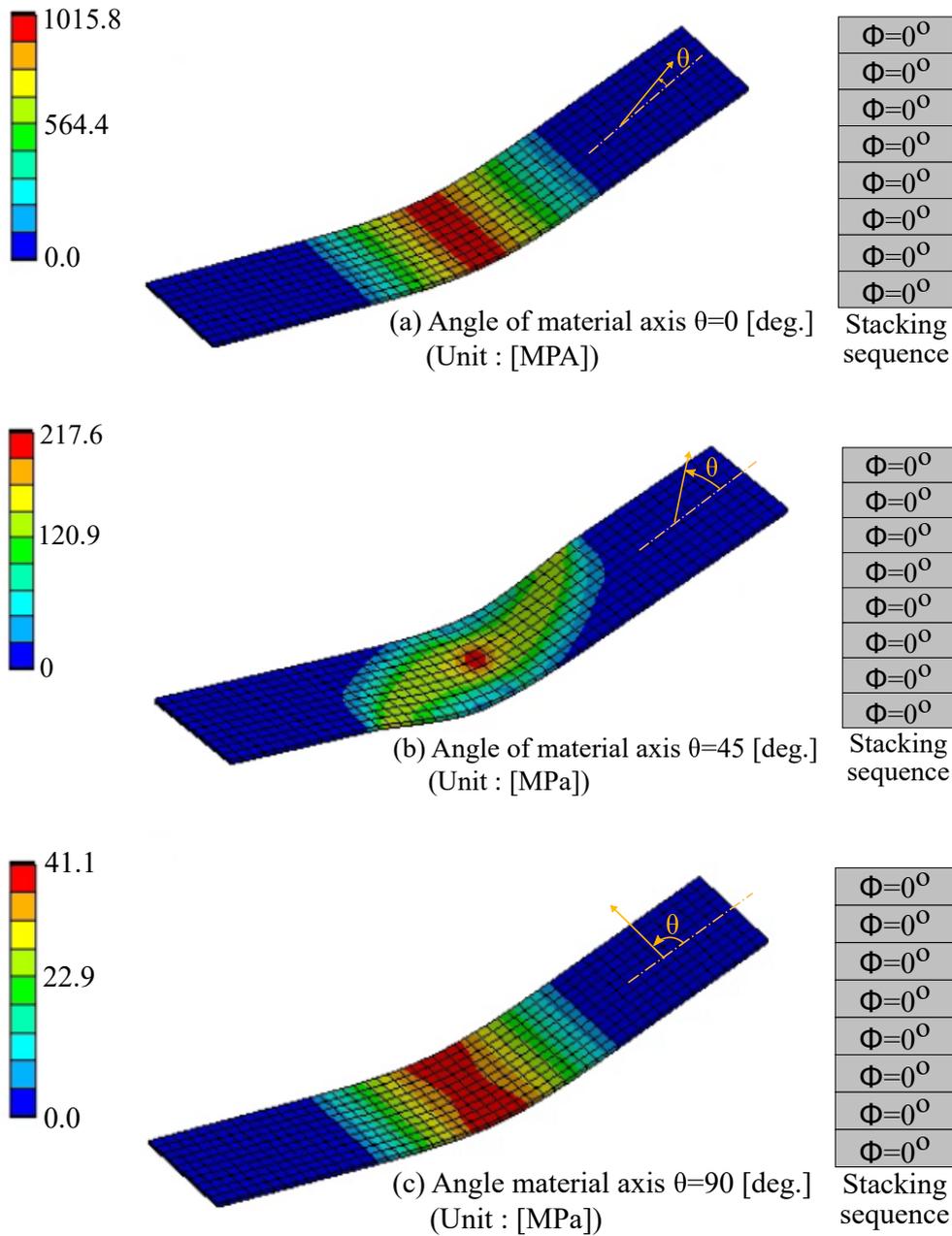


Figure- 4.13 Equivalent stress distribution in the case that material axis angle is 0 degree.

Stacking sequence is $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{\text{sym}}$.

次に、Figure-4.14 に、材料主軸を 45° に固定して積層パターンを変更した場合の塑性ひずみ分布の比較結果を示す。積層パターン 2 の $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_{\text{sym}}$ のケースでは、 45° 方向にだけ柔らかいため比較的大きな塑性が集中するが、全体的な塑性ひずみ分布は対称となっている。一方、積層パターン 3 の $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{\text{sym}}$ は、面内方向に対して最も広範囲に亘って繊維配向が分布しているため、最も疑似等方に近い特徴を持つように思われるが、同図(c)を見ると、前述した積層パターン 2 よりも対称性の崩れた結果となっていることがわかる。これは、曲げ荷重下においては、表面に近い層ほど大きな荷重を受け持つためである。つまり、中立面近傍の層はほとんど試験片の剛性に寄与しないため、表面近傍の繊維配向が支配的となる。それを踏まえて積層パターン 2 と 3 を比較してみると、前者は $[0^\circ/90^\circ]$ の対称積層が厚さ 1 [mm] の表面近傍に観察されるのに対して、後者では $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]$ の対称積層は中立面近傍にまで達する厚みで分布している。

最後に、Figure-4.15 および 4.16 に圧子の反力を全ケースで比較した結果を示す。先程述べたように曲げ条件においては、主応力ベクトルは長手方向を向き、かつ表面近傍の層が荷重の大部分を受け持つため、表面近傍層の配向角を 0° に近づけるほど剛性は高くなる。本節の積層パターンはどれも最上層および最下層の繊維配向を 0° に設定しているため、材料主軸 0° の状態が最も剛であり、そこから逸脱することで剛性が低下していくと考えられる。 $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{\text{sym}}$ の積層パターンは表層に近い位置に 45° 方向の層が入っているため、材料主軸 45° の方が 90° の場合よりも剛な挙動となる。今回の解析では、これらの考察内容と一致する傾向を示すことが確認できるため、材料挙動はある程度適切に表現できているものと言える。

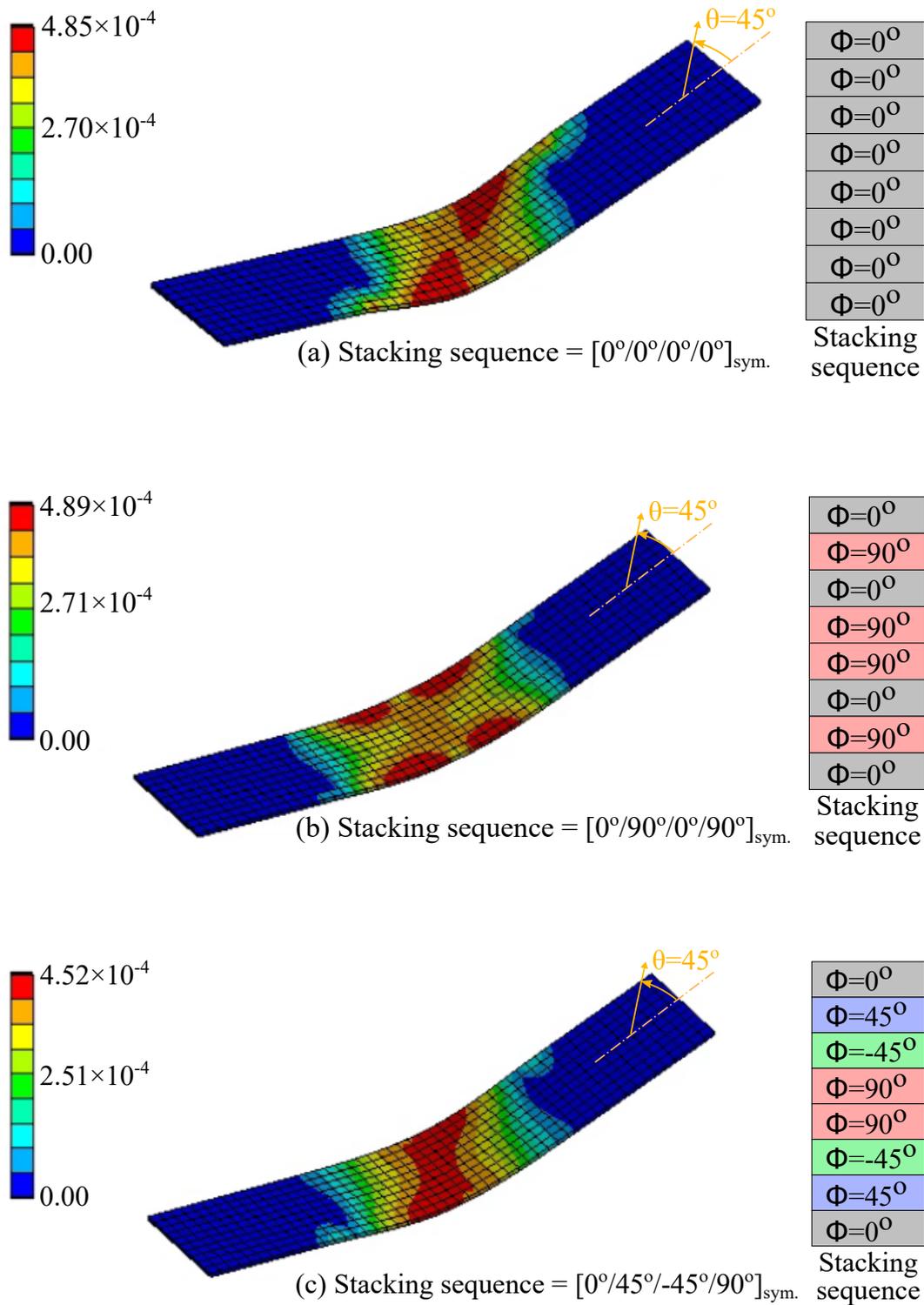
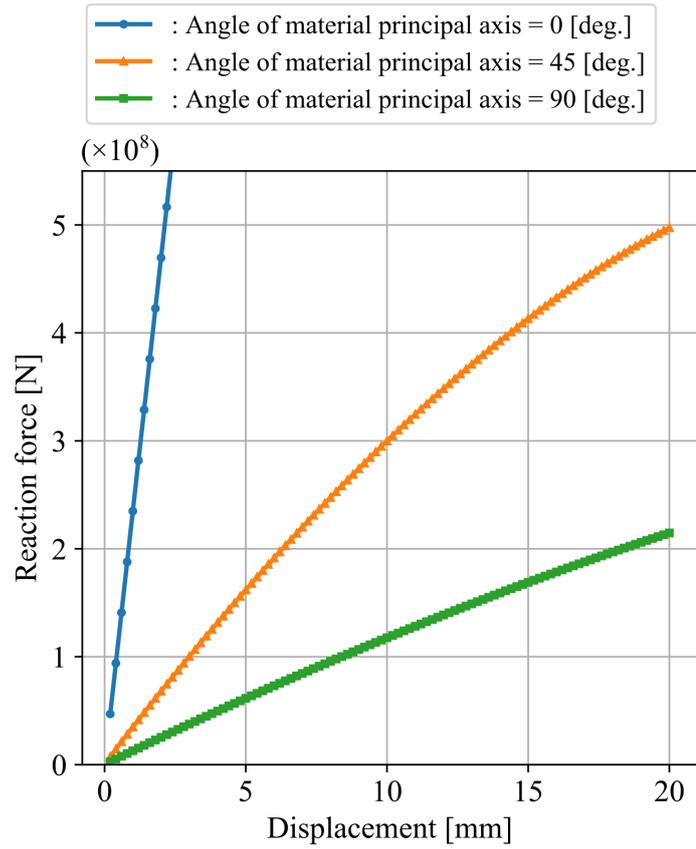
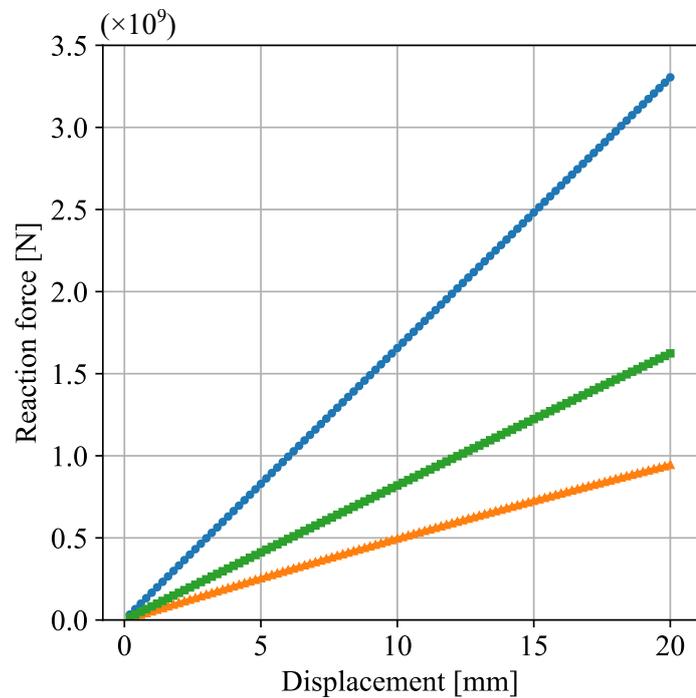
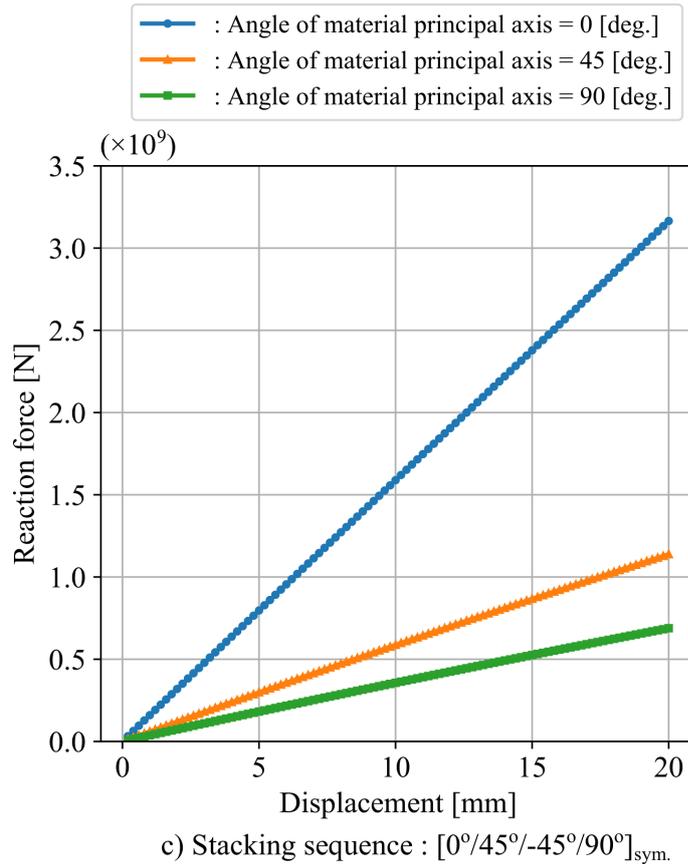


Figure- 4.14 Plastic strain distribution in specimen for different stacking sequence. Angle of material principal axis is fixed as 45 [deg.].

a) Stacking Sequence : $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{\text{sym}}$.b) Stacking sequence : $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_{\text{sym}}$.**Figure– 4.15** History of reaction force in the case of stacking sequence $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]_{\text{sym}}$.and $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_{\text{sym}}$.



Figure– 4.16 History of reaction force in the case of stacking sequence $[0^\circ/45^\circ/ -45^\circ/90^\circ]_{sym}$.

4.7.3 局所化解析結果

前項で示したマクロ解析モデルの中心部に対して、局所化解析を行いマイクロモデル内の力学応答を評価する。ここでは材料主軸が 0° で、積層パターンが $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_{sym}$ の条件を採用する。(4.16)に示したように材料の損傷は相当機械ひずみによって特徴づけているので、相当機械ひずみ分布を評価対象とする。その結果をFigure–4.17に示す。グラフは厚み方向の相当機械ひずみ分布である。中立面を挟んで鏡面对称の結果となるため、中立面より下4層分の結果のみを示した。青線はマクロ構造解析の結果を示しており、最下層(第1層と呼ぶ。その他は下から順に2, 3, 4層と呼ぶ)を最大値、そして中立面をほぼゼロとして、その間をほぼ線形に分布する結果となっている。と

ころが、局所化解析によって、マイクロ構造内部の相当機械ひずみに着目すると状況は一変する。その様子が同グラフの橙色の線であり、マイクロモデル内部で分布する相当機械ひずみの最大値を示している。各層の相当機械ひずみの大小関係が変わっており、実際は第2層あるいは第3層の方が第1層よりも値が大きくなる。複合材料の設計においては、このような最も破壊や損傷発生の危険性のある層（以下、最弱層と呼ぶ）を見つけて、材料や繊維の向きを改善していくため、最弱層の誤判定は最も避けなければならない問題である。

一方、マイクロモデル内部の相当機械ひずみ分布も同図に示す。繊維が主応力ベクトルに対して平行な場合には樹脂が受ける負荷が小さい。しかし、両者に角度差がつくと、第2層～第4層の結果が示すように、樹脂の内部に帯状のひずみが集中する領域が発生することがわかる。このように複合材料の解析では、とりわけ強度評価において、マクロな視点の結果だけでは材料が受ける負荷の程度を正確に予測することはできず、最弱層を誤って判定してしまう危険性があるため、マイクロな視点においても結果を慎重に精査することが重要である。

マイクロな視点での結果評価は実測ベースでは極めて困難であり、本研究が提案するマルチスケール解析を導入することによってはじめて可能になるものである。言い換えると、解析結果の妥当性を検討することが難しい。しかしながら、均質化法そのものは数学的に厳密に体系づけられたものであり、手法の妥当性そのものには疑いの余地はない。解析条件の定義付けによっては、実現象と定量的な一致はみられない可能性は捨てきれないが、定性的な各層ごとの結果の大小関係などは妥当であると考えられる。前述したように層間の結果の相対比較によって最弱層を見極めることも複合材料設計では重要であるため、今回の解析によって、本研究アプローチの有効性は例示できているものと考えられる。

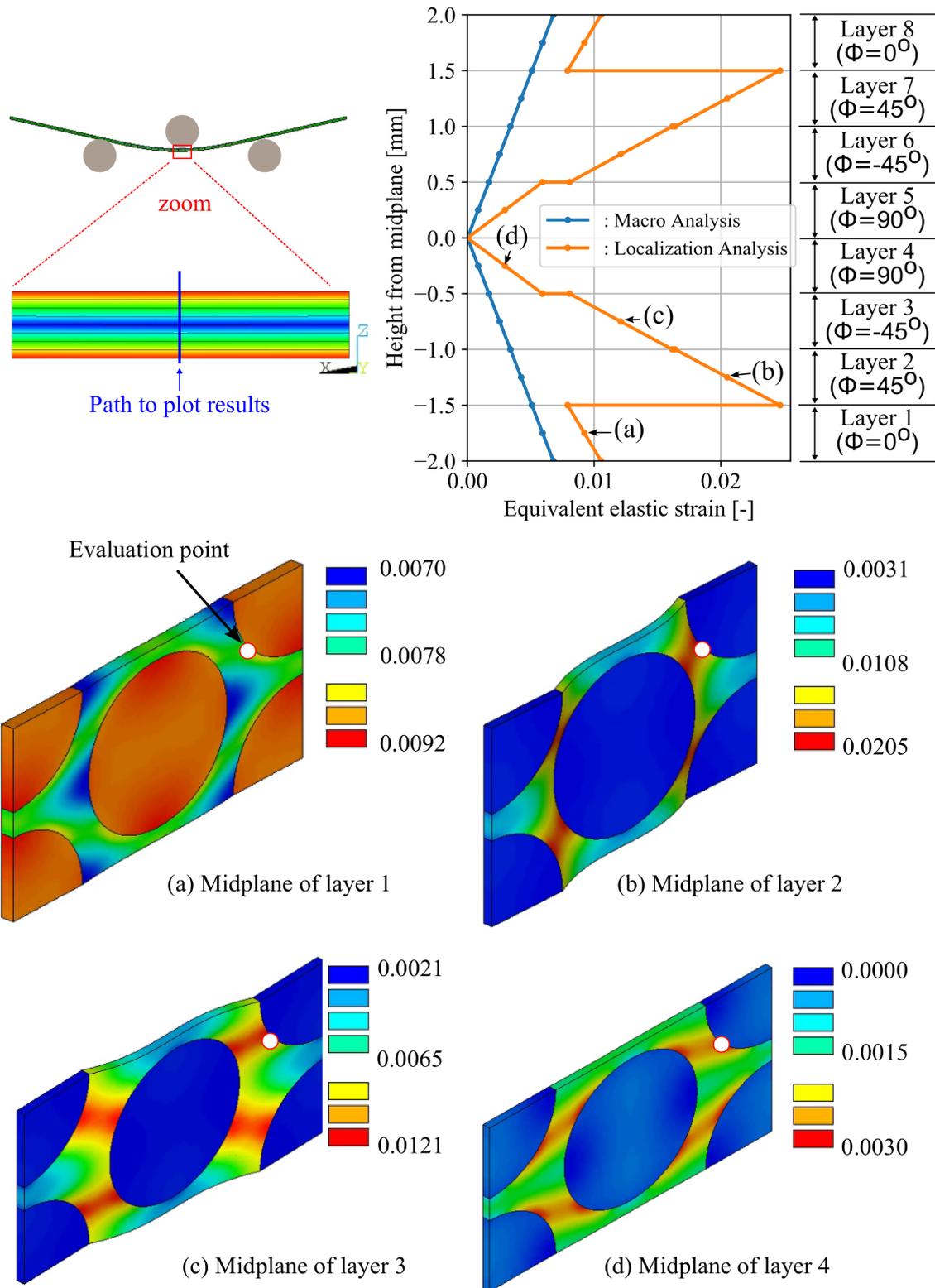


Figure- 4.17 Equivalent strain distribution for thickness direction at center of the specimen. Localization analysis in graph means maximum equivalent strain in microstructure.

4.8 まとめ

本章では、より汎用的な問題に対して CFRTP のマルチスケール解析を実現するために、第 2 章と第 3 章で構築した粘弾性と塑性、さらに損傷を加えた 3 種類の非弾性材料挙動を全て考慮した上で、CFRTP のマクロな異方性材料挙動を特徴づけた。そして、その材料挙動をマクロ構造解析へ反映させるための異方性のマクロ粘弾性・塑性・損傷の統合構成則を構築し、材料物性値の同定・マクロ構造解析・局所化解析の一連のマルチスケール解析フローを例示した。さらに、CFRTP が薄板構造物で利用されることを踏まえて、より実用的に解析ができるよう平面応力問題への縮退も行った。そこで得られた成果を以下にまとめる。

- 1) ポリカーボネート樹脂に対して引張・除荷の実試験を行って取得した応力-ひずみ曲線から、除荷時の接線勾配が初期の弾性率よりも低くなる様子を確認した。これは樹脂に損傷が発生することを示唆する。さらに除荷後に永久ひずみが残留すること、負荷時と除荷時の経路が異なる様子なども確認された。そこで、等方性の粘弾性と塑性、損傷の特徴を統合した材料構成則を構築してカーブフィットを行った。その結果、精度が十分とはいえないものの、今回構築した材料構成則によって、実材料試験で観測されたそれぞれの特徴を表現できていることを確認した。
- 2) CFRTP のマイクロモデルに対して、純せん断や単軸のサイクリック負荷を数値材料試験により行って、マクロな応力-ひずみ曲線を観察した。その結果、引張側と圧縮側の降伏点には、絶対値に明瞭な差がみられず、ほぼ等方的な硬化挙動が確認された。これは第 3 章の熱可塑性エポキシ樹脂を使ったケースとは大きく異なる特徴であった。非線形の材料応答に塑性以外の粘性や損傷の効果が顕著に現れることで、残留応力の影響が相対的に小さくなったことに起因していると推察さ

れた。一方、粘性や損傷の影響も確認されたため、異方性の粘弾性・塑性・損傷のマクロ材料構成則を構築した。

3) 第2章で構築した異方性粘弾性構成則を平面応力状態へ縮退するための方法を定式化した。その考察の中では、一般化 Maxwell モデルを用いた粘弾性構成則においては、3次元応力状態と平面応力状態の弾性マトリクス間に相関関係を見出すことはできないため、平面応力用に弾性マトリクスを同定する必要があることを理論的に示した。さらに、面外方向の応力成分をゼロと仮定することで、厚み方向のひずみを計算するための定式化も行った。

4) 単軸負荷除荷試験，せん断負荷除荷試験，およびそれらを組み合わせた二軸応力試験の結果に対して，今回構築した統合材料構成則でフィッティングを試みた。せん断成分には，若干の誤差が残るものの，数値材料試験の傾向を概ね再現することができた。特に，二軸応力状態の材料応答についても同様の傾向が捉えられたことは，これまでに見られない研究成果であり，今回，損傷に加えて粘弾性とバイモーダル塑性を組み合わせたことではじめて得られた成果である。

なお，損傷変数の発展式にも成分ごとに個別に準備すればよりフィッティング精度を高めることが期待できるが，パラメータ同定の難易度が格段に上がるため，よりロバストに最適なパラメータを探索するための最適化アルゴリズムについても研究していく必要がある。解析に求める精度は解析者の目的によって様々であるが，材料挙動の傾向を捉えるという意味においては，今回の成果は実用に耐えうるものであると考える。

5) 同定されたマクロ材料物性値を用いて，積層材のマクロ解析および局所化解析によるマルチスケール解析の結果を例示した。マクロ解析は平面応力を仮定した積層 shell 要素を使用して解析を行った。様々な繊維配向や積層パターンで解析を

行って、それぞれの結果の大小関係を相対比較することで、定義した繊維の向きが正しく反映されたマクロ解析が実施できていることが定性的に確認した。さらに、厚さ方向の相当機械ひずみの分布について、マクロ解析結果と局所化解析結果の両方で確認した。その結果、材料設計において最も危惧すべき、最大の相当機械ひずみの発生する層(=最弱層)が、マクロ構造解析と局所化解析で異なることを確認した。これにより、実製品の強度評価において、マクロ構造解析のみから結果処理を行うと最弱層を誤判定するリスクがあり、局所化解析によってミクロな視点で結果を評価することも重要であることを示すことができた。

4.1 本研究が提案する等方性の粘弾性・塑性・構成則

■ 損傷発展

$$D^* = d_1^* (\bar{\epsilon}_{\max})^{d_2^*} \quad (4.110)$$

$$E^* = (1 - D) \tilde{E}^* \quad (4.111)$$

$$G^* = \frac{E^*}{2(1 + \nu)} \quad (4.112)$$

$$K^* = \frac{E^*}{3(1 - 2\nu)} \quad (\text{※ } * = \infty \text{ or } \alpha) \quad (4.113)$$

■ 応力発展

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^{\text{ve}} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{p}} \quad (4.114)$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{\text{ve}} + \boldsymbol{e}^{\text{p}} \quad (4.115)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(K^\infty + \sum_{\alpha=1}^N K_v^\alpha \right) \boldsymbol{\epsilon}^{\text{vol}} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{s}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{s}^\alpha \quad (4.116)$$

$$\boldsymbol{s}^\infty = 2G_\infty \boldsymbol{e}^{\text{ve}} = 2G_\infty (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^{\text{p}}) \quad (4.117)$$

$$\boldsymbol{s}^\alpha = \int_0^t \gamma_\alpha \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_\alpha}\right) \frac{\partial \boldsymbol{s}_\infty}{\partial s} ds \quad (4.118)$$

■ 塑性ひずみ発展

$$f = \sqrt{\left(\boldsymbol{s}_\infty + \sum_{\alpha} \boldsymbol{s}_\alpha \right) : \left(\boldsymbol{s}_\infty + \sum_{\alpha} \boldsymbol{s}_\alpha \right)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y(\alpha) \quad (4.119)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{\text{p}} = \dot{\gamma}_p \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.120)$$

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}_p \quad (4.121)$$

$$f \leq 0, \quad \dot{\gamma}_p \geq 0, \quad f \dot{\gamma}_p = 0 \quad (4.122)$$

■ 時間離散化アルゴリズム

$$D_{n+1}^* = d_1^* (\bar{\epsilon}_{n+1}^{\max})^{d_2^*} \quad (4.123)$$

$$E^* = (1 - D_{n+1}) \tilde{E}^* \quad (4.124)$$

$$G^* = \frac{E^*}{2(1 + \nu)}, \quad K^* = \frac{E^*}{3(1 - 2\nu)} \quad (\otimes * = \infty \text{ or } \alpha) \quad (4.125)$$

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_{n+1}^{\text{ve}} + \epsilon_{n+1}^{\text{p}}, \quad e_{n+1} = e_{n+1}^{\text{ve}} + e_{n+1}^{\text{p}} \quad (4.126)$$

$$\sigma = \left(K^\infty + \sum_{\alpha=1}^N K_v^\alpha \right) \epsilon_{n+1}^{\text{vol}} \mathbf{I} + s_{n+1}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N s_{n+1}^\alpha \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_{n+1}^\infty + s_{n+1}^\alpha \\ &= s_{n+1}^{\text{tri}} - \left[2G_\infty + \sum_{\alpha=1}^N 2G_\alpha \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \right] \Delta \epsilon_p \end{aligned} \quad (4.128)$$

$$s_{n+1}^{\text{tri}} = s_\infty^{\text{tri}} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \gamma_\alpha \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} (s_\infty^{\text{tri}} - s_n^\infty) \quad (4.129)$$

$$s_\infty^{\text{tri}} = 2G_\infty (e_{n+1} - e_n^{\text{p}}) \quad (4.130)$$

- ケース 1 : $f(s_{n+1}^{\text{tri}}, \alpha_n) \leq 0$ の場合 (弾性状態)

$$s_{n+1} = s_n, \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n, \quad \epsilon_{n+1}^{\text{p}} = \epsilon_n^{\text{p}} \quad (4.131)$$

- ケース 2 : $f(s_{n+1}^{\text{tri}}, \alpha_n) > 0$ の場合 (塑性状態)

$$g(\Delta \gamma_p) = \sqrt{s_{n+1} : s_{n+1}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y (\alpha_{n+1}) = 0 \quad (4.132)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \gamma_p \quad (4.133)$$

$$\sigma_y (\alpha_{n+1}) = \sigma_{y0} + R_0 \alpha_{n+1} + R_\infty (1 - \exp(-b_1 \alpha_{n+1})) \quad (4.134)$$

$$\epsilon_{n+1}^{\text{p}} = \epsilon_n^{\text{p}} + \Delta \gamma_p N_{n+1}^{\text{tri}} \quad (4.135)$$

4.2 本研究が提案する異方性の粘弾性・塑性・構成則

■ 損傷発展

$$D^* = d_1^* (\bar{\epsilon}_{\max})^{d_2^*} \quad (4.136)$$

$$S^* = \begin{bmatrix} (1 - S_1^*) D^* & (1 - S_4^*) D^* & 0 \\ (1 - S_4^*) D^* & (1 - S_2^*) D^* & 0 \\ 0 & 0 & (1 - S_3^*) \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

$$C_* = S : \tilde{C}_* = S_{ij} \tilde{C}_{*ij} \quad (\otimes * : \infty \text{ or } \alpha) \quad (4.138)$$

■ 応力発展

$$\epsilon = \epsilon^{ve} + \epsilon^p \quad (4.139)$$

$$\sigma = \sigma_\infty + \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha \quad (4.140)$$

$$\sigma_\infty = \mathbb{C}_\infty : (\epsilon - \epsilon^p) \quad (4.141)$$

$$\sigma_\alpha = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_\alpha}\right) \gamma_\alpha : \frac{\partial \sigma_\infty}{\partial s} ds \quad (4.142)$$

■ 塑性ひずみ発展

$$f^{[i]} = \sqrt{(\sigma - \beta^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}}^{[i]} : (\sigma - \beta^{[i]}) - \sigma_y(\alpha)} \quad (4.143)$$

$$\sigma_y(\alpha) = \sigma_{y0}^{\text{iso}} + \sigma_{y0}^{\text{iso}'}(\alpha) = \sigma_{y0}^{\text{iso}} + R_0 \alpha_{n+1} + R_\infty (1 - \exp(-b_1 \alpha)) \quad (4.144)$$

$$\beta^{[i]} = \sigma_{y0}^{\text{kin}} + a \sigma_{y0}^{\text{iso}'} + \beta^{(1)[i]} + \beta^{(2)[i]} \quad (4.145)$$

$$\dot{\beta}^{(1)[i]} = \mathbb{C}_1 : \dot{\epsilon}^p \quad (4.146)$$

$$\dot{\beta}^{(2)[i]} = \mathbb{C}_2 : \dot{\epsilon}^p - b \dot{\epsilon}_p \beta^{(2)[i]} \quad (4.147)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma}_p N \quad (4.148)$$

$$\dot{\epsilon}_p = 2\dot{\gamma}_p \quad (4.149)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma}_p \quad (4.150)$$

$$f \leq 0, \dot{\gamma}_p \geq 0, f \dot{\gamma}_p = 0 \quad (4.151)$$

■ 時間離散化アルゴリズム

$$D_n^* = d_1^* (\bar{\epsilon}_n^{\max})^{d_2^*} \quad (4.152)$$

$$S^* = \begin{bmatrix} (1 - S_1^*) D_n^* & (1 - S_4^*) D_n^* & 0 \\ (1 - S_4^*) D_n^* & (1 - S_2^*) D_n^* & 0 \\ 0 & 0 & (1 - S_3^*) D_n^* \end{bmatrix} \quad (4.153)$$

$$C_* = S : \tilde{C}_* = S_{ij} \tilde{C}_{*ij} \quad (\otimes * : \infty \text{ or } \alpha) \quad (4.154)$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tri}} - \Delta \gamma_p \left[\mathbb{I}_s + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \gamma_\alpha \right] : C_\infty : N_{n+1} \quad (4.155)$$

$$\sigma_{n+1}^{\text{tri}} = \sigma_\infty^{\text{tri}} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \sigma_n^\alpha + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \gamma_p : (\sigma_\infty^{\text{tri}} - \sigma_n^\infty) \right] \quad (4.156)$$

$$\sigma_\infty^{\text{tri}} = C_\infty : (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n^p) \quad (4.157)$$

$$\Delta \epsilon_3^{\text{ve}} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^2 C_{3i}^\infty \epsilon_{n+1,i}^{\text{ve}} + C_{33}^\infty \epsilon_{n,3}^{\text{ve}} + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \sigma_{n,3}^\alpha + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (\gamma_{3i}^\alpha C_{ij}^\infty \Delta \epsilon_j^{\text{ve}}) \right]}{C_{33}^\infty + \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 (\gamma_{3i}^\alpha C_{i3}^\infty) \right]} \quad (4.158)$$

- ケース 1 $\bar{\epsilon}_{n+1} \leq \bar{\epsilon}_n^{\max}$, $f^{\text{tri}} \leq 0$ の場合 (損傷, 塑性ともに進展しない)

$$D_{n+1} = D_n, \quad \sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{\text{tri}}, \quad \epsilon_{n+1,3} = \epsilon_{n,3} + \Delta \epsilon_3^{\text{ve}} \quad (4.159)$$

- ケース 2 $\bar{\epsilon}_{n+1} > \bar{\epsilon}_n^{\max}$, $f^{\text{tri}} \leq 0$ の場合 (損傷のみ進展する)

$$g_d(\Delta \epsilon_3^{\text{ve}}) = \sigma_{n+1,3} = \sum_{i=1}^3 (C_{\infty 3i}^{[3D]} \epsilon_{n+1,i}^{\text{ve}[3D]}) + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \sigma_{n,3}^\alpha + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{\alpha 3i}^{[3D]} C_{\infty ij}^{[3D]} \Delta \epsilon_j^{\text{ve}[3D]} \right] = 0 \quad (4.160)$$

$$D_{n+1}^* = d_1^* (\bar{\epsilon}_{n+1})^{d_2^*} \quad (4.161)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (4.156) \text{ 式} \quad (4.162)$$

$$\epsilon_{n+1,3} = \epsilon_{3,n} + \Delta\epsilon_3^{\text{ve}} \quad (4.163)$$

- ケース 3 $\bar{\epsilon}_{n+1} > \bar{\epsilon}_n^{\text{max}}$, $f^{\text{tri}} > 0$ の場合 (損傷も塑性も進展する)

$$g_p(\Delta\gamma^p, \Delta\epsilon_3^{\text{ve}}) = f_{n+1}^{[i]} = \sqrt{(\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]}) : \mathbb{M}_{\text{BM}}^{[i]} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]})} - \sigma_y^{\text{iso}}(\alpha_{n+1}) = 0 \quad (4.164)$$

$$g_d(\Delta\gamma_p, \Delta\epsilon_3^{\text{ve}}) = \sigma_{n+1,3} = \sum_{i=1}^3 (C_{\infty 3i}^{[3D]} \epsilon_{n+1,i}^{\text{ve}[3D]}) + \sum_{\alpha=1}^N \left[\exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \sigma_{n,3}^\alpha + \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_\alpha}\right) \right\} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{\alpha 3i}^{[3D]} C_{\infty ij}^{[3D]} \Delta\epsilon_j^{\text{ve}[3D]} \right] = 0 \quad (4.165)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (4.155) \text{ 式} \quad (4.166)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma_p \quad (4.167)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{[i]} = \boldsymbol{\beta}_n^{[i]} + \Delta\boldsymbol{\beta}^{(1)[i]} + \Delta\boldsymbol{\beta}^{(2)[i]} \quad (4.168)$$

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{(1)[i]} = \Delta\gamma_p \mathbf{C}_1 : \mathbf{N}_{n+1} \quad (4.169)$$

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{(2)[i]} = \Delta\gamma_p \mathbf{C}_2 : \mathbf{N}_{n+1} - 2b_2 \Delta\gamma_p \boldsymbol{\beta}_n^{(2)[i]} \quad (4.170)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_n^p + \Delta\gamma_p \mathbf{N}_{n+1} \quad (4.171)$$

$$\epsilon_{n+1,3} = \epsilon_{n,3} + \Delta\epsilon_3^{\text{ve}} - \Delta\gamma_p N_{n+1,1} - \Delta\gamma_p N_{n+1,2} \quad (4.172)$$

第5章 結論

本研究では、近年懸念されている工業製品がもたらす地球温暖化の対策として期待されている、軽量かつリサイクル性に優れた炭素繊維強化の熱可塑性樹脂 (CFRTP : Carbon Fiber Reinforced Plastics) に注目し、その材料設計や製品設計を CAE によって解析する方法およびその具体例を示した。解析手法には、均質化法に基づいたマルチスケール解析技術を用いた。この解析実現のためには、微視構造の材料挙動を正確にマクロ構造へ反映させるために、CFRTP の異方性の材料挙動を正確に特徴づけて、それを異方性のマクロ材料構成則によってフィッティングし材料物性値を同定する必要がある。そこでまず、熱可塑性樹脂単体の非弾性材料挙動を実材料試験によって取得した。そして、それらの材料挙動を正確に反映させてミクロモデルの数値材料試験を実施することで、CFRTP のマクロな異方性の非弾性材料挙動を明らかにすると同時に、詳細な特徴づけを行って、異方性のマクロ非弾性材料構成則を構築した。一方、CFRTP は運用時の条件によって、様々な非弾性挙動の特徴が現れる。今回はその中で粘弾性・弾塑性・損傷の3つの特徴の着目して研究を行った。その結果、得られた成果を以下にまとめる。

- 1) 粘弾性挙動はポリカーボネート樹脂をマトリクスとした CFRTP を対象に行った。まず、樹脂単体に対して動的粘弾性試験を実施した。その結果、従来の知見通り温度変化に伴って材料特性が周波数軸方向へのシフトすることが確認できたが、それだけではなく弾性率軸の方向へもシフトする様子を捉えることができた。こ

れを解析モデルに取り入れるために、時間-温度換算則に加えて時間-弾性率換算則を導入した新しいシフト関数を構築した。

このようなシフト挙動を反映した材料構成則を CFRTP のマイクロモデルを構成する樹脂に適用して異方的な応力緩和特性を数値材料試験によって観察した。その結果として、CFRTP の時間-温度換算則は樹脂の特性をそのまま引き継ぐのに対して、時間-弾性率換算則はそのようにならず、荷重方向に依存するシフト挙動を持つことを確認した。そこで、異方性の時間-弾性率換算則も新しく提案し、CFRTP のマクロな異方性粘弾性挙動も正確にカーブフィットできることを確認した。

- 2) 材料挙動に損傷の影響が現れにくい熱可塑性エポキシ樹脂をマトリクスとした CFRTP を用いて弾塑性材料挙動の考察を行った。無応力状態あるいは、垂直引張やせん断荷重によって硬化した状態の CFRTP のマイクロモデルに対して、様々な応力比で数値材料試験を実施することで、マクロな初期降伏曲面および、硬化後の降伏曲面を観察した。その結果、初期の降伏曲面は、Dvorak らが提案したバイモーダル塑性理論が予測する形状でほぼ近似できることが確認された。その一方で、材料が硬化すると、初期降伏曲面とは相似関係を持たない形状へ変形、しかも荷重方向にその様子が依存する特徴を持つことがわかった。そこで、バイモーダル塑性理論が三つの降伏関数の組み合わせで表現されることを利用して、背応力も3つの成分に分解し、それぞれが応力状態に応じて個別に発展するようなマクロ構成則を構築した。数値材料試験で得られた様々な応力経路の応力-ひずみ曲線および降伏曲面は、この材料構成則によって、精度良くフィッティングできることを確認した。古典的な Hill の異方性弾塑性構成則では、一部の応力経路において著しく精度の悪いフィッティング結果となったことから、本研究で提案した材料構成則の有用性も確認できた。

- 3) ポリカーボネート樹脂をマトリックスとした CFRTP について、粘弾性・塑性、さ

らに損傷の問題が混在した条件におけるマクロ材料挙動を解析対象とした。ポリカーボネート樹脂単体に引張・除荷の実材料試験を実施して、応力-ひずみ曲線を観察した結果、

- ・ 除荷時と再負荷時で曲線が異なること
- ・ 荷重をゼロに取り除いても永久ひずみが残ること
- ・ 除荷時の接線勾配が初期の弾性率よりも低いこと

から、粘弾性・塑性・損傷全ての特徴を持つことを確認した。そこで、これら三つの非弾性挙動を統合した等方性材料構成則を構築し、カーブフィットを行った。そして、同定された材料物性値を用いて、CFRTPの数値材料試験を行い、マクロな異方性材料挙動を観察した。その結果、マクロ相当ひずみが同一であっても、変形モードに応じて程度の異なる損傷挙動が現れることを確認した。また、塑性だけを考慮した考察結果とは異なり、等方硬化挙動に近い特徴を有することも確認された。これらの挙動は、本研究がこれまで提案してきた異方性の粘弾性とバイモーダル塑性理論を基本とした塑性の構成則に、異方性損傷を組み合わせた材料構成則を構築することで、ある程度傾向が捉えられることを確認した。特に二軸応力場においても、その傾向を確認できたことは、本研究独自の成果であり、バイモーダル塑性と粘弾性を組み合わせたことによる結果である。

なお、上記の材料構成則は平面応力状態を仮定した定式化を構築した。一般的に、CFRTPは薄いシート状の層を複数枚重ね合わせて用いるためである。そこで最後に、同定されたマクロ材料物性値を用いて、積層シェル要素を用いたマクロ構造解析および局所化解析によるマルチスケール解析一連の流れを例示した。様々な繊維配向や積層パターンで解析を行って、それぞれの結果の大小関係を相対比較することで、定義した繊維の向きが正しく反映されたマクロ解析が実施できていることが定性的に確認した。さらに、厚さ方向の相当機械ひずみの分布を、マ

クロ解析結果と局所化解析結果の両方で確認した。その結果、材料設計において最も危惧すべき、最大の相当機械ひずみの発生する層(=最弱層)が、マクロ構造解析と局所化解析で異なることを確認した。すなわち、実製品の強度評価において、マクロ構造解析のみから結果評価を行うと、最弱層を誤判定するリスクがあるため、局所化解析によってミクロな視点で結果を評価することも重要であると言える。

本研究では、熱可塑性樹脂が持つ純弾性的ではない材料挙動として粘弾性・弾塑性・損傷の3つの特徴に着目して、これらを炭素繊維で一方向に強化した場合の異方性材料挙動を観察してきた。さらにその観察結果を正確に引き継いでマクロ構造解析を実施するための新しい材料構成則を提案してきた。一般的に産業界で広く用いられる汎用FEM解析ツールでは、このように複数の特徴を混在させた問題を解くことは稀である。材料構成則が複雑になると、要求される材料試験データの種類が膨大になり、実材料試験データの準備を前提とする従来の解析アプローチには適用に限界があるためである。実際、今回行った繊維に角度をつけたOff-Axis材に対する実材料試験を模擬した解析では、今回提案した材料構成則と古典的な材料構成則には大きな結果の差が見られなかったが、ミクロモデルを用いた数値材料試験で様々な応力比で検証を行うと、明らかに古典的な材料構成則では正しく材料応答が再現できていない条件が散見された。この結果は、一般的に実施が容易な引張モードに立脚した実材料試験のみでは、CFRTPの異方性材料挙動を正確に把握しきれていないことを示唆してしており、多軸応力場の条件を柔軟に与えることのできる数値材料試験の有用性も本研究にて示すことができたと言える。数値材料試験は、実材料試験では実現が困難な試験環境を容易に作り上げることができるため、実材料試験のみの観察では見られなかった新しい知見が得られるポテンシャルを持っている。実材料試験を模擬することが中心であった従来のCAEとは全く異なった活用法が例示できたと考える。

一方で、数値材料試験は解析に用いるマイクロモデルの情報が既知であることが前提とされる。今回は樹脂材料の特徴がCFRTPのマクロ特性に与える影響に着目したため、例えば材料界面のような機械挙動の把握が困難な領域に対しては、完全固着とするなど理想的な条件を仮定した。また、微小ひずみを仮定し、2%以内のマクロひずみを考察対象とした。損傷が大きく発展すれば、マクロボイドやクラックの発生や進展も生じることが予想されるが、そのような影響は考えていない。損傷構成則では、静的な荷重増加に伴う剛性低下の現象だけを定式化に組み込んだため、たとえ微小ひずみ範囲であっても、繰り返し载荷時の疲労に伴う損傷も適用の範囲外である。

とはいえ、CAE解析は、実現象と定量的に極めて高精度で一致した結果を得るだけで目的ではない。むしろ定性的な評価を前提として、異なる条件下における解析結果を相対比較することから設計に必要な情報としてフィードバックすることの方が多し。材料データベースも材料構成則も不足している複合材料の分野では、そういった定性的評価ですらも、十分に行えない現状があった。本研究で提案する実材料試験と数値材料試験を併用したマルチスケール解析アプローチは、その問題を打開する極めて有用な手法である。数値材料試験による材料設計情報を得ることに限らず、本研究が提案する材料構成則を用いることで、先に示した前提条件の範囲内において、製品設計レベルの情報を得ることにまで貢献できる。依然として改善することのない地球環境問題に対し、世間から受ける複合材料への期待はとても大きい。今後、益々いろいろな分野や用途での利用が加速していくであろう。その時、材料利用に先立ち、まずはじめに知らなければならない情報は、本研究が考察してきたような材料特性である。本研究が提案する解析アプローチがそのための取り組みに貢献できることを期待する。

補遺A 本研究で用いるユニットセルモデルの 選定

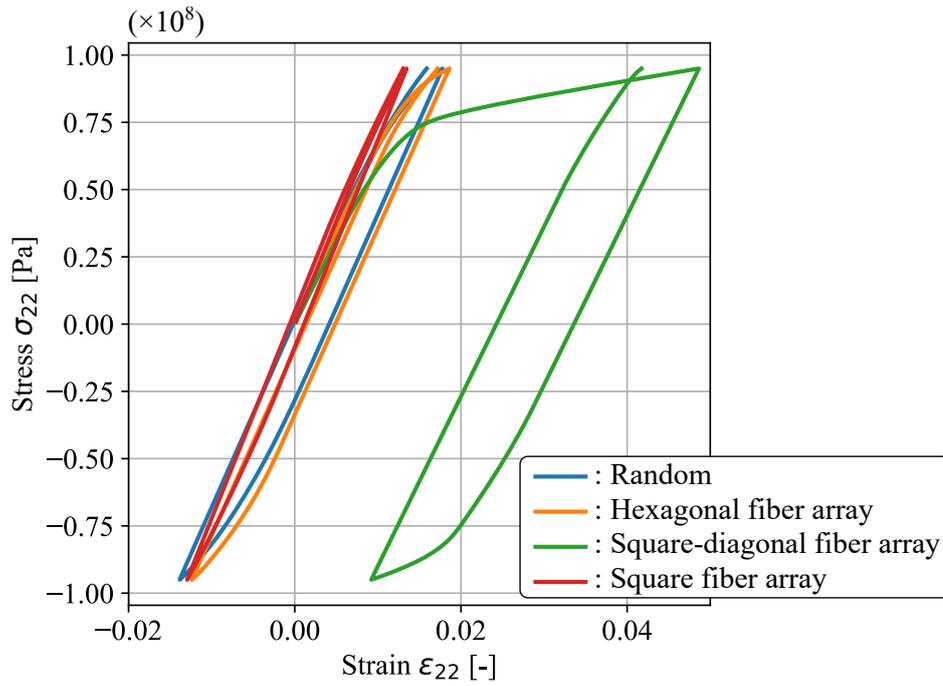
本研究で行う数値材料試験で用いる有限要素モデルについて説明する。なお、ここで紹介する繊維配置は、本論文全体で同じ設定を用いる¹。本研究の解析対象は炭素繊維を一方向に配向させたFRPである。均質化法に基づく数値材料試験では、ユニットセルモデルに対して周期対称性を仮定するが、織物材や組物材とは異なり、一方向CFRPは微視構造を構成する繊維一本一本の位置を制御しながら製造することができないため、ランダム性を排除することができず、厳密には周期対称性を有した形状を有していない。そのため、何らかの理想化した解析モデルを準備する必要がある。顕微鏡で観察された実際の構造の画像情報を2値化して材料界面を抽出し、STLデータを抽出する手法を採用した研究例もあるが、解析コストが膨大となり、材料設計のためにケーススタディを行うことは現実的ではなく、用途がかなり限定されるため本研究では採用しない。理想化したユニットセルでは、繊維を立方体形状の中心のみに配置した例や¹⁰³⁾、正六面体の頂点に配置した例^{104,105)}、ランダム配置された例¹⁰⁶⁾などのバリエーションが存在する。様々なユニットセルを用いて解析による精度検討を行った研究例はあるが¹⁰⁷⁾、破壊関連の特性のみに注目しており、本研究が議論する粘弾性応力緩和特性や非線形の応力-ひずみ特性にまで踏み込んで検証した例は少ない。

¹ 繊維の体積含有率については、実試験片では厳密に制御することができず、若干のばらつきがあるため各章で若干異なる

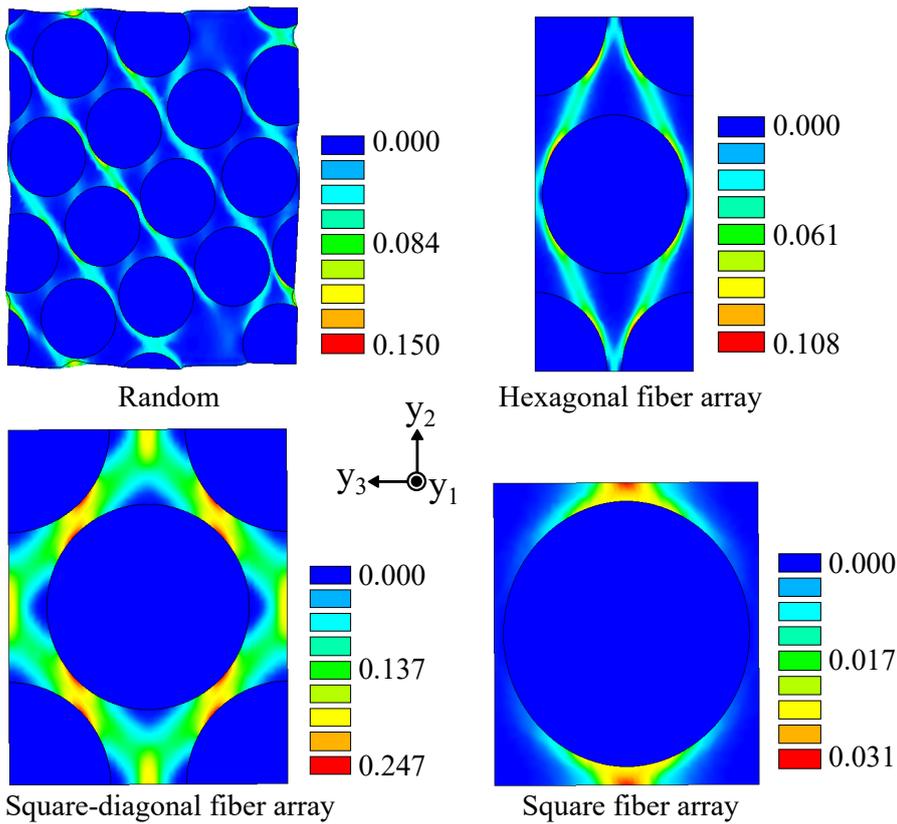
そこで、繊維をランダムに配置したユニットセル (Random モデル) と、繊維配置を理想化した 3 種類のユニットセルモデル (Square-diagonal モデル, Square-fiber モデル, Hexagonal-diagonal モデル) による解析結果と比較した。Square-diagonal モデルと Square-fiber モデルはユニットセルを切り出す角度が異なるだけで、繊維の並びは同じであり、いずれも幾何学的に充填できる最大の繊維体積含有率は約 78.5%と知られている。Hexagonal-diagonal 配置では、繊維が 90.7%程度まで充填できるため、78.5%を超える繊維含有率では、必然的に Hexagonal-diagonal モデルに近い傾向のマイクロ構造を持つことになる。しかしながら、実用上の一方向強化 FRTP では、一般的に 60~70% 程度の体積含有率が使われるため、どのような微視構造が適切であるかは自明ではない。繊維垂直方向の単軸引張圧縮のサイクリック試験を実施して応力-ひずみ曲線を評価した結果を Figure-A.1 に示す。マイクロモデルは y_1 方向を繊維配向とし、平面応力を仮定する際には y_3 方向を面外方向と仮定する。材料物性値として、マトリクスには熱可塑性エポキシ樹脂の弾塑性特性を適用し、炭素繊維は直交異方性の弾性特性を適用した。立方体の中心と 4 隅に繊維を配置した Square-diagonal モデルでは、他と比較して極端に柔らかい性質を持つ。ところが、立方体の中心のみに繊維を配置した Square-fiber モデルは、荷重と平行な方向に繊維が規則正しく整列しているため、他のモデルと比較して硬めの結果が得られる。つまり、繊維を基盤の目状に規則正しく並べた繊維配置は、繊維と垂直な $y_2 - y_3$ 面内においても強い異方性がある。一方、Hexagonal-diagonal モデルはそのような異方性挙動が現れないように繊維を配置した構造であり、実構造とは完全に一致しているとは言えないものの、ある程度のランダム性を有していると思われる実際の微視構造の平均的な応答をとらえられているものと期待する。実際、Figure-A.1 に示す Hexagonal-diagonal モデルの応力-ひずみ曲線は、Random モデルにおける曲線と類似した応答を示している。次に Figure-A.2 に平面応力状態を想定した場合の面内成分に対応する $y_1 - y_2$ 成分に荷重を与えた純せん断モードにおいて、同様の指標に基

づいて評価した結果を示す。応力-ひずみ曲線は全てのマイクロ構造において、異なる特徴を示していることから、どの微視構造が妥当であるかを決定することは困難である。これは、せん断応答は繊維位置に対して比較的高い感度で影響を受けることを示唆している。しかしながら、本研究の目的であるマクロ材料挙動の特徴づけを行い、その材料構成則を提案する目的においては、詳細な考察は不要とであると考える。繊維垂直方向の $y_2 - y_3$ 面内では疑似等方的でマイクロモデルを構成する繊維本数が最小限で計算効率が高い点の方が重要と考え、Hexagonal fiber array モデルを採用することとする。

続いて、解析効率の向上を目的に、繊維方向のユニットセルサイズの検討を行った。今回のマイクロモデルは $y_2 - y_3$ 面のエリアを y_1 軸方向に押し出した形状をしているため、 y_1 方向のユニットセルサイズが一意に定まらない。そこで、Figure-A.3 に示すような、様々なサイズのマイクロモデルを準備して、同じ境界条件のもと、数値材料試験の結果を比較した。要素サイズは全体的におおよそ $0.025[\mu\text{m}]$ となるように設定した。これは、繊維方向に最も薄いマイクロモデルにおいて、その厚み方向に4分割されるサイズに対応する。解析結果を Figure-A.4 に示す。ここでは、 $y_1 - y_2$ 方向の純せん断モードの試験を行った。同図に示しているみかけの応力-ひずみ曲線、マイクロモデル内の相当塑性ひずみ分布共に、繊維方向のセルサイズには依存せずほぼ同じ結果となることが確認できた。そこで、本研究では、今回検証した中で最も解析規模の小さい繊維方向厚さ $0.1[\mu\text{m}]$ のマイクロモデルを採用することとする。

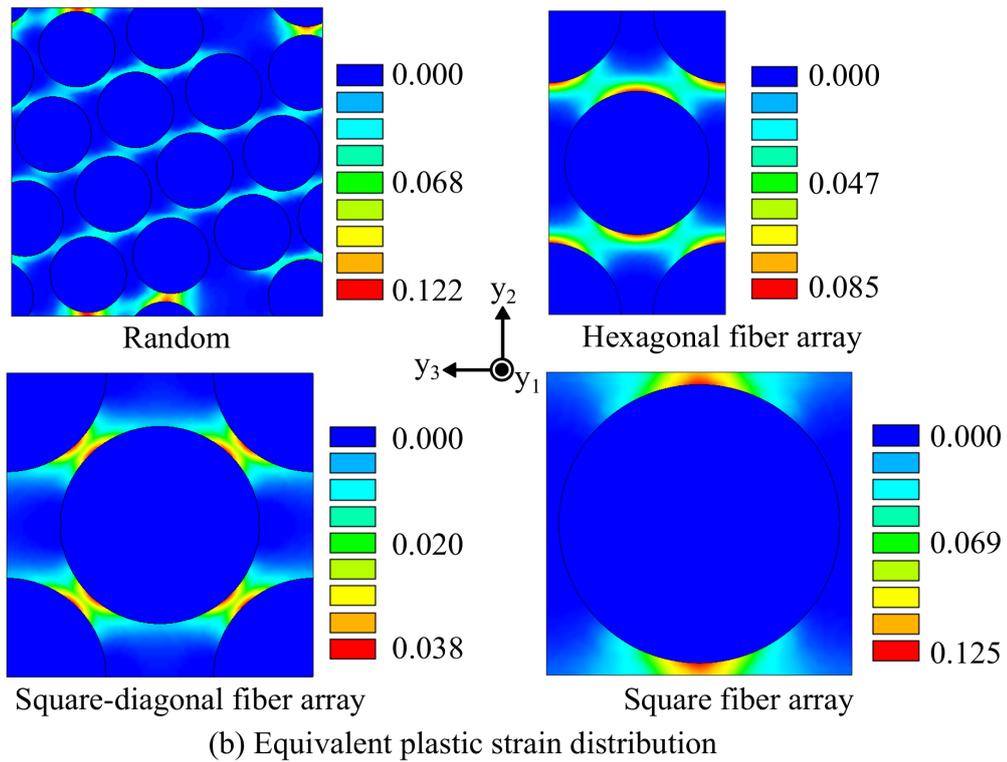
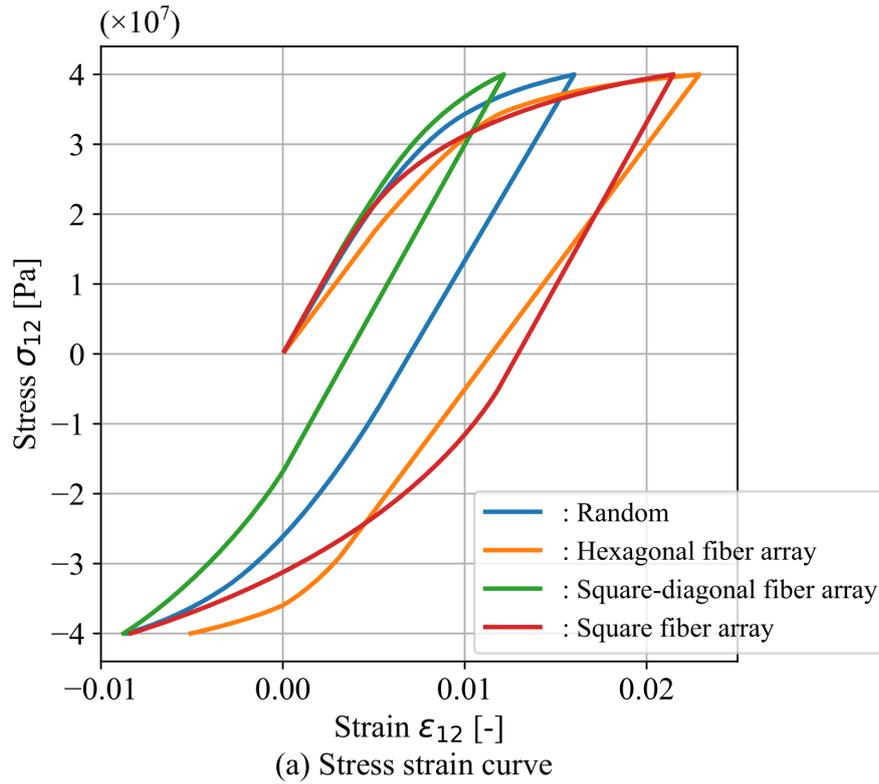


(a) Stress strain curve

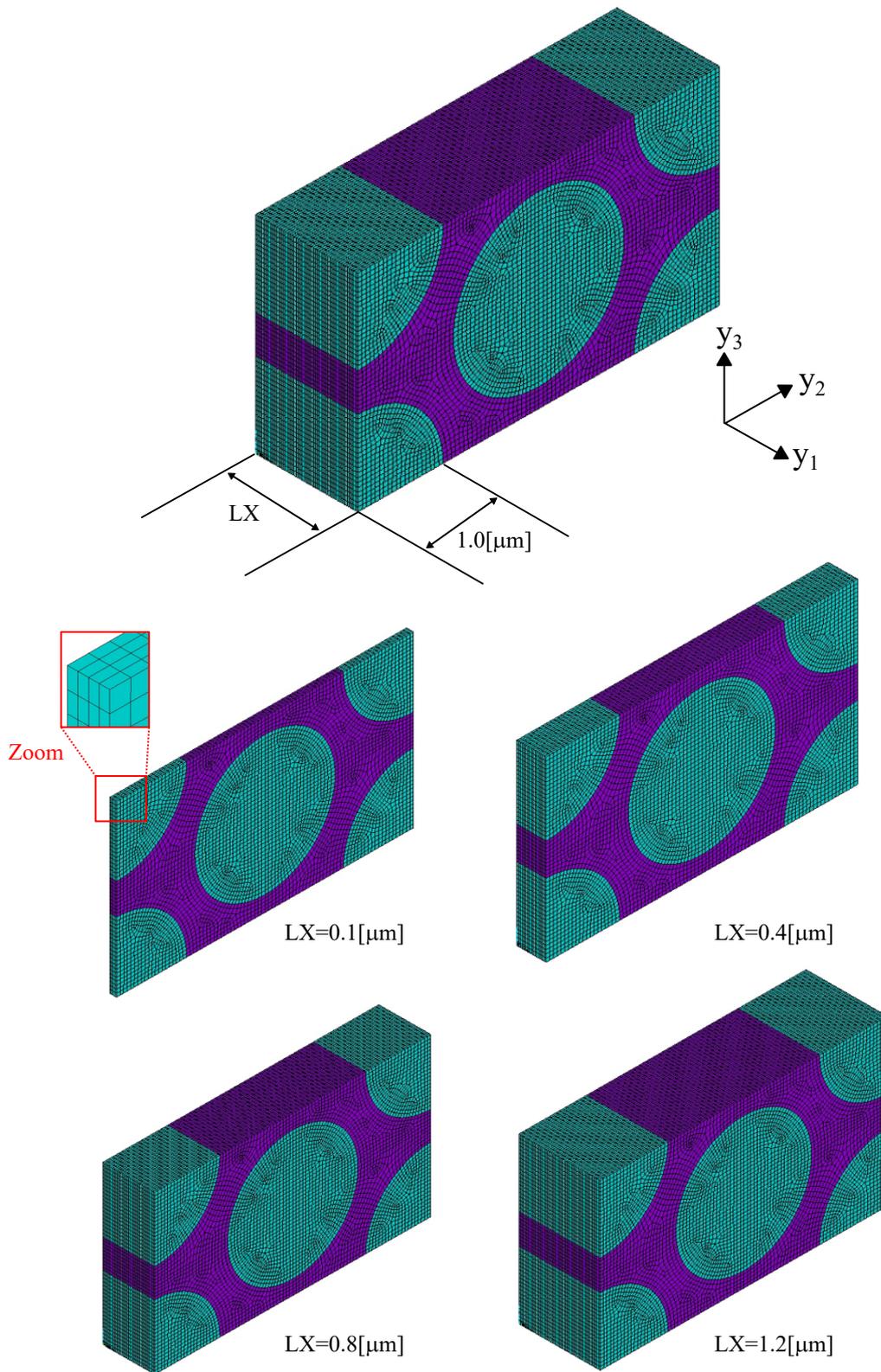


(b) Equivalent plastic strain distribution

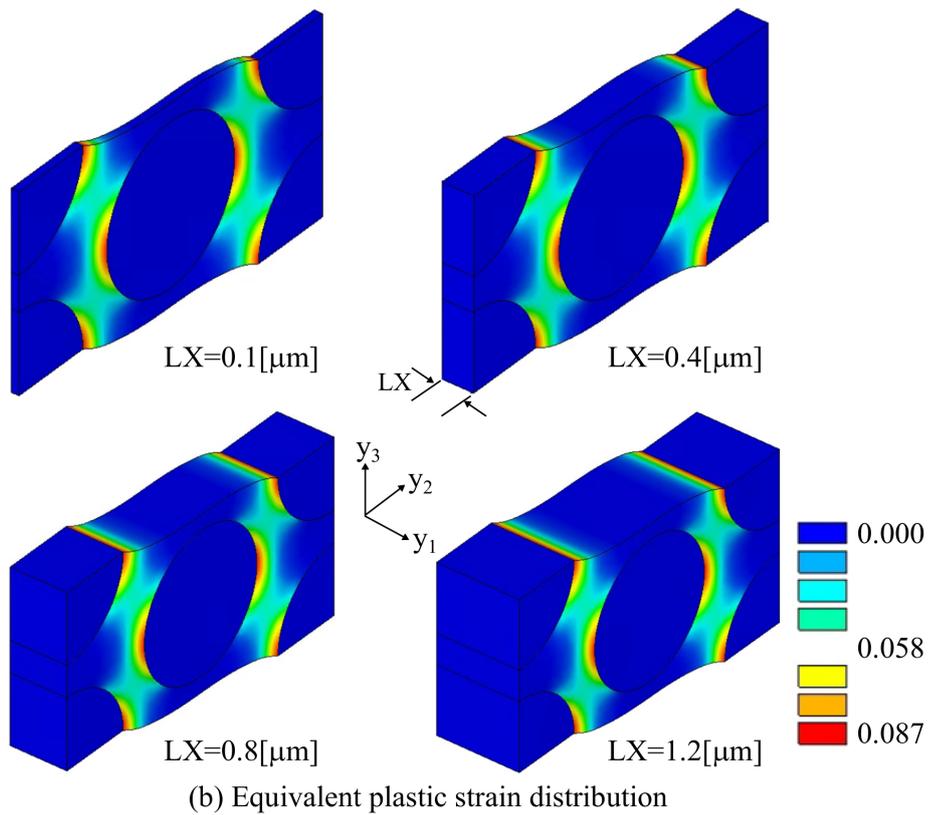
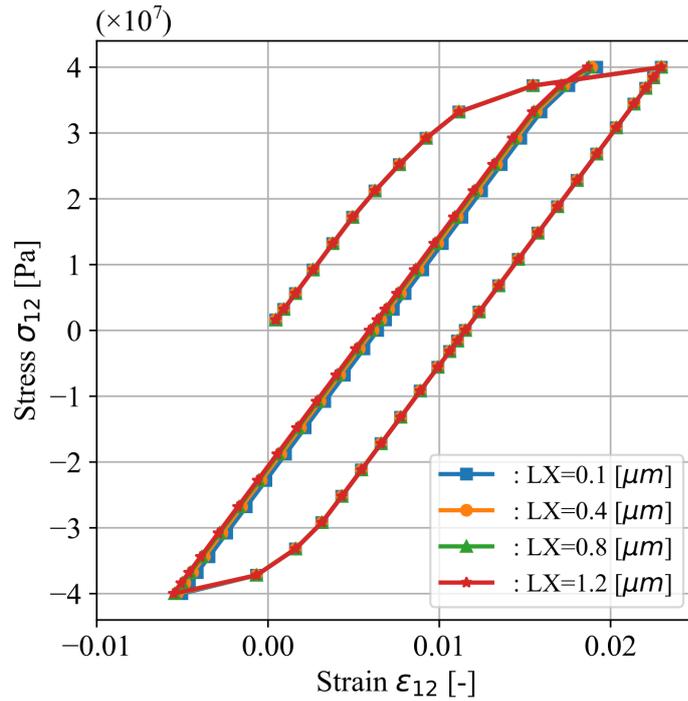
Figure– A.1 Macroscopic stress strain curve obtained by virtual material test for uniaxial tension-compression mode of 22 direction.



Figure– A.2 Macroscopic stress strain curve obtained by virtual material test for pure shearing mode of 12 direction.



Figure– A.3 Four types of FE model in order to decide the thickness of unit cell for fiber oriented direction.



Figure– A.4 Result comparison of numerical material testing for four types of FE models shown at FigureA.3. Boundary conditions for pure sharing mode are defined.

参考文献

- 1) Kagermann W.W.H., Helbig J., Wahlster W., Recommendations for Implementing The Strategic Initiative Industrie 4.0. Final report of the Industrie 4.0 Working Group. Forschungsunion, pp. 1-84 (2013).
- 2) Maocai Shen, Wei Huang, Ming Chen, Biao Song, Guangming Zang, Yaxin Zhang, Micro Plastic crisis: Un-ignorable contribution to global greenhouse gas emissions and climate change, Journal of Cleaner Production, Vol.254 (2020).
- 3) Chevonne Reynolds, Peter G. Ryan, Micro-Plastic ingestion by waterbirds from contaminated wetlands in South Africa, Marine Pollution Bulletin, Vol.126, pp.330-333 (2018).
- 4) Kim J., Lee H.J., Kim S. K., Kim H. J., Global Pattern of Microplastics in Commercial Food-Grade Salts: Sea Salt as an Indicator of Seawater MP Pollution, Environment Science (2018).
- 5) Elviz George, Michael Pecht, RoHS compliance in safety and reliability critical electronics, Microelectronics Reliability, Vol.65, pp.1-7 (2016).
- 6) Nada Maamoun, The Kyoto protocol: Empirical evidence of a hidden success, Journal of Environmental Economics and Management, Vol.95, pp.227-256 (2019).

- 7) Erkan Erdogdu, Turkish support to Kyoto Protocol: A reality or just an illusion, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol.14, pp.1111-1117 (2010).
- 8) Lee Chung Lau, Keat Teong Lee, Adbul Rahman Mohamed, Global warming mitigation and renewable energy policy development from the Kyoto Protocol to the Copenhagen Accord A comment, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Vol.16, No.7, pp.5280-5284 (2012).
- 9) Hiroaki Miyagawa, Chiaki Sato, Thomas Mase, Edward Drown, Lawrence T. Drzal, Kozo Ikegami, Transverse elastic modulus of carbon fibers measured by Raman spectroscopy, *Materials Science and Engineering A*, Vol.412, pp.88-92 (2005).
- 10) C. Sauder, J. Lamon, Prediction of elastic properties of carbon fibers and DVI matrices, *Carbon*, Vol.43, pp.2044-2053 (2005).
- 11) Shanghong Duan, Fang Liu, Torbjorn Pettersson, Claudia Creighton, Leif E. Asp, Determination of transverse and shear moduli of single carbon fibers, *Carbon*, Vol.158, pp.772-782 (2020).
- 12) Volker M., The composites industry: plenty of opportunities in heterogeneous market, *Reinforced Plastics*, Vol. 62, Issue 1, pp.44-51 (2018).
- 13) (No authors available), US composites market on the up, *Reinforced Plastics*, Vol. 57, Issue 3, pp.37-39 (2013).
- 14) (No authors available), Composites market in Turkey set for growth, *Reinforced Plastics*, Vol. 57, Issue 1, pp.43-44 (2013).
- 15) J.D.Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems., *Proc. Roy. Soc. Lond*, Vol.A241, pp.376-396 (1957).

- 16) T. Mori, K. Tanaka, average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, Vol.21, No.5, pp.571-574 (1973).
- 17) Jan Vorel, Jan Sykora, Michal Sejnoha, Two Step Homogenization of Effective Thermal Conductivity for Macroscopically Orthotropic C/C composites, *Bulletin of Applied Mechanics*, Vol.4, No.14, pp.48-53 (2008).
- 18) B.Gommers, I. Verpoest, P. Van Houtte, The Mori–Tanaka method applied to textile composite materials, *Acta Materialia*, Vol.46, No.6, pp.2223-2235 (1998).
- 19) 寺田賢二郎, 菊池昇, 均質化法入門, 丸善 (2003).
- 20) Sanchez, P.E., *Non-homogeneous media and vibration theory*, Springer-Verlag (1980).
- 21) Terada, K., Kato, J., Hirayama, N., Inugai, T. and Yamamoto, K., A method of two-scale analysis with micromacro decoupling scheme: application to hyperelastic composite materials, *Computational Mechanics*, Vol.52, pp.1199-1219 (2013).
- 22) 平山紀夫, ANSYS を利用したマルチスケール CAE ~ANSYS を利用した数値材料試験~, CAE のあるものづくり, Vol.6, pp.11-15 (2007).
- 23) 寺田賢二郎, 犬飼壮典, 平山紀夫, 非線形マルチスケール材料解析における数値材料実験, *機械学会論文集 A 編*, Vol.74, No.744, pp.1084-1094 (2008a).
- 24) 寺田賢二郎, 犬飼壮典, 濱名康彰, 見寄明男, 平山紀夫, 数値材料試験による異方性超弾性体のパラメータ同定, *計算工学会論文集*, Vol.2008, 論文番号 20080024 (2008b).
- 25) 寺田賢二郎, 濱名康彰, 平山紀夫, 繊維の粘弾性マルチスケール解析手法, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.75, No.760, pp.1674-1683 (2009).

- 26) Terada, K., Kikuchi, N., Nonlinear homogenization for practical applications, *Computational Methods in Micromechanics*, AMD-Vol.212, pp.1-16 (1995).
- 27) Terada, K., Kikuchi, N., A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, No.40-41, pp.5427-5464 (2001).
- 28) 荒井政大, 角孝平, 伏見祐介, 松田哲也, 均質化法を用いた CFRP 積層板の粘弾性構成式の評価, *計算数理論文集*, Vol.8 (2008).
- 29) Sun, C.T. and Chen, J.L., A Simple Flow Rule for Characterizing Nonlinear Behavior of Fiber Composites, *Journal of Composite Materials*, Vol.23, pp.1009-1020 (1989).
- 30) Gates, T.S. and Sun, C.T., Elastic/Viscoplastic Constitutive Model for Fiber Reinforced Thermoplastic Composites, *AMA Journal*, Vol.29, No.3, pp. 457-463 (1991).
- 31) Yoon, K.J. and Sun, C.T., Characterization of Elastic-Plastic Behavior of an AS4/PEEK Thermoplastic Composite, *Journal of Composite Materials*, Vol.25, pp. 1277-1296 (1991).
- 32) Wang, C, and Sun, C.T., Experimental Characterization of Constitutive Models for PEEK Thermoplastic Composite at Heating Stage During Forming, *Journal of Composite Materials*, Vol.31, No.15, pp. 1480-1506 (1997).
- 33) Tsai, J. and Sun, C.T., Constitutive Model for High Strain Rate Response of Polymeric Composites, *Composites Science and Technology*, Vol.62, pp. 1289-1297 (2002).
- 34) 河井昌道, 益子誉一, 一方向繊維強化複合材料の非主軸粘弾性挙動に関する現象論的定式化とシミュレーション, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.68, No.672, pp. 1228-1235 (2002).

- 35) 河井昌道, 益子誉一, CFRP 対称アングルプライ積層板の高温におけるクリープ挙動とその解析, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.69, No.686, pp. 1473-1481 (2003).
- 36) 竹内ふみ, 河井昌道, 張剣奇, 松田哲也, クロスプライ CFRP 積層板の高温における非主軸引張挙動の速度依存性とその解析, 日本複合材料学会誌, Vol.32, No.6, pp.254-261 (2006).
- 37) Matsuda, T., Ohno, N., Tanaka, H. and Shimizu, T., Effects of fiber distribution on elastic-viscoplastic behavior of long fiber-reinforced laminates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.45, pp.1583-1598 (2003).
- 38) 宮野靖, 金光学, 国尾武, CFRP 繊維直角方向の力学的挙動の時間-温度依存性, 材料, Vol.28, No.314, pp.1098-1103 (1979).
- 39) 平山紀夫, 三木恭輔, ビニルエステル樹脂をマトリックスとするガラス短繊維強化プラスチックの動的粘弾性および曲げクリープ挙動, 日本複合材料学会誌, Vol.27, No.3, pp.146-154 (2001).
- 40) 岩本典之, 宗宮詮, 熱可塑性ポリイミド系 CFRTP のクリープコンプライアンスに及ぼす繊維含有率の影響, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.61, No.589, pp.1951-1956 (1995).
- 41) 金光学, 宮野靖, 国尾武, CFRP 繊維方向の曲げ強度の時間-温度依存性, 材料, Vol.33, No.370, pp.869-875 (1984).
- 42) Sullivan, J. L, Creep and physical aging of composites, *Composites Science and Technology*, Vol.39, pp.207-232 (1990).
- 43) 宮野靖, 笠森正人, 平桜康晴, エポキシ樹脂およびそれをマトリックスとする CFRP 繊維直角方向の曲げクリープ挙動, 日本複合材料学会誌, Vol.19, No.1, pp.20-25 (1993).

- 44) 宮野靖, 後藤康一, 笠森正人, 中田政之, エポキシ樹脂のクリープ変形に及ぼすフィジカルエージングの評価, 材料, Vol.44, No.506, pp.1367–1371 (1995).
- 45) 坂井建宣, 宗宮詮, ガラス繊維強化ポリカーボネートのクリープ挙動に及ぼすフィジカルエージングの影響, 材料, Vol.56, No.5, pp.399-405 (2007).
- 46) 寺田賢二郎, 濱名康彰, 平山紀夫, 繊維強化プラスチックの粘弾性マルチスケール解析手法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.60, No.760, pp.1674–1683 (2009).
- 47) 高橋 寛, 多結晶塑性論, コロナ社 (1995).
- 48) R. Hill: Proc. R. Soc. Lond., A193, 281–297 (1948).
- 49) R. W. Logan and W. F. Hosford: Int. J. Mech. Sci., Vol.22, pp.419–430 (1980).
- 50) F. Barlat and J. Lian: Int. J. Plastic., Vol.5, pp.51–66 (1989).
- 51) F. Barlat, J. C. Brem, J. W. Yoon, K. Chung, R. E. Dick, D. J. Lege, F. Pourboghrat, S. H. Choi and E. Chu: Int. J. Plastic., Vol.19, pp.1297–1319 (2003).
- 52) F. Barlat, H. Aretz, J. W. Yoon, M. E. Karabin, J. C. Brem and R. E. Dick: Int. J. Plastic., Vol.21, pp.1009–1039 (2005).
- 53) F. Yoshida, H. Hamasaki and T. Uemori: Int. J. Plastic., Vol.45, pp.119–139 (2013).
- 54) 山本 晃司, 平山 紀夫, 寺田 賢二郎, 数値材料試験データに基づく異方性 Hill 定数の同定, Vol.82, No.840 (2016).
- 55) EA de Souza Neto, D. Peric, D.R.J. Owen, 寺田賢二郎翻訳, 非線形有限要素法-弾塑性解析の理論と実践-, 森北出版, (2012).
- 56) Mulhern, J.F., Rogers, T.J., Spencer, A.J.M., A continuum model for fibre-reinforced plastic materials. Proc. R. Soc. A, Vol.301, pp.473–492 (1967).

- 57) Mulhern, J.F., Rogers, T.J., Spencer, A.J.M., A continuum theory of a plastic-elastic fibre-reinforced materials. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol.7, pp.129–152 (1969).
- 58) H. Dal, M. Kaliske, Bergstrom-Boyce Model for Nonlinear Finite Rubber Viscoelasticity: Theoretical Aspects and Algorithmic Treatment for the FE Method, *Computational Mechanics*. Vol.44, pp.809-823 (2009).
- 59) Rex Bedzra, Stefanie Reese, Jaan Willem Simon, Meso-macro modelling of anisotropic metallic composites within the framework of multisurface plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.120, No.1, pp.186-198 (2017).
- 60) H. Nigam, G.J. Dvorak, Bahei-El-Din, An experimental investigation of elastic-plastic behavior of a fibrous boron-aluminum composite: I. matrix-dominated mode, *International Journal of Plasticity*, Vol.10, No.1, pp.23-48 (1994).
- 61) 西田裕文, 熱可塑性エポキシ樹脂およびそれを用いた連続繊維強化熱可塑性プラスチックの開発, *日本接着学会誌*, Vol.51, No.12, pp.516-523 (2015).
- 62) H. Nigam, G.J. Dvorak, Bahei-El-Din, An experimental investigation of elastic-plastic behavior of a fibrous boron-aluminum composite: II. Fiber-dominated mode, *International Journal of Plasticity*, Vol.10, No.1, pp.49-62 (1994).
- 63) 隠田 敬二, 小笠原 俊夫, 横関 智弘, 荻原 慎二, 一方向 CFRP および GFRP のねじり挙動, *日本複合材料学会*, Vol.33, NO.2, pp.48-54 (2007).
- 64) 岡部朋永, 石井健介, 西川雅章, 武田展雄, 一方向 CFRP 複合材料の引張強度予測, *日本複合材料学会*, Vol.33, No.6, pp.205-212 (2007).
- 65) Chin Teh Sun, Ilsup Chung, An oblique end-tab design for testing off-axis composite specimens, *Composite*, Vol.24, pp.619-623 (1993).

- 66) J.C. Marín, J. Justo, A. Barroso, J. Cañas, F. París, On the optimal choice of fibre orientation angle in off-axis tensile test using oblique end-tabs : Theoretical and experimental studies, *Composite Science and Technology*, Vol.178, pp.11-25 (2019).
- 67) G.J. Dvorak, Y.A. Bahei-El-Din, A Bimodal Plasticity Theory of Fibrous Composite Materials, *Acta Mechanica*, Vol.69, pp.219-241 (1987).
- 68) Kostas P. Solders, The bimodal theory of plasticity: A form-invariant generalisation, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* Vol.59, pp.1576-1595 (2011).
- 69) Prager W., A new method of analysing stresses and strain in work-hardening plastic solids, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.23, pp.493-496 (1956).
- 70) Armstrong P.J., Frederick C.O., A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect, CEGB Report RD/B/N731, Berkeley Nuclear Laboratories (1966).
- 71) Armstrong P.J., Frederick C.O., A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect, *Materials at High Temperatures*, Vol.24, pp.1-26 (2007).
- 72) Chaboche J.L., Rousselier G., On the plastic and viscoplastic constitutive equations —Part I: Rules developed with internal variable concept, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol.105 No.2, pp.153-158 (1983).
- 73) Chaboche J.L., Rousselier G., On the plastic and viscoplastic constitutive equations—Part II: application of internal variable concepts to the 316 stainless steel, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol.105, No.2, pp.159-164 (1983).
- 74) Khan, A.S., Kazmi, R., Pandey, A., Stoughton, T., Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part-I: A very low work hardening aluminum alloy (Al6061-T6511). *Int. J. Plast.*, Vol.25, pp.1611–1625 (2009).

- 75) Daisaku Yanaga, Hideo Takizawa, Toshihiko Kuwabara, 6000系アルミニウム合金板の異方硬化の定式と有限要素解析への適用, *Journal of the JSTP*, Vol.55, No.636, pp.55-61 (2014).
- 76) H. Ishikawa, SURSEQUENT YIELD SURFACE PROBED FROM ITS CURRENT CENTER, *International Journal of Plasticity*, Vol.13, No.6, pp.533-549 (1997).
- 77) Baltov A., Sawczuk A., A rule of anisotropic hardening, *Acta. Mech*, Vol.1, No.2, pp.81-92 (1964).
- 78) A.V. Shutov, J. Ihlemann, A viscoplasticity model with an enhanced control of the yield surface distortion, *International Journal of Plasticity*, Vol.39, pp.152-167 (2012).
- 79) Kurtyka T., Zyczowski M., A geometric description of distortional plastic hardening of deviatoric materials, *Arch. Mech.* Vol.37, pp.383-395 (1985).
- 80) Panhans S., Kreißig R., A viscoplastic material model of overstress type with a non-quadratic yield function, *Euro. J. Mech. A/Solids*, Vol.25, pp.283-298 (2006).
- 81) 瀧澤英男, 均質化法によるパンチングメタルの数値材料試験, 平成26年度塑性加工春季講演会論文集, pp.343-344 (2014).
- 82) J. Lemaitre, A. Plumtree, Application of damage concepts to predict creep-fatigue failures. *American Society of Mechanical Engineers*, 78-PVP-26, pp. 10-26 (1978).
- 83) E. J. Barbero, F.A.Cosso, R. Roman, T.L.Weadon, Determination of material parameters for Abaqus progressive damage analysis of E-Glass Epoxy laminates, *Composites Part B: Engineering*, Vol.46, No.3, pp.211-220 (2012).
- 84) I.N.Rabotnov. *Problems of the Mechanics of a Deformable solid body*, Moscow Izdatel Nauka, (1991)

- 85) L.M.Kachanov. On the creep fracture time. *Izv, Akad. Nauk USSR*, 8:26-31, (1958)
- 86) J.Janson, J.Hult, Fracture mechanics and damage mechanics: A combined approach, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.1, pp.18-28 (1977).
- 87) D.Krajcinovic, Damage mechanics. *Mechanics of Materials*, Vo.8, pp.117-197 (1989).
- 88) D.Krajcinovic, J.Trafimow, D.Sumarac. Simple constitutive model for a cortical bone. *Journal of Biomechanics*, Vol. 20, pp.779-784 (1987).
- 89) D.Krajcinovic, D.Fanella, Micromechanical damage model for concrete, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.25, pp.585-596 (1985).
- 90) B.W.Rosen, The tensile failure of fibrous composites. *AIAA Journal*, Vol.2, pp.1985-1991 (1964).
- 91) B.W.Rosen. *Fiber Composite Materials : Chapter 3*, American Society for Metals, Metals Park, OH (1965).
- 92) E.J.Barbero. Prediction of compression strength of unidirectional polymer matrix composites, *Journal of Composite Materials*, Vol.32, pp.483-502 (1998).
- 93) E.J.Barbero, L.A.Godoy, I.G.Raftoyiannis, Finite elements for three-mode interaction in buckling analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.39, pp.1019-1028 (1995).
- 94) J.S.Tomblin, E.J.Barbero, L.A.Godoy, Imperfection sensitivity of fiber micro-buckling in elastic-nonlinear polymer-matrix composites, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.34, pp.1667-1679 (1997).

- 95) D.C.Lagoudas, A.M.Saleh, Compressive failure due to kinking of fibrous composites, *Journal of Composite Materials*, Vol.27, pp.83-106 (1993).
- 96) P.Steif, A model for kinking in fiber composites. I. Fiber breakage via micro-buckling, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.26, pp.549-561 (1990).
- 97) S.W.Yurgartis, S.S.Sternstein, Experiments to reveal the role of matrix properties and composite microstructure in longitudinal compression strength, *ASTM Special Technical Publication*, Vol.1185, pp.193-204 (1994).
- 98) E.J.Barbero, L.Devivo, A constitutive model for elastic damage in fiber reinforced PMC laminae, *Journal of Damage Mechanics*, Vol.10, pp.73-93 (2001).
- 99) E.J.Barbero, F.Greco, P.Lonetti, Continuum damage-healing mechanics with application to self-healing composites, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol.14, pp.51-81 (2005).
- 100) K. Terada, N. Hirayama, K. Yamamoto, J. Kato, T. Kyoya, S. Matsubara, Y. Arakawa, Y. Ueno, Applicability of micro-macro decoupling scheme to two-scale analysis of fiber-reinforced plastics, *Advanced Composite Materials*, Vol. 23, Issue 5-6. pp. 421-450 (2014).
- 101) R.D.Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.18, pp.31-38 (1951).
- 102) E.Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.12, pp.68-77 (1945).
- 103) S.Siddharth, A.Ramesh, Homogenization of Mechanical Properties of Unidirectional

- Fibre Reinforced Composites with Matrix and Interface Defects: A Finite Element Approach, *Journal of Physics, Conference Series*, Vol.1355, 012040 (2019).
- 104) A.Verma, S.Vedantam, K.Akella, S.M.Sivalumar, Characterization of unidirectional fiber reinforced polymer composites manufactured through resin film infusion process using micromechanical modeling, *Materials Today: Proceedings*, Vol.24, (2020).
- 105) X.Chang, X.Gui, M.Ren, T.Li, Micromechanical matrix failure analysis for unidirectional fiber-reinforced composites, *Thin-Walled Structures*, Vol.141, pp.275-282 (2019).
- 106) Q.Sun, G.Zhou, Z.Meng, H.Gui, Z.Chen, H.Liu, H.Kang, S.Keten, X.Su, Failure criteria of unidirectional carbon fiber reinforced polymer composites informed by a computational micromechanics model, *Composites Science and Technology*, Vol.172, pp.81-95 (2019).
- 107) Z.M.Huang, *Micromechanical Failure Analysis of Unidirectional Composites*, Open access peer-reviewed chapter, DOI:10.5772/intechopen.80807 (2018)
- 108) 村上 謙吉, レオロジー基礎論, 産業図書, pp.142-143 (1991).
- 109) 曾我部雄次, 都築正之, 山本順一, 衝撃を受ける PMMA 材の粘弾性特性の三次元評価, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.53, No.486, pp.348-353 (1987).
- 110) 藤川 正毅, 三上 貴央, 隆 雅久, 三原 康子, 小林 卓哉, 線形粘弾性特性係数関数の実用的近似法, *日本機械学会論文集 A 編*, Vol.72, No.723, pp.1703-1710 (2006).
- 111) Eberhart, R.C. and Kennedy, J., A new optimizer using particle swarm theory , *Proceedings of the Sixth International Symposium on Micromachine and Human Science Nagoya, Japan*, pp.39-43 (1995).

- 112) Kennedy, J. and Eberhart, R.C., Particle swarm optimization, Proceedings of IEEE the International Conference on Neural Networks, Piscataway, NJ. (1995), pp.1942-1948.
- 113) 宮野靖, 鈴木克人, 曲げを荷重を受ける GRP 板の時間-温度依存性, 材料, Vol.23, No.255, pp.1057-1062 (1974).
- 114) ANSYS Inc., Web Site, available from <<https://www.ansys.com/>>, (参照日 2020 年 4 月 12 日).
- 115) CYBERNET SYSTEMS Co., Ltd., マルチスケール解析について, available from <<http://www.cybernet.co.jp/ansys/product/lineup/multiscale/>>, (参照日 2020 年 4 月 12 日).
- 116) 小熊広之, 熊谷知哉, 坂本大輔, 関根正裕, 平山紀夫, 邊吾一, 連続炭素繊維強化ポリカーボネートのオゾン酸化処理による強度向上, 日本複合材料学会誌, Vol.42, No.5, pp.178-184 (2016).
- 117) R. Hill and J. W. Hutchinson, Differential hardening in sheet metal under biaxial loading: A theoretical framework, J. Appl. Mech, Vol.59, pp.1-9 (1992).
- 118) R. Hill, S. S. Hecker and M. G. Stout, An investigation of plastic flow and differential work hardening in orthotropic brass tubes under fluid pressure and axial load, International Journal of Solids and Structures, Vol.31, NO.21, pp.2999-3021 (1994).
- 119) J.C.Simo, R.L.Taylor, A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.22, No.3, pp.649-670 (1986).
- 120) P. Jetteur, Implicit integration algorithm for elastoplasticity in plane stress analysis, Engineering Computations, Vol.3, pp.251-253 (1986).