博士論文

T双対不変な弦の有効理論
—計量亜代数に基づく構成と真空解—

令和３年

東北大学大学院
理学研究科物理学専攻

三浦 滉平

概 要

弦理論の背景時空はT双対性と呼ばれる特徴を持ち，そのT双対性を用いて弦理論の背景場の幾何学的な性質が調べられている．一方で，弦理論の有効理論として知られる超重力理論はT双対性に対して共変ではない．そこで，超重力理論をT双対性に対して共変な形に拡張したのが，二重場理論 (DFT) である．

しかし，従来の標準的な二重場理論は，Buscher則によって与えられる最も単純なT双対性に対してのみ共変であり，より一般的なT双対性である非アーベル的T双対性やPoisson-Lie T双対性に対しては共変ではなかった．そこで近年，これらのより一般的なT双対性に対しても共変な二重場理論としてWZW二重場理論 ($\mathrm{DFT_{WZW}}$) が提案された．しかし，このWZW二重場理論は特殊な背景時空上でしか構成がされておらず，非アーベル的T双対性やPoisson-Lie T双対性を示すような場合には二重場理論を構成することができていない．

そこで本論文では一般の背景場に拡張した場合であっても二重場理論を構成可能であることを明らかにし，その構成した新たな二重場理論が実際に従来の標準的な二重場理論やWZW二重場理論を含む拡張になっていることを示した．また，この新たな二重場理論を用いて非アーベル的T双対性やPoisson-Lie T双対性を導出可能であることを示し，これまで明らかになっていなかったユニモジュラーではない代数構造を持つ場合のPoisson-Lie T双対性を導出することに成功した．

目 次

1 導入

1.1 研究背景

物理学の基本的な相互作用は電磁気力，強い相互作用，弱い相互作用，重力である．これらの相互作用のうち電磁気力，強い相互作用，弱い相互作用の 3 つは場の量子論を用いて標準模型で記述される．一方で，重力は一般相対論によって古典的な理解に問題はないが，場の量子論を単純に適用しても発散がくりこめないことが知られている．そのため，重力の量子論的な記述は成功していない．宇宙初期といったミクロかつ高密度の物体を理論的に解明するためには，重力を含む全ての相互作用を統一的に記述する量子論が必要であると考えられており，そのような相互作用の統一理論が探索されている．現在，統一理論の最も有力な候補が弦理論である．

弦理論はその名の通り理論の構成要素が粒子ではなく，長さを持つ弦である．その特徴として，弦理論の整合性から 10 次元時空上の理論であることが知られている．一方で，現在観測されている時空は 4 次元時空であることから，6 次元空間は観測されないほど非常に小さな空間で構成されていると考えられている．典型的にはプランクスケール程度であるこの小さな 6 次元空間を余剰次元と呼ぶ．

この余剰次元を構成する方法の 1 つにコンパクト化がある．このコンパクト化の最も簡単な例として，5 次元重力を 4 次元時空と小さな S^1 に分解する Kalza-Klein コンパクト化が知られている．Kalza-Klein コンパクト化を実行すると，5 次元時空計量が 4 次元時空計量とゲージ場に分解される．同様に弦理論においても，コンパクト化によって 10 次元計量や反対称テンソル場が 4 次元の計量，反対称テンソル場，ベクトル場，スカラー場に分解される．

しかし，通常のコンパクト化によって余剰次元を構成した場合には，非常に多くの質量のない粒子が弦理論に含まれ，標準模型の構成粒子と整合しない．そのため，弦理論の有効理論として標準模型を得ることには成功していない．この問題は，通常の多様体にコンパクト化する際には回避できないと考えられている．そこで，質量のない粒子の問題を解決しようとする幾何学的なアプローチとして通常の多様体には含まれない新たな構造を持つ空間上にコンパクト化を行うという試みがある．

このような新たな構造を持つ空間を考えるためには弦理論の背景時空に特有の性質が重要になると考えられる．そのような弦理論の背景時空の特徴の 1 つに T 双対性が挙げられる [1, 2, 3]．T 双対性は異なる余剰次元を持つ弦同士の対応で T 双対性でつながる 2 つの弦は共形場理論として等価であることが示される．T 双対性の最も簡単なものは，余剰次元に半径の異なる S^1 を持つ 2 つの弦を結び付ける．この余剰次元に S^1 を持つ弦の対応を与える規則を Buscher 則 [2, 3] と呼ぶ．

Buscher 則は典型的には弦の状態の質量スペクトルの公式によって理解できる．そこで，10 次元時空のうち 1 次元を S^1 にコンパクト化した閉弦の質量スペクトルを顕わに見る．m は 9 次元時空上での弦の状態の質量スペクトル，R はコンパクト化した S^1 の半径，n は S^1 方向の運動量，w は S^1 方向に弦が何回巻き付いているかを表す巻き付き数，$N, \tilde{N}$ は弦の励起モードを表すとすると，これらは次の関係を満たす．

$$
\begin{aligned}
&m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2}{\tilde{R}^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2)\ , \qquad (*)\\
&R : S^1\text{の半径}\ ,\ \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}\ ,\\
&n : S^1\text{方向の運動量}\ ,\ w : S^1\text{方向の巻き付き数}\ ,\\
&N, \tilde{N} : \text{励起モードのラベル}\ ,
\end{aligned}
$$

この公式を見れば，$n \leftrightarrow w, R \leftrightarrow \tilde{R}$ の入れ替えで弦の質量スペクトルが不変であることが分かる．この入れ替えは半径が異なる S^1 同士を結び付けており，Buscher 則による等価性が質量スペクトルのレベルで確認できている．この対応関係の重要な点として運動量 p と巻き付き数 w が入れ替わることが挙げられる．巻き付き数は余剰次元に何回巻き付いているかを表しているため，粒子にはない弦特有の量子数である．したがって，T 双対性は粒子には存在しない，弦理論に特有の性質である．

このT 双対性を用いて構成された，通常の多様体には含まれない新たな構造を持つ空間の具体的な例として T-fold が提案されている [4, 5]．T-fold は通常の多様体と T 双対性でつながる空間であるにもかかわらず，多様体にはない特殊な性質を持っている．T-fold の特徴は，その空間上の適当な経路に沿って 1 周すると空間に埋め込まれた円の半径が R から T 双対性で対応付けられる $\tilde{R}$ に変わるということである．そのため，1 つの地点に半径の異なる 2 種類の空間が対応してしまい，通常の多様体として扱うことができない．このような特殊な性質を持つ T-fold が弦の背景時空として許される理由は，弦が半径 R の円と半径 $\tilde{R}$ の円を区別できないからである．即ち，弦が T-fold 上の適当な経路で 1 周して円の半径が R から $\tilde{R}$ に代わっていても T 双対性によって区別がつかないため，弦にとっては 1 つの地点に 1 つの空間のみが対応することになる．

このように通常の多様体で記述できない T-fold を導入した理由は，前述の弦理論に含まれる質量のない粒子が標準模型に比べて多く含まれる問題の解決をするためである．実際，T-fold の特殊な性質は弦の質量スペクトルに寄与を持つことが [6] で議論されている．故に，通常の多様体の自由度だけでは質量を持つことができない粒子であっても T-fold の自由度を加えることによって新たに質量を獲得し，弦理論に質量のない粒子が多く含まれる問題を緩和できると期待される．

現在，T-fold の特殊な性質を系統的に構成する方法は明らかになっていない．そこで，T-fold が通常の多様体の T 双対性によって得られることに注目すれば，T 双対性に共変な理論を構成することによって T-fold の特徴と通常の多様体の自由度を併せ持った空間が自然に導入できることが期待される．

しかし，弦理論の背景場の有効理論である超重力理論は T 双対性に共変ではない．実際に，超重力理論に T 双対性を行うことを考える．T 双対性は (*) で見たように運動量と巻き付き数を入れ替える．一方で，超重力理論は運動量の共役座標 x^m のみを持ち，巻き付き数の共役座標を持たないため，運動量と巻き付き数の入れ替え，即ち T 双対性に対して共変にならない．

そこで，巻き付き数の共役座標として双対座標 $\bar{x}_m$ を導入することで超重力理論を T 双対性 (特に Buscher 則) で共変に持ち上げた二重場理論 (DFT:Double Field Theory)[7, 8, 9] が構成された．二重場理論上での Buscher 則は通常の座標 x^m と双対座標 $\bar{x}_m$ の入れ替えによって実行でき，それに回転を加えた大域的変換の群 $O(D, D)$ による変換に Buscher 則は埋め込まれている．二重場理論はこの $O(D, D)$ 変換に対して明らかに共変な形で理論が構成されている．

このように導入された二重場理論は，弦理論の新たな有効理論として提案されている一般化超重力理論 (GSE:Generalized Supergravity Equations [1])[10] を含むことが指摘されている [11]．この一般化超重力理論は超重力理論の拡張として導入された理論であり，理論のパラメータのベクトル I が $I = 0$ の時に通常の超重力理論に戻る．この一般化超重力理論の解を背景場に持つ弦理論は少なくとも 1 ループまでで Weyl 不変性を回復するためのくりこみ項を構成できることが示されており [12, 13]，弦理論の新たな背景場になることが期待されている．

また，二重場理論の自由度を利用してコンパクト化することで超重力理論のコンパクト化では得られない空間が構成されている [14, 15, 16, 17]．二重場理論から提案されたこの空間には T-fold

[1]Equations と名づけられている理由は作用がなく，運動方程式のみで定義された理論であるためである．一般化超重力理論の運動方程式は超重力理論を非物理的な Killing ベクトル I^m を用いて拡張したもので $I^m = 0$ において超重力理論に帰着する．

同様に通常の多様体には含まれない新たな自由度が含まれており，この自由度が弦理論に含まれる粒子に対して質量の寄与を持っていることが指摘されている．このことは，二重場理論の研究が弦理論に含まれる質量のない粒子の問題の緩和に寄与できることを示唆している．

ここまでで，二重場理論は T 双対性 (Buscher 則) で共変な理論として構成され，新たな弦理論の背景場の候補である一般化超重力理論を含むことを述べた．しかし，二重場理論が含む T 双対性は最も簡単な Buscher 則だけであり，より複雑な空間を対応させる T 双対性として知られる，非アーベル的 T 双対性 (Non-Abelian T-duality)[18, 19, 20] や Poisson-Lie T 双対性 [21] が含まれていない．そこで，これらのより一般的な T 双対性を含むことを期待して，二重場理論を拡張した理論が WZW 二重場理論 ($\mathrm{DFT_{WZW}}$:Double Field Theory Wess-Zumino-Witten) として提案されている [22, 23, 24]．

WZW 二重場理論は標準的な二重場理論において座標依存性のない計量 η_{MN} を座標依存性を持つ場合に拡張することを目指して構成された理論である．

$$\text{二重場理論}\ (\eta_{MN} : \text{座標依存性なし}) \longrightarrow \text{WZW 二重場理論}\ (\eta_{MN} : \text{座標依存性あり})$$

ただし，WZW 二重場理論の構成で用いられた η_{MN} は非常に特殊な形に制限されており，一般の η_{MN} に対して成立する根拠はないことを強調しておく．この拡張により $\mathrm{DFT_{WZW}}$ が非アーベル的 T 双対性や Poisson-Lie T 双対性を含むことが示唆されているものの完全な証明は与えられていない [25]．

このように研究が行われている二重場理論の最終的な目標は弦理論が含む多数の質量のない粒子が新たに質量を獲得できるような新たな余剰次元を構成することである．この最終的な目標を達成するためには少なくとも以下の 4 つの問題点が解決すべき課題として残っている．

(1) **二重場理論の場が属する空間の定義が不十分であること．**
標準的な二重場理論にはゲージ代数が閉じるための条件として閉包条件と呼ばれる拘束条件が場に課されている．この閉包条件を課した後の場がどのような空間に属するかは明確に与えられておらず，数学的に定義が不十分である．また，作用の中に拘束条件を生成するラグランジュ未定乗数などの機構が存在せず，作用の外から手で拘束条件を課している．そのため，量子論を議論する際に場の配位を明確に定義できず，経路積分をどのような関数系にわたって実行すべきか決定することができない．

(2) **二重場理論に含まれる計量 η_{MN} が一般の座標依存性を持つ場合に構成できていないこと．**
既存の二重場理論が持つ計量 η_{MN} は特殊な座標依存性を持つ場合にのみ構成されている．円よりも複雑な空間を結び付ける拡張された T 双対性 (非アーベル的 T 双対性，Poisson-Lie T 双対性) を二重場理論で議論する際には，異なる座標依存性を持つ η_{MN} を用いなくてはならない．よって，η_{MN} がより一般の座標依存性を持つ二重場理論の構成が拡張された T 双対性の議論には必要である．

(3) **20 次元時空の幾何学である二重場理論から 10 次元時空の幾何学を得る機構が明らかでないこと．**
二重場理論は 20 次元時空上の幾何学であるが，弦理論は 10 次元時空上に存在する．そのため，弦理論と対応させるためには二重場理論の場から 10 次元時空上の計量や反対称テンソル場を得る必要がある．

(4) **二重場理論と量子論の関係が明らかでないこと．**
二重場理論は古典的な議論にとどまっており，量子的な記述は成功していない．

1.2 研究の概要

本研究における成果は大きく 2 つである．1 つ目は上で述べた問題点 (1)(2) の解決のため，新たな二重場理論 (特にボソン部分である計量，2 階の反対称テンソル場，スカラー場から構成される NS-NS セクター[2]) を構成したことである．その結果，これまで構成されていなかった二重場理論の計量 η_{MN} が任意の座標依存性を持つ場合に二重場理論が拡張可能であることを示した．先行研究では，η_{MN} が座標依存性を持つ場合の二重場理論として WZW 二重場理論が提案されていたが，この構成は η_{MN} が特殊な形をした場合に限ったものであった．一方で本研究では任意の η_{MN} に対して新たな二重場理論の作用を構成することに成功した．2 つ目はこの新たな二重場理論の応用として非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性を導出したことである．前節で述べたように WZW 二重場理論における非アーベル的 T 双対性や Poisson-Lie T 双対性は証明が不十分で示唆に留まるものであったが [25]，本研究では初めて二重場理論を用いた非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性の導出に成功した．この結果は 20 次元時空上の幾何学である二重場理論の解と 10 次元時空上の幾何学である超重力理論や一般化超重力理論の解が非自明に対応する 1 つの例であり，(3) の問題に今後取り組むうえで重要な手がかりとなることが期待される．以下では，これらの 2 つの成果について詳しく説明する．

1 つ目の新たな二重場理論の構成について述べる．本研究では，まず従来の標準的な二重場理論においては次の 4 つを基本的な要請として二重場理論が構成されていることに着目した．

(a) Buscher 則により共変．

(b) 一般化 Lie 微分によるゲージ変換で不変．

(c) 一般化 Lie 微分で生成されるゲージ代数が閉包条件を満たす．

(d) 超重力理論を含む．

(e) 局所ローレンツ変換により不変．

このうち (c) の閉包条件は，二重場理論の場に対して非自明な拘束条件を課す必要があり，(b)(e) の条件はこの拘束条件の下でのみ成立するように定式化されている．しかし，この拘束条件には (1) で述べたように以下の問題点がある．

- 閉包条件を課した後の場が属する線形空間が明確に定義されていないこと．
- 作用から閉包条件を生成するラグランジュ未定乗数などの機構が存在せず，作用の外から手で閉包条件を課す必要があること．

そこで，本研究では拘束条件を置かずに，局所ローレンツ不変性を基本的な要請として新たな二重場理論の構成を行った．

この新たな二重場理論では拘束条件を置かないために，従来の二重場理論の代数として導入されていた Courant 亜代数 [28] は閉包条件のない計量亜代数 [29] になる．この計量亜代数の生成子である Dirac 生成演算子を用いて局所ローレンツ不変な作用を構成した．この構成方法は η_{MN} の具体的な形に依らずに実行することができる．その結果，η_{MN} が座標依存性を持つ場合にも適用可能な新たな二重場理論を構成することができ，問題点 (2) も同時に解決できた．この新たな二重

[2]弦理論に含まれる質量のないボソンは NS-NS(NS:Noveu Schwarz[26]) セクターと R-R(R:Ramond[27]) セクターで構成される．NS-NS セクターは計量，2 階の反対称テンソル場，スカラー場で構成され，R-R セクターは反対称テンソル場により構成される．

場理論は従来の二重場理論や WZW 二重場理論を含むため，これまでの二重場理論の研究とも整合的である．

さらに，この新たな二重場理論の構成を用いることによって，ディラトンを代数から導入することが可能となった．従来の二重場理論では，ディラトンの変換性や作用への寄与は超重力理論に一致するように手で決められていただけであった．一方で，本研究ではディラトンが Dirac 生成演算子の自由度と理解することができた．この結果は二重場理論のディラトンの代数的な構造が明らかになったことに加えて，η_{MN} が座標依存性を持つ場合であってもディラトンが正しく導入できている根拠になっている．

以上の結果は [30] で報告した結果にいくつかの改善を行ったものである．

次に 2 つ目の成果である，二重場理論を用いた非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性の導出について述べる．二重場理論を用いた非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性の議論は先行研究 [25] によって行われている．この先行研究では T 双対性を二重場理論の座標変換によって理解しようと試みているものの，二重場理論に課された閉包条件が座標変換で他方に移らないため，二重場理論上で座標変換を行うことができない．そのため，非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性を導出するには至っていない．よって，二重場理論に閉包条件がなければ，非アーベル的 T 双対性や Poisson-Lie T 双対性が導出できると考えられる．

そこで本研究では，1 つ目の結果として述べた閉包条件のない二重場理論を用いて非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性の導出を行った．その結果，超重力理論の解同士が T 双対性で結び付くことを示した．さらに，先行研究では無視されていた，非アーベル的 T 双対性や Poisson-Lie T 双対性がユニモジュラーではない代数構造を持つ場合にも部分的に議論を拡張し，超重力理論の解と一般化超重力理論の解が非アーベル的 T 双対性や Poisson-Lie T 双対性で結び付くことを示した．この結果は 20 次元時空上の幾何学である二重場理論の解と 10 次元時空上の幾何学である超重力理論や一般化超重力理論の解が非自明に対応する 1 つの例になっており，問題点 (3) で挙げた 20 次元時空上の幾何学から 10 次元時空上の幾何学を得る機構を理解する上で重要な手がかりとなることが期待される．この 2 つ目の成果は現在論文を準備中である [31]．

以上が本研究の主要な結果である．この論文の最後では，これらの結果に加えて問題点 (4) で挙げた量子化へのアプローチとして期待される二重場理論と L_∞ 代数と呼ばれる閉弦の場の理論に使われる代数との関係や，Dirac 生成演算子を用いて反対称テンソル場で構成される R-R(Ramond-Ramond) セクターの構成方法を議論した．

1.3 論文の構成

本論文は以下の流れで構成する．

初めに，2 章では二重場理論を議論するために必要な数学の説明を行う．特に，2.1 節で導入する計量亜代数は二重場理論の構成に用いる重要な代数構造である．

3 章では T 双対性を非線形シグマ模型を用いて導出する．3.2 節で最も基本的な T 双対性である Buscher 則を説明した後に，3.3 節で非アーベル的 T 双対性，3.4 節で Poisson-Lee T 双対性を導出する．

次に 4 章では従来の標準的な二重場理論の構成を行う．4.1 節から 4.4 節までで作用を構成した後に，4.5 節で標準的な二重場理論から超重力理論が得られることを示す．また，4.6 節で一般化超重力理論が二重場理論からどのように得られるかを紹介する．

ここまでがレビューパートであり，以降が本研究で得られた新しい結果である．特に，本研究の主要な結果は 5 章と 6 章で示す．

5 章では拘束条件のない二重場理論を構成する．初めに，5.1 節で標準的な二重場理論との相違点について述べる．次に 5.2 節で代数の生成子である Dirac 生成演算子を定義する．5.4 では Dirac 生成演算子から恒等式を要請し，スカラー自由度が存在することを示す．その後，このスカラー自由度が二重場理論のディラトン (一般化ディラトン) に同定できることを 5.5 節で議論する．これらを用いて 5.6 節で二重場理論の作用を構成する．この作用には定数の自由度 (β_+, β_-) が残るため，5.8 で WZW 二重場理論に簡約するための条件を調べる．最後に 5.11 で作用がゲージ不変になる条件を求める．ただし，DFT 作用がゲージ不変になる必要はなく，ここで求めた条件は一般に満たされないことに注意.

6 章では二重場理論を用いた T 双対性の導出を行う．まず，6.3 節までで二重場理論の代数を Drinfel'd Double と呼ばれる群を用いて構成した際の作用を求める．これらを用いて，6.4 節で非アーベル的 T 双対性を導出する．6.5 節では，同様の手順を用いて Poisson-Lie T 双対性を導出する.

以上が本研究の主要な結果である．残りの 7 章と 8 章では Dirac 生成演算子を用いた L_∞ 代数と R-R セクターについて議論を行う.

最後の 9 章では本研究のまとめと議論，今後の展望について述べる.

2　数学からの準備

本論文では，弦理論の背景時空を記述する理論の候補として二重場理論 (以下，DFT) を考える．DFT は 10 次元超重力理論の拡張として導入されており，超重力理論のゲージ変換である一般座標変換と B 場のゲージ変換を統一的に記述する一般化一般座標変換 (generalized diffeomorphism) の代数的構造が非常に重要な役割を果たす．そこで本章では物理的な理論の構築を行う前に必要となる数学の準備を行う．

2.1　計量亜代数

本研究で DFT に用いる代数構造は計量亜代数 (Metric algebroid) と呼ばれる代数である．一方で，通常の DFT の研究においては Courant 亜代数 (Courant algebroid) と呼ばれる代数である．この違いは非常に重要な特徴の 1 つであるため，本節では計量亜代数のみではなく Courant 亜代数も合わせて導入する．

2.1.1　Drinfel'd Double

Courant 亜代数は Lie 亜代数の二重化 (Double) として導入される．そこで代数の二重化の簡単な例として初めに Lie 代数の二重化である Drinfel'd Double[32, 33, 34] について説明を行う．Drinfel'd Double は弦の背景時空の双対性である T 双対性で重要な役割を持つ代数である．

まず，2 つの Lie 代数 $\mathfrak{g} = \{t_a\}, \bar{\mathfrak{g}} = \{\bar{t}^a\}$ を考える．それぞれの Lie 括弧は構造定数 ${f_{ab}}^c, {\bar{f}^{ab}}_c$ を用いて

$$[t_a, t_b]_{\mathfrak{g}} = {f_{ab}}^c t_c \ , \ [\bar{t}^a, \bar{t}^b]_{\bar{\mathfrak{g}}} = {\bar{f}^{ab}}_c \bar{t}^c \ , \tag{1}$$

と与える．この 2 つの Lie 代数 $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}$ の元をまとめて $\mathfrak{d} = \{T_A\}$ と呼ぶ．

$$\mathfrak{d} = \{T_A\} = \{T^a, T_a\} = \{\bar{t}^a, t_a\} \ . \tag{2}$$

と呼び，$\mathfrak{d}$ 上に以下の手順で代数を構成したものが Drinfel'd Double である．

まず，$\mathfrak{d}$ 上の括弧として $\{t_a\}, \{\bar{t}^a\}$ 同士は $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}$ と同じ構造定数を用いる．

$$[t_a, t_b]_{\mathfrak{d}} = {f_{ab}}^c t_c \ , \ [\bar{t}^a, \bar{t}^b]_{\mathfrak{d}} = {\bar{f}^{ab}}_c \bar{t}^c \ . \tag{3}$$

次に $\{T_A\}$ に対して内積を与える．

$$\langle t_a, \bar{t}^b \rangle = \delta_a^b \ , \ \langle t_a, t_b \rangle = \langle \bar{t}^a, \bar{t}^b \rangle = 0 \ . \tag{4}$$

この内積と括弧が整合的 (compatible) であることを要請する．

$$\langle [T_A, T_B]_{\mathfrak{d}}, T_C \rangle + \langle T_B, [T_A, T_C]_{\mathfrak{d}} \rangle = 0 \ . \tag{5}$$

この時，$[t_a, \bar{t}^b]_{\mathfrak{d}}$ が自動的に決定する．

$$[t_a, \bar{t}^b]_{\mathfrak{d}} = {\bar{f}^{bc}}_a t_c - {f_{ac}}^b \bar{t}^c \ . \tag{6}$$

最後に $\mathfrak{d}$ 上の括弧 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{d}}$ が閉包条件を満たすことを要請する．

$$[T_A, [T_B, T_C]_{\mathfrak{d}}]_{\mathfrak{d}} + [T_B, [T_C, T_A]_{\mathfrak{d}}]_{\mathfrak{d}} + [T_C, [T_A, T_B]_{\mathfrak{d}}]_{\mathfrak{d}} = 0 \ . \tag{7}$$

この時，$f_{ab}{}^c, \bar{f}^{ab}{}_c$ について

$$f_{ab}{}^e \bar{f}^{cd}{}_e = 4 f_{e[a}{}^{[c} \bar{f}^{d]e}{}_{b]} \ , \tag{8}$$

を満たせば必要十分である．ここで添え字で用いた括弧は反対称化の括弧であり，括弧内の添え字の個数 n の場合に完全反対称和に $1/n!$ をかける．例えば，任意の行列 A_{abcd} に対しては

$$\begin{aligned} A_{[ab]cd} &= \frac{1}{2!}(A_{abcd} - A_{bacd}) \ , \\ A_{[abc]d} &= \frac{1}{3!}(A_{abcd} - A_{acbd} + A_{bcad} - A_{bacd} + A_{cabd} - A_{cbad}) \ , \end{aligned} \tag{9}$$

を満たす．

以上が Drinfel'd Double の構成である．まとめれば，2 つの Lie 代数 $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}$

$$[t_a, t_b]_{\mathfrak{g}} = f_{ab}{}^c t_c \ , \ [\bar{t}^a, \bar{t}^b]_{\bar{\mathfrak{g}}} = \bar{f}^{ab}{}_c \bar{t}^c \ , \tag{10}$$

の構造定数 $f_{ab}{}^c, \bar{f}^{ab}{}_c$ が

$$f_{ab}{}^e \bar{f}^{cd}{}_e = 4 f_{e[a}{}^{[c} \bar{f}^{d]e}{}_{b]} \ , \tag{11}$$

を満たすとき，次の代数 $\mathfrak{d} = \{T_A\} = \{\bar{t}^a, t_a\}$ は Drinfel'd Double を成す．

$$\begin{aligned} [t_a, t_b]_{\mathfrak{d}} &= f_{ab}{}^c t_c \ , \\ [\bar{t}^a, \bar{t}^b]_{\mathfrak{d}} &= \bar{f}^{ab}{}_c \bar{t}^c \ , \\ [t_a, \bar{t}^b]_{\mathfrak{d}} &= \bar{f}^{bc}{}_a t_c - f_{ac}{}^b \bar{t}^c \ , \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \langle t_a, \bar{t}^b \rangle &= \delta_a^b \ , \\ \langle t_a, t_b \rangle &= \langle \bar{t}^a, \bar{t}^b \rangle = 0 \ . \end{aligned} \tag{13}$$

特に，括弧にのみ着目すれば閉包条件を満たすため，Lie 代数になっている．また，内積は括弧と整合的であり

$$\langle [T_A, T_B]_{\mathfrak{d}}, T_C \rangle + \langle T_B, [T_A, T_C]_{\mathfrak{d}} \rangle = 0 \ , \tag{14}$$

を満たす．Lie 代数 $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{d}$ に対応した群をそれぞれ $\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}, \mathcal{D}$ と書けば

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \bar{\mathcal{G}} \ , \tag{15}$$

と表される．

2.1.2 Lie 亜代数

ここでは Lie 代数の拡張として Lie 亜代数 (Lie algebroid) を考える．多様体 M 上で Lie 代数を考える際，Lie 代数の元は接ベクトル空間 TM に存在する．それに対して Lie 亜代数は接ベクトル空間より広い概念であるベクトル束上に存在する．ベクトル束は次で定義される．

ベクトル束 (vector bundle) の定義

多様体 M 上のベクトル束とは次の 3 つの要素の組を指す．

- 全空間と呼ばれる位相空間 E
- 全射かつ連続写像である射影 $\pi : E \to M$
- 任意の $p \in M$ の逆像 $\pi^{-1}(p)$ がベクトル空間となっていること．$\pi^{-1}(p)$ はファイバーと呼ぶ．

ベクトル束は $\pi : E \to M$ もしくは単にベクトル束 E と書く．

直感的には，多様体 M 上の各点に対応するベクトル空間 (ファイバー) が存在しているとき，その対応しているベクトル空間全体をベクトル束と呼ぶ．接ベクトル空間 TM はベクトル束の 1 つである．実際，$p \in M$: 多様体 とその座標 x に対して

$$\begin{aligned} (p, \frac{\partial}{\partial x}|_p) &\in E \, , \\ \pi\Big((p, \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p)\Big) &= p \, , \\ \pi^{-1}(p) &= T_pM \, , \end{aligned} \tag{16}$$

と定義すれば，ベクトル束になる．

TM 上にベクトル場が定義されるのと同じようにベクトル束の上に場を定義することを考える．場は多様体の点 p を指定したときにそのファイバー上 $\pi^{-1}(p)$ の場の値が与えられる．故に場は写像 $s : M \to E$ と思うことができる．任意の $p \in M$ に対して $s(p) \in \pi^{-1}(p)$ でなければファイバー $\pi^{-1}(p)$ の値が与えられていることにならないことに注意する．この物理での場に対応する概念が切断である．切断は次のように定義される．

切断の定義

ベクトル束 E の切断 $s : M \to E$ とは次の 2 つを満たす写像を指す．

- $s : M \to E$ が連続写像であること．
- $\pi \circ s = id_M$ ．

ここで id_M は M 上の恒等写像である．切断全体の集合は $\Gamma(E)$ と書く．

即ち，ベクトル束上の場は $\Gamma(E)$ 上で定義される．

接ベクトル $V(p) \in T_pM$ は切断と見なすことができる．実際，$M \to TM, p \mapsto (p, V(p))$ と写像を定義すればこの写像は切断である．

さて，Lie 亜代数を定義する．Lie 亜代数はベクトル束上に定義されており，その代数構造は Lie 代数と基本的に同じである．重要な違いは TM では関数に対して微分作用が自然に定義されるのに対して，Lie 亜代数では anchor 写像と呼ばれる写像 $\rho : E \to TM$ が定義されることである．Lie 亜代数の定義は次で与えられる．

Lie 亜代数の定義

多様体 M 上の Lie 亜代数は次の 3 つの要素の組を指す．

- ベクトル束 $\pi : E \to M$.
- Lie 括弧 $[\cdot,\cdot]_E : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$.
  Lie 括弧は反対称かつ定数倍について双線形な写像であり，Leibniz 則を満たす．即ち，任意の切断 $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma(E)$ について
  $$[s_1,[s_2,s_3]_E]_E = [[s_1,s_2]_E,s_3]_E + [s_2,[s_1,s_3]_E]_E \ , \tag{17}$$
  となる．
- anchor 写像 $\rho : E \to TM$
  anchor 写像 ρ は次を満たす．
  - Leibniz 則を満たすこと．即ち，任意の切断と関数 $s_1, s_2 \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M)$ について
    $$[s_1, fs_2]_E = f\,[s_1,s_2]_E + (\rho(s_1)(f))s_2 \ , \tag{18}$$
    を満たす．ここで $\rho(s_1)(f)$ は f に微分作用素として $\rho(s_1)$ を作用させたことを意味する．

Lie 代数は Lie 亜代数の自明な例であり，$E = TM, \rho = id_{TM}, [\cdot,\cdot]_E = [\cdot,\cdot]_{TM}$ としたものである[3]．ここで id_{TM} は $TM \to TM$ の恒等写像である．

2.1.3 Courant 亜代数と Dorfman 括弧

2.1.1 節で議論したように，2 つの適当な Lie 代数を合わせて両方の元を持つ Lie 代数を構成できることを述べた．そこで Lie 亜代数に関しても同様に二重化を実行できることが期待される．しかし，一般に Lie 亜代数を二重化したものは Lie 亜代数の定義のうち，括弧の反対称性と閉包条件を両立できないことが知られている．故に，この 2 つのうちどちらかの条件を緩和したものが Courant 亜代数である [28]．Courant 亜代数の定義は反対称性と閉包条件のどちらを緩和したかで 2 種類の定義があるが，ここでは反対称性を緩和し，閉包条件を満たす定義を採用する．これは閉包条件を尊重した方が計算が容易になりやすいためである．反対称性を尊重した定義を採用する場合は本節で定義する括弧 $[s_1,s_2](s_1,s_2 \in \Gamma(E))$ を $[s_1,s_2]' = \frac{1}{2}([s_1,s_2] - [s_2,s_1])$ のように反対称に再定義すればよい．閉包条件を尊重した Courant 亜代数は次で与えられる．

[3] 亜代数の特徴はベクトル束上に定義されることである．括弧の代数構造は通常の代数と違いはなく，即ち多様体の 1 点上の代数としては代数と亜代数に違いはない．

Courant 亜代数の定義

多様体 M 上の Courant 亜代数は次の 4 つの要素の組を指す.

- ベクトル束 $\pi : E \to M$.
- 括弧 $[\cdot,\cdot]_E : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$.
  括弧は反対称ではない定数倍について双線形な写像であり，Leibniz 則を満たす．即ち，任意の切断 $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma(E)$ について

$$[s_1, [s_2, s_3]_E]_E = [[s_1, s_2]_E, s_3]_E + [s_2, [s_1, s_3]_E]_E \ , \tag{19}$$

  となる.
- anchor 写像 $\rho : E \to TM$.
- 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$.
  - Leibniz 則を満たすこと．即ち，任意の切断 $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma(E)$ について

$$\rho(s_1)(\langle s_2, s_3\rangle) = \langle [s_1, s_2]_E, s_3\rangle + \langle s_2, [s_1, s_3]_E\rangle \ , \tag{20}$$

    を満たす.
  - 括弧の対称部分は内積から定義される．任意の切断 $s \in \Gamma(E)$ に対して

$$[s, s]_E = \frac{1}{2}\partial \langle s, s\rangle \ , \tag{21}$$

    を満たす．ここで ∂ は微分演算子であり，$\langle \partial f, s\rangle = \rho(s)(f)$ を満たす．この条件は Lie 亜代数との大きな違いであり，括弧が対称部分を持つことを示している.

Lie 亜代数の定義と比較すると，括弧の反対称性が消えている．それに加えて anchor 写像に対する条件：

- Leibniz 則を満たすこと．即ち，任意の切断と関数 $s_1, s_2 \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M)$ について

$$[s_1, fs_2]_E = f\,[s_1, s_2]_E + (\rho(s_1)(f))s_2 \ , \tag{22}$$

  を満たす.

も定義から消えている．この条件が定義から消えているのは成立しなくなったためではないことに注意．Courant 亜代数においてもこの条件は成立しているが，内積に伴って追加された条件 (20) から導出可能であるため，冗長であるから定義から削除されている [35]．実際 (20) において s_3 をスカラー倍した際の条件

$$\rho(s_1)(\langle s_2, fs_3\rangle) = \langle [s_1, s_2], fs_3\rangle + \langle s_2, [s_1, fs_3]\rangle \ , \tag{23}$$

も同様に成立することを考えれば，(22) が成立することが確かめられる.

Courant 亜代数の具体的な例としては Dorfman 括弧が存在する．Dorfman 括弧は接ベクトル空間 TM と余接ベクトル空間 T^*M の直和 $TM \oplus T^*M$ 上に定義された括弧であり任意の $V, V_1, V_2 \in$

$TM,\ \xi,\xi_1,\xi_2 \in T^*M, f \in C^\infty(M)$ に対して

$$\begin{aligned}
E &= TM \otimes T^*M \ni V \oplus \xi = V^m \frac{\partial}{\partial x^m} \oplus \xi_m dx^m \ , \\
[V_1 \oplus \xi_1, V_2 \oplus \xi_2]_{Dorfman} &= [V_1, V_2]_{TM} \oplus \mathcal{L}_{V_1}\xi_2 - \iota_{V_2} d\xi_1 \ , \\
\rho(V \oplus \xi) &= V \ , \\
\langle V_1 \oplus \xi_1, V_2 \oplus \xi_2 \rangle &= \iota_{V_1}\xi_2 + \iota_{V_2}\xi_1 \\
\partial f &= (\partial_m f) dx^m
\end{aligned} \tag{24}$$

によって与えられる．この定義の下で Dorfman 括弧は実際に Courant 亜代数になっていることが確かめられる．

Dorfman 括弧 $[\cdot,\cdot]_{Dorfman}$ を反対称化したものは Courant 括弧 $[\cdot,\cdot]_{Courant}$ と呼ばれている．即ち，任意の $V_1, V_2 \in TM,\ \xi_1,\xi_2 \in T^*M$ に対して

$$[V_1 \oplus \xi_1, V_2 \oplus \xi_2]_{Courant} = \frac{1}{2}([V_1 \oplus \xi_1, V_2 \oplus \xi_2]_{Dorfman} - [V_2 \oplus \xi_2, V_1 \oplus \xi_1]_{Dorfman}) \ , \tag{25}$$

と関係付く．このように反対称化した括弧は反対称性を尊重して定義した Courant 亜代数の公理を満たす．

2.1.4 計量亜代数 (Metric algebroid) と D-括弧

DFT では Dorfman 括弧の拡張である D 括弧を扱う．D 括弧は一般に閉包条件を満たさない．故に Courant 亜代数の公理から閉包条件を削除した計量亜代数と呼ばれる代数となる [29]．本節では D 括弧の導入の流れと計量亜代数の定義を確かめる．

まず，D 括弧の導入のために座標基底で Dorfman 括弧を書き下す．

$$\begin{aligned}
[V_1 \oplus \xi_1, V_2 \oplus \xi_2]_{Dorfman} &= V_1^m \partial_m V_2^n \partial_n + V_1^m \partial_m \xi_{2n} dx^n - V_2^m \partial_m V_1^n \partial_n \\
&\quad - V_2^m \partial_m \xi_{1n} dx^n + V_2^m \partial_n \xi_{1m} dx^n + \xi_{2m} \partial_n V_1^m dx^n \ .
\end{aligned} \tag{26}$$

次章以降で詳しく述べるが，DFT では 10 次元の多様体 M を 2 倍の自由度を持つ 20 次元空間 $M \times \tilde{M}$ に埋め込む．座標は元々の座標 x^m に加えて双対座標 $\tilde{x}_m$ を導入する．このとき，1 形式 dx^m は双対座標の接ベクトル $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_m}$ に置き換えられる．さらに，$\hat{V}_i^M = (\xi_{im}, V_i^m), \partial_N = (\frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_n})$ と

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^m{}_n \\ \delta_m{}^n & 0 \end{pmatrix} \ , \ \eta^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_m{}^n \\ \delta^m{}_n & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{27}$$

で定義される行列を用いれば

$$[\hat{V}_1^N \partial_N, V_2^M \partial_M]_{Dorfman} = V_1^m \partial_m \hat{V}_2^N \partial_N - V_2^m \partial_m \hat{V}_1^N \partial_N + \eta_{MM'} \hat{V}_2^M \partial_n \hat{V}_1^{M'} \partial^n \ , \tag{28}$$

を得る．DFT では x^m と $\bar{x}_m$ が対称な形で定式化される．これは弦理論の双対性である T 双対変換が x^m と $\bar{x}_m$ の入れ替えに対応しており，その変換に共変な定式化を行うためである．この $x^m, \tilde{x}_m$ の入れ替えは定数行列 $O^M{}_N$ を用いて

$$V_i^N \mapsto O^N{}_M V_i^M \ , \ \partial_N \mapsto O^{-1M}{}_N \partial_M \ , \ (O^{M'}{}_M O^{N'}{}_N \eta_{M'N'} = \eta_{MN}) \tag{29}$$

で与えられる．この変換で括弧が不変になるように Dorfman 括弧を拡張することを考える．そのために，新たに $\hat{V}_i^N$ が $\tilde{x}_m$ 依存性を持つように Dorfman 括弧を拡張したものが D 括弧 $[\cdot,\cdot]_D$ と呼ばれる $T(M\times\tilde{M})$ 上の括弧である．

$$[\hat{V}_1^N\partial_N,\hat{V}_2^M\partial_M]_D \;=\; V_1^M\partial_M\hat{V}_2^N\partial_N-V_2^M\partial_M\hat{V}_1^N\partial_N+\eta_{MM'}\eta^{NN'}\hat{V}_2^M\partial_N\hat{V}_1^{M'}\partial_{N'}\ . \tag{30}$$

D 括弧は作り方から明らかであるが，V_i^N が $\tilde{x}_m$ に依存しないとき，$\partial^m\leftrightarrow dx^m$ の基底の同一視によって Dorfman 括弧に帰着する．

Dorfman 括弧は Courant 亜代数であるが，その拡張である D 括弧は一般に閉包条件 (19) を満たさない．Courant 亜代数の公理のうち，閉包条件のみ満たさない代数は計量亜代数と呼ばれる．計量亜代数の定義は以下の通りである．

計量亜代数の定義

多様体 M 上の計量亜代数は次の 4 つの要素の組を指す．

- ベクトル束 $\pi:E\to M$.
- 括弧 $[\cdot,\cdot]_E:\Gamma(E)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$.
- anchor 写像 $\rho:E\to TM$.
- 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle:\Gamma(E)\times\Gamma(E)\to C^\infty(M)$.
  - Leibniz 則を満たすこと．即ち，任意の切断 $s_1,s_2,s_3\in\Gamma(E)$ について
    $$\rho(s_1)(\langle s_2,s_3\rangle)=\langle[s_1,s_2]_E,s_3\rangle+\langle s_2,[s_1,s_3]_E\rangle\ , \tag{31}$$
    を満たす．
  - 括弧の対称部分は内積から定義される．任意の切断 $s\in\Gamma(E)$ に対して
    $$[s,s]_E=\frac{1}{2}\partial\langle s,s\rangle\ , \tag{32}$$
    を満たす．ここで ∂ は微分演算子であり，$\langle\partial f,s\rangle=\rho(s)(f)$ を満たす．

以上の議論より，DFT における基本的な代数は計量亜代数である．本論文ではこの計量亜代数を用いて DFT を構成する．

2.2 L_∞ 代数

本節では，次数付きの代数である L_∞ 代数について述べる [36, 37]．L_∞ 代数は閉弦の場の理論の代数として導入された [36]．L_∞ は系に入っている物理的な場やゴースト，ゲージ変数をまとめて取り扱う代数でこれらの場を $B_1,\cdots,B_n$ と置いた時に場に対する積 $[B_1,B_2,\cdots,B_n]$ の構造を扱う．特に，いつだけの場に対する積は BRST 演算子の作用と解釈される．即ち，場 B に対して

$$[B]=QB\ , \tag{33}$$

と対応する．

二重場理論に対しても L_∞ 代数の構造があることが指摘された [38]．そのため，二重場理論においても BRST 演算子と類似の構造が存在することが期待され，研究が行われている．ここでは通常，閉包条件を含む Courant 亜代数 (2.1.3 節) 上で議論がなされている．

一方で，近年の研究 [39] では閉包条件を緩和した計量亜代数 (2.1.4) に関しても L_∞ 代数の構造を持つことが示されている．本論文では，計量亜代数を用いて二重場理論を構成するため，この研究は非常に興味深い対象である．

本節では，数学的な準備として L_∞ 代数の定義を与える．ここでは [37] を参照している．L_∞ 代数の定義は以下で与えられる．

L_∞ 代数の定義

L_∞ 代数は次を満たす線形空間 $\mathbb{X}$，括弧 $[\cdots]_\infty$ の組で定義される．

- 次数 (degree) 付きの線形空間 $\mathbb{X}$.
  - 任意の元 $B_i \in \mathbb{X}$ には次数が定義される．

$$\deg(B_i) \in \mathbb{Z} : B_i\text{の次数} \ . \tag{34}$$

特に，-1 の指数に書いた場合には deg を省略する．

$$(-1)^{\deg B_i} = (-1)^{B_i} \ . \tag{35}$$

- 線形な括弧 $[B_1, B_2, \cdots, B_n]_\infty$, $(n \geq 0)$.
  - 次数:

$$\deg[B_1, B_2, \cdots, B_n]_\infty = -1 + \sum_{i=1}^{n} \deg B_i \tag{36}$$

  - 引数のない括弧 $[\cdot]_\infty$:引数のない括弧についても値が存在して

$$b_0 = [\ \cdot\ ]_\infty \ , \ (\deg(b_0) = -1) \ . \tag{37}$$

  - 線形性：c 数 b について

$$\begin{aligned} & [B_1, \cdots, B_i b, \cdots, B_n]_\infty \\ = \ & [B_1, \cdots, B_i, \cdots, B_n]_\infty (-1)^{b(B_{i+1} + \cdots + B_n)} \ . \end{aligned} \tag{38}$$

  - 交換性:

$$[\cdots, B_i, B_j, \cdots]_\infty = (-1)^{B_i B_j} [\cdots, B_j, B_i, \cdots]_\infty \ . \tag{39}$$

  - 恒等式：

$$\sum_{\substack{l,k \geq 0 \\ l+k=n}} \sigma(i_l, j_k) [B_{i_1}, \cdots, B_{i_l}, [B_{j_1}, \cdots, B_{j_k}]_\infty]_\infty = 0 \ , \tag{40}$$

ここで $\sigma(i_l, j_k)$ は ± 1 をとる符号関数で $\deg B_* = 1$ を用いて

$$\begin{aligned} & [B_*, B_1, B_2, \cdots, B_n]_\infty \\ = \ & \sigma(i_l, j_k) [B_{i_1}, \cdots, B_{i_l}, B_*, B_{j_i} \cdots, B_{j_k}]_\infty \ , \end{aligned} \tag{41}$$

で定義される．

- これらの括弧を関数 $b_n : \mathbb{X}^n \to \mathbb{X}$ で書く．

$$b_n(B_1, \cdots, B_n) = [B_1, \cdots, B_n]_\infty \ . \tag{42}$$

この記法を b 描像 (b-picture) と呼ぶ.

最後の恒等式は具体的には

$$\begin{aligned}
0 &= b_1(b_0)\ , && (43)\\
0 &= b_1(b_1(B_1)) + b_2(b_0, B_1)\ , && (44)\\
0 &= b_1(b_2(B_1,B_2)) + b_2(b_1(B_1),B_2) + (-1)^{B_1} b_2(B_1, b_1(B_2)) + b_3(b_0, B_1, B_2) && (45)\\
0 &= b_1(b_3(B_1,B_2,B_3))\\
&\quad + b_3(b_1(B_1),B_2,B_3) + (-1)^{B_1} b_3(B_1, b_1(B_2), B_3) + (-1)^{B_1+B_2} b_3(B_1,B_2,b_1(B_3))\\
&\quad + (-1)^{B_1} b_2(B_1, b_2(B_2,B_3)) + (-1)^{B_2(1+B_1)} b_2(B_2, b_2(B_1,B_3))\\
&\quad + (-1)^{B_3(1+B_1+B_2)} b_2(B_3, b_2(B_1,B_2)) + b_4(b_0,B_1,B_2,B_3)\ , && (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= b_1(b_4(B_1,B_2,B_3,B_4))\\
&\quad + (-1)^{B_1} b_2(B_1, b_3(B_2,B_3,B_4)) + (-1)^{B_2(1+B_1)} b_2(B_2, b_3(B_1,B_3,B_4))\\
&\quad + (-1)^{B_3(1+B_1+B_2)} b_2(B_3, b_3(B_1,B_2,B_4)) + (-1)^{B_4(1+B_1+B_2+B_3)} b_2(B_4, b_3(B_1,B_2,B_3))\\
&\quad + (-1)^{B_1+B_2} b_3(B_1,B_2,b_2(B_3,B_4)) + (-1)^{B_1+B_3(1+B_2)} b_3(B_1,B_3,b_2(B_2,B_4))\\
&\quad + (-1)^{B_1+B_4(1+B_2+B_3)} b_3(B_1,B_4,b_2(B_2,B_3)) + (-1)^{(1+B_1)(B_2+B_3)} b_3(B_2,B_3,b_2(B_1,B_4))\\
&\quad + (-1)^{(1+B_1)(B_2+B_4)+B_3B_4} b_3(B_2,B_4,b_2(B_1,B_3)) + (-1)^{(B_3+B_4)(1+B_1+B_2)} b_3(B_3,B_4,b_2(B_1,B_2))\\
&\quad + (-1)^{(1+B_1)(B_2+B_3+B_4)} b_4(B_2,B_3,B_4,b_1(B_1)) + (-1)^{B_1+(1+B_2)(B_3+B_4)} b_4(B_1,B_3,B_4,b_1(B_2))\\
&\quad + (-1)^{B_1+B_2+B_4(1+B_3)} b_4(B_1,B_2,B_4,b_1(B_3)) + (-1)^{B_1+B_2+B_3} b_4(B_1,B_2,B_3,b_1(B_4))\\
&\quad + b_5(b_0,B_1,B_2,B_3,B_4)\ , && (47)
\end{aligned}$$

などと与えられる．特に，(46) は Jacobi 恒等式に対応している．このことを実際に確かめるために Lie 代数が L_∞ 代数にどのように埋め込まれるかを確認する．

L_∞ としての Lie 代数　接ベクトル空間 TM の次数を 1 と定義する．その上で L_∞ 代数の関数 b_n を $v_1, v_2 \in TM$ に対して

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0\ ,\\
b_1(v_1) &= 0\ ,\\
b_2(v_1,v_2) &= [v_1,v_2]_L\ ,\\
others &= 0\ , && (48)
\end{aligned}$$

で定義される．ここで v_i の次数が 1 であることで b_2 を Lie 括弧に定義出来ていることを強調しておく．実際，$\deg(TM)$ を不定に取っておくと，$b_2(v_1,v_2) \in TM$ になるためには

$$\deg(TM) = \deg b_2(v_1,v_2) = 2\deg(TM) - 1\ , \tag{49}$$

であるから $\deg(TM) = 1$ が従う．

(48) によって与えた b_n を使って恒等式 (43)(44)(45) (46)(47) を見れば非自明なものは (46) だ

けである.

$$
\begin{aligned}
0 &= b_1(b_3(v_1,v_2,v_3)) \\
&\quad +b_3(b_1(v_1),v_2,v_3)+(-1)^{v_1}b_3(v_1,b_1(v_2),v_3)+(-1)^{v_1+v_2}b_3(v_1,v_2,b_1(v_3)) \\
&\quad +(-1)^{v_1}b_2(v_1,b_2(v_2,v_3))+(-1)^{v_2(1+v_1)}b_2(v_2,b_2(v_1,v_3)) \\
&\quad +(-1)^{v_3(1+v_1+v_2)}b_2(v_3,b_2(v_1,v_2))+b_4(b_0,v_1,v_2,v_3) \\
&= -[v_1,[v_2,v_3]_L]_L+[v_2,[v_1,v_3]_L]_L-[v_3,[v_1,v_2]_L]_L \\
&= -[v_1,[v_2,v_3]_L]_L-[v_2,[v_3,v_1]_L]_L-[v_3,[v_1,v_2]_L]_L\ . \qquad (50)
\end{aligned}
$$

この式は Jacobi 恒等式そのものである.

2.2.1 括弧の変形

L_∞ 代数で定義される括弧 $[\cdots]_\infty$ を変形して恒等式 (40) を満たす $[\cdots]'_\infty$ を与えることができる.次数 0 の場 Ψ を考える.複数の Ψ が入った $[\cdots]_\infty$ は Ψ^n と書いて以下のように略記する.

$$
\begin{aligned}
[\Psi,\Psi,\Psi]_\infty &= [\Psi^3]_\infty\ , \\
[\Psi,\Psi,\Psi,\Psi,B]_\infty &= [\Psi^4,B]_\infty\ . \qquad (51)
\end{aligned}
$$

この場 Ψ を用いて変形した括弧 $[\cdots]'_\infty$ を次で定義する.

$$
[B_1,\cdots,B_n]'_\infty=\sum_{p=0}^{\infty}[B_1,\cdots,B_n,\Psi^p]_\infty\ . \qquad (52)
$$

この新たに定義した括弧 $[\cdots]'_\infty$ は恒等式

$$
\sum_{\substack{l,k\geq 0\\ l+k=n}}\sigma(i_l,j_k)[B_{i_1},\cdots,B_{i_l},[B_{j_1},\cdots,B_{j_k}]'_\infty]'_\infty=0\ , \qquad (53)
$$

を満たす.

3 弦理論の背景場と T 双対性

弦理論の背景時空は 10 次元時空でなければならないことが知られている．一方で，実験で観測されている時空間は 4 次元時空であるため，弦理論が正しいと考えれば 6 次元空間は観測されないほど小さな空間であるはずである．この小さな 6 次元空間は余剰次元と呼ばれる．このように 10 次元時空のうち 6 次元空間を小さく制限して観測できないようにする操作をコンパクト化と呼ぶ．最も簡単なコンパクト化は Kaluza-Klein コンパクト化と呼ばれ，5 次元時空の計量のコンパクト化から 4 次元時空の計量と電磁ポテンシャル導出する [40, 41, 42, 43]．弦理論の場合も同様にコンパクト化によって多数のゲージ場が導出されるが，一般に弦の質量スペクトルとヒルベルト空間は余剰次元の幾何学的構造によって変化する．

T 双対性は異なる余剰次元を対応させる双対性であり，T 双対性で結ばれる背景時空は弦の質量スペクトルとヒルベルト空間が等しくなる．故に，T 双対性で結ばれる背景時空同士は 4 次元時空の理論として全く区別できない．本章では，まず T 双対性の最も簡単な場合である Buscher 則を導入し，その拡張である非アーベル的 T 双対性，Poisson-Lie T 双対性について述べる．

3.1 非線形シグマ模型

弦理論は背景場として，計量 G，Kalb-Ramond 場 (以下，B 場)B，ディラトン ϕ を持つ．この背景場を持つ弦理論は非線形シグマ模型として記述できる．非線形シグマ模型の物理的な場は 2 次元世界面から 10 次元標的空間への埋め込み写像

$$\text{埋め込み写像 } X^m : \sigma^i \mapsto X^m(\sigma) \ , \tag{54}$$

である．非線形シグマ模型の作用は

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \left[\sqrt{-\gamma}\gamma^{ij}G_{mn}(X)\partial_i X^m \partial_j X^n + \epsilon^{ij}B_{mn}(X)\partial_i X^m \partial_j X^n + \alpha'\sqrt{-\gamma}R\phi(X)\right] \ , \tag{55}$$

で与えられる．ここで γ_{ij}:世界面の計量,ϵ^{ab}:世界面の反対称テンソル ($\epsilon^{01} = 1$),R:世界面の Ricci スカラーである．1 形式を用いて書けば

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \left[G_{mn}dX^m \wedge *dX^n + B_{mn}dX^m \wedge dX^n + \alpha' R\phi * 1\right] \ , \tag{56}$$

と単純な形に書き表すことができる．この作用を用いて次節では最も簡単な T 双対性である Buscher 則を導出する．

3.2 Buscher 則

最初の T 双対性は Buscher により導入された [2, 3]．この双対性は余剰次元上に半径 R の S^1 が存在する場合に，半径を $\frac{\alpha'}{R}$ に取り直しても弦理論として等価であるというものである．ここでは Buscher 則で結び付く 2 つの非線形シグマ模型が古典的に等価であることを示す．

まず，自明な背景場 $G = \eta, H = 0, \phi = 0$ を考える．この時，弦理論は量子化を行うことができる．10 次元時空のうち 1 次元空間を S^1 上にコンパクト化した場合の閉弦の 9 次元時空上の質量

公式は

$$
\begin{aligned}
&m^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2}{\tilde{R}^2} + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} - 2)\ , \qquad (57)\\
&R : S^1 \text{の半径}\ ,\ \tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}\\
&n : S^1 \text{方向の運動量}\ ,\ w : S^1 \text{方向の巻き付き数}\\
&N, \tilde{N} : \text{励起モードのラベル}\ ,
\end{aligned}
$$

により与えられる．この質量公式は明らかに

$$
n \leftrightarrow w, R \leftrightarrow \tilde{R}\ , \tag{58}
$$

により不変である．即ち，半径 R の円にコンパクト化された閉弦は半径 $\tilde{R}$ の円にコンパクト化された閉弦と 1 対 1 対応する．この対応は質量スペクトルに限らず，CFT として等価であることが知られている．即ち CFT の演算子の再定義により，半径 R の円にコンパクト化された閉弦の理論と半径 $\tilde{R}$ の円にコンパクト化された閉弦の理論は一致する．この 2 つの理論の等価性を T 双対性と呼ぶ．

上の例は自明な背景場 $G = \eta, H = 0, \phi = 0$ に対するものだが，Buscher 則を適用する場合には S^1 以外の 9 次元時空が曲がっていてもよい．そこで次に Buscher 則を古典論の範囲で導出する．ただし，ディラトンに関しては古典論の範囲で変換性を求めることができないため，ディラトンに関しては作用から落として議論する．

$$
S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \left[G_{mn} dX^m \wedge *dX^n + B_{mn} dX^m \wedge dX^n \right]\ . \tag{59}
$$

以下で導出される G, B の変換性はディラトンがあったとしても全く変わらない．

さて，余剰次元に S^1 が存在する場合を仮定し，その方向を X^9 と呼ぶ．このとき，S^1 方向に背景時空は並進不変になっている．即ち，Lie 微分を用いて

$$
L_{\partial_9} G = 0, L_{\partial_9} B = 0, L_{\partial_9} \phi = 0\ , \tag{60}
$$

が成立しており，$G_{MN}(X), B_{MN}(X), \phi(X)$ は X^9 依存性を持たない．このとき，非線形シグマ模型と古典的に等価な作用 $\hat{S}$ を考えることができる．

$$
\begin{aligned}
\hat{S} \ &=\ -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \Big[G_{99} A \wedge *A + 2G_{9\alpha} A \wedge *dX^\alpha + G_{\alpha\beta} dX^\alpha \wedge *dX^\beta \\
&\qquad + 2B_{9\alpha} A \wedge dX^\alpha + B_{\alpha\beta} dX^\alpha \wedge dX^\beta + 2d\chi \wedge A \Big]\ .
\end{aligned} \tag{61}
$$

ここで α, β は $\{0, 1, \cdots, 8\}$ までの値を取る．新たに導入された場は A :1 形式，χ : スカラーである．この作用 $\hat{S}$ の重要な性質として，X^9 が一切含まれていないことに注意．この作用 $\hat{S}$ が元々の作用 (59) に等しいことは χ を積分することで確かめられる．χ の変分によって得られる方程式は

$$
\frac{\delta \hat{S}}{\delta \chi} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}(-2dA) = 0\ , \tag{62}
$$

となるから A は純粋ゲージに固定される．A の解の自由度を X^9 に選ぶと

$$
A = dX^9\ , \tag{63}
$$

と書くことができる．ここで X^9 を選べるのは作用に X^9 依存性がないため，単に任意関数として X^9 を導入することが可能であるためである．これを作用 $\hat{S}$ に代入すれば，作用 S を得る．

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \left[G_{mn}dX^m \wedge *dX^n + B_{mn}dX^m \wedge dX^n\right] \ , \tag{64}$$

この作用は非線形シグマ模型 (59) に一致する．

一方で作用 $\hat{S}(61)$ を 1 形式場 A で解くこともできる．この操作によって T 双対作用を導出することができる．ゲージ場 A の成分 A_a を

$$A = A_a d\sigma^a \ , \tag{65}$$

で定義する．$\hat{S}$ に対して A_a の変分を実行する．

$$\delta\hat{S} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int 2(\delta A_a)d\sigma^a \wedge *\left[G_{99}A + G_{9\alpha}dX^\alpha - B_{9\alpha} * dX^\alpha - *d\chi\right] = 0 \ . \tag{66}$$

A について解けば

$$A = \frac{1}{G_{99}} * d\chi + \frac{G_{9\alpha} * + B_{9\alpha}}{G_{11}} * dX^I \ , \tag{67}$$

が得られる．この式を用いて A を作用 $\hat{S}$ から消去すれば，新たな作用 $\tilde{S}$ が得られる．

$$\tilde{S} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \left[\tilde{G}_{mn}dY^m \wedge *dY^n + \tilde{B}_{mn}dY^m \wedge dY^n\right] \tag{68}$$

ここで新たに置いた $Y^m, \tilde{G}, \tilde{B}$ は

$$\begin{aligned}
&Y^9 = \chi, Y^\alpha = X^\alpha \ , \\
&\tilde{G}_{99} = \frac{1}{G_{99}},\ \tilde{G}_{9\alpha} = -\frac{B_{9\alpha}}{G_{99}},\ \tilde{G}_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{G_{9\alpha}G_{9\beta} - B_{9\alpha}B_{9\beta}}{G_{99}} \ , \\
&\tilde{B}_{9\alpha} = -\frac{G_{9\alpha}}{G_{99}},\ \tilde{B}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - \frac{G_{9\alpha}B_{9\beta} - G_{9\beta}B_{9\alpha}}{G_{99}} \ ,
\end{aligned} \tag{69}$$

により定義される．この作用 $\tilde{S}(68)$ は Y^m を埋め込み写像と見なせば，計量 $\tilde{G}_{mn}$，B 場 $\tilde{B}$ を背景場に持つ非線形シグマ模型である．

以上の計算により，2 つの作用 $S(59)$，$\tilde{S}(68)$ はどちらも作用 $\hat{S}(61)$ を積分することで得られる．故に古典的にはこの 2 つの作用は等価である．即ち，背景場の組 (G, B) と $(\tilde{G}, \tilde{B})$ は弦の背景として等価である．この (G, B) と $(\tilde{G}, \tilde{B})$ の関係を Buscher 則と呼ぶ．

落としていたディラトンの項は古典論の範囲では不変であるが，経路積分においては A の積分の際にボリュームが現れて

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{2}\log G_{99} \ , \tag{70}$$

と変換する [3]．

3.2.1 コンパクト化半径についての考察

Buscher 則 (69) により，計量と B 場の変換則を得た．そこで，すぐさま S^1 の半径の対応 $(R \leftrightarrow \tilde{R})$ が得られることを期待する．しかし，S^1 の半径は計量だけからは決まらず，S^1 の 1 周に対応する

座標の周期の情報が必要となる．X^9, χ の周期性をそれぞれ X^9_T, χ_T と置けば，それぞれの座標方向の S^1 の半径 $R_X, \tilde{R_\chi}$ は

$$2\pi R_X = \sqrt{G_{99}(X^9_T)^2}\ ,\ 2\pi R_\chi = \sqrt{\tilde{G}_{99}(\chi_T)^2}\ , \tag{71}$$

で与えられる．$\hat{S}$(61) から非線形シグマ模型 (68) を導出した際

$$-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int 2d\chi \wedge dX^9\ , \tag{72}$$

を全微分項として無視した．この項は運動方程式には寄与しないが経路積分を行う際には寄与を与える．即ち，X^9, χ はコンパクト空間の座標であり，世界面座標 σ に対して 1 価でない．故に，この全微分項はゼロでない値を持ち，座標の周期 $X^9_T\chi_T$

$$-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int 2d\chi \wedge dX^9 = -\frac{1}{4\pi\alpha'}2\chi_T X^1_T\ , \tag{73}$$

となる．この項が経路積分において寄与を与えないためには周期性について

$$\frac{1}{4\pi\alpha'}2\chi_T X^1_T \in 2\pi\mathbb{Z}\ , \tag{74}$$

を満たさなければならない．故に，S^1 座標の周期性について

$$\chi_T X^1_T \in 4\pi^2\alpha' n\ ,\ (n \in \mathbb{Z})\ , \tag{75}$$

の条件が課される．従って，コンパクト化半径は

$$\begin{aligned} R_\chi =& \frac{1}{2\pi}\sqrt{\tilde{G}_{11}(\chi_T)^2} \\ =& \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{G_{11}}\frac{(4\pi^2\alpha' n)^2}{(X^1_T)^2}} \\ =& \frac{\alpha'}{R_X}n\ , \end{aligned} \tag{76}$$

の関係があることが分かる．古典論の範囲ではこれ以上の議論ができないが，$n = 1$ に取れば質量公式 (57) におけるコンパクト化半径の対応 (58) と一致する．

3.3 非アーベル的 T 双対性

Buscher 則は弦の背景場に S^1 が存在している時に適用できた．即ち，背景場が $U(1)$ 対称性を持っている場合に実行可能である．一方で，一般に背景場は非可換な Killing ベクトルを持ちうる．背景場に非可換な複数の Killing ベクトルが存在する場合に適用できるように拡張した T 双対性を非アーベル的 T 双対性 (Non-Abelian T-duality) と呼ぶ [18, 19, 20]．本節では Lie 群 $\mathcal{G}$ 上の作用に対して双対な作用を導出する．

$\mathcal{G}$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の基底 t_a は

$$[t_a, t_b] = f_{ab}{}^c t_c,\ \mathrm{Tr}(t_a t_b) = \delta_{ab}\ , \tag{77}$$

を満たすものとする．作用は群の元 $g(X) \in \mathcal{G}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
S =& -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int G_{0ab}(g^{-1}dg)^a \wedge *(g^{-1}dg)^b + B_{0ab}(g^{-1}dg)^a \wedge (g^{-1}dg)^b \\
=& -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int G_{0ab}L^{-1a}{}_m L^{-1b}{}_n dX^m \wedge *dX^n + B_{0ab}L^{-1}{}_m{}^a L^{-1}{}_n{}^b dX^m \wedge dX^n \ , \qquad (78)
\end{aligned}
$$

と書く．ここで X は群 $\mathcal{G}$ の座標であり，$G_{0\alpha\beta}, B_{0\alpha\beta}$ は定数である．また，$L^{-1}{}_m{}^a$ は左不変カレントの係数である．

$$
g^{-1}dg = (g^{-1}dg)^\alpha t_\alpha = L^{-1}{}_m{}^a dX^m t_a \ . \qquad (79)
$$

この作用 S から計量 G，B 場 B を読み取れば

$$
G_{mn} = G_{0ab}L^{-1}{}_m{}^a L^{-1}{}_n{}^b,\ B_{mn} = B_{0ab}L^{-1}{}_m{}^a L^{-1}{}_n{}^b \ , \qquad (80)
$$

を得る．この作用 S は群の左変換

$$
g \mapsto ug \ , \ (u \in \mathcal{G}) \ , \qquad (81)
$$

によって不変である．左変換に対応する Killing ベクトル k_a は右不変カレント $dgg^{-1} = R^{-1}{}_m{}^a dX^m t_a$ を用いて

$$
k_a = -R_a{}^m \partial_m \ , \qquad (82)
$$

と書ける．この Killing ベクトルは Lie 代数

$$
[k_a, k_b] = f_{ab}{}^c k_c \ , \qquad (83)
$$

を満たす．

さて，非アーベル的 T 双対性を導出する．Buscher 則の計算と同様に 1 形式場 $A = A^a t_a$ とスカラー場 $\chi^a t_a$ を導入し，古典的に等価な作用 $\hat{S}$ を用いる．

$$
\hat{S} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \Big[G_{0ab}A^a \wedge *A^b + B_{0ab}A^a \wedge A^b - 2\mathrm{Tr}\{\chi(dA - A \wedge A)\}\Big] \ . \qquad (84)
$$

この作用 $\hat{S}$ が作用 S(78) と等価であることを示す．そのために χ の変分で得られる方程式

$$
\frac{\delta \hat{S}}{\delta \chi^a} = -\frac{1}{4\pi\alpha'}(-2)\delta_{ab}\{dA^b - (A \wedge A)^b\} = 0 \ , \qquad (85)
$$

を解く．この方程式の解は

$$
A = -g^{-1}dg \qquad (86)
$$

となる．これを作用 $\hat{S}$ に代入すると

$$
S = -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \Big[G_{0ab}(g^{-1}dg)^a \wedge *(g^{-1}dg)^b + B_{0ab}(g^{-1}dg)^a \wedge (g^{-1}dg)^b\Big] \qquad (87)
$$

が得られる．これは作用 S(78) と等しい．即ち，作用 $\hat{S}$(84) と作用 S(78) が古典的には等価であることが示された．

次に T 双対な作用を得るために $\hat{S}$(84) を A^a で変分して得られる方程式を考える．

$$
\begin{aligned}
\delta_A \hat{S} \ &= \ -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int 2(\delta A^a) \wedge *(G_{0ab}A^b + B_{0ab} * A^b + 2 * d\chi_a + \chi_c f_{ab}{}^c * A^b) \\
&= \ 0 \ . \qquad (88)
\end{aligned}
$$

よって，A について解けば

$$A^a = -\Big(\frac{1}{G_0 + (B_0 + (f\chi))*}\Big)^{ab} d\chi_b \ , \ (\chi_a = \delta_{ab}\chi^b) \ , \tag{89}$$

が得られる．ここで $(f\chi)_{ab}$ は行列で $(f\chi)_{ab} = f_{ab}{}^c\chi_c$ である．この A を作用 $\hat{S}$ に代入すれば

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\chi_a \wedge * \left(\frac{1}{G_0 + (B_0 + (f\chi))*}\right)^{ab} d\chi_b \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \tilde{G}^{ab} d\chi_a \wedge * d\chi_b + \tilde{B}^{ab} d\chi_a \wedge d\chi_b \ , \end{aligned} \tag{90}$$

が得られる．ここで

$$\tilde{G} + \tilde{B} = \frac{1}{G_0 + B_0 + (f\chi)} \ , \tag{91}$$

で与えられる．よって，$\tilde{S}$ は $\hat{S}(84)$ と古典的に等価である．即ち，T 双対性によって

$$\begin{aligned} (G+B)_{mn} &= (G_{0ab} + B_{0ab}) L^{-1}{}_m{}^a L^{-1}{}_n{}^b \ , \\ (\tilde{G} + \tilde{B})^{ab} &= \Big(\frac{1}{G_0 + B_0 + (f\chi)}\Big)^{ab} \ , \end{aligned} \tag{92}$$

が結び付く．この T 双対性を非アーベル的 T 双対性と呼ぶ．ディラトンの変換は経路積分を計算する際に A^a の積分から来る体積要素の寄与があって

$$e^{-2\tilde{\phi}} = e^{-2\phi} \det(G_0 + B_0 + (f\chi)) \ , \tag{93}$$

で与えられることが知られている [18].

3.4 Poisson-Lee T 双対性

前節の非アーベル的 T 双対性で得られた背景場 $(\tilde{G} + \tilde{B})^{ab}$ は一般に対称性 (アイソメトリー) を持たない．故に，T 双対性が対称性を持たない背景場に対しても適用できるように T 双対性が拡張されることが期待される．この拡張された T 双対性を Poisson-Lie T 双対性と呼ぶ [21].

本節では Poisson-Lie T 双対性を導出する．Poisson-Lie T 双対性の導出も他の T 双対性の導出方法と同様である．即ち，拘束系の作用 $\hat{S}$ を与えた後に 2 種類の方法で拘束を解くことで古典的に等価な 2 つの作用を得る．

まず，拘束系の作用 $\hat{S}$ を与える．この作用は 2.1.1 節で与えた Drinfel'd Double $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \bar{\mathcal{G}}$ 上の作用である．埋め込み写像 $l \in \mathcal{D}$ に対して作用を与える．

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\int d^2\sigma [\langle l^{-1}\partial_\sigma l, l^{-1}\partial_\tau l\rangle - \langle l^{-1}\partial_\sigma l, \hat{\mathcal{H}}(l^{-1}\partial_\sigma l)\rangle] + \frac{1}{12}\int \langle l^{-1}dl \,\overset{\wedge}{,}\, [l^{-1}dl \,\overset{\wedge}{,}\, l^{-1}dl\rangle \ . \tag{94}$$

ここで $\mathcal{H}$ は Drinfel'd Double の Lie 代数 $\mathfrak{d} = \{T_A\}$ に作用する演算子であり

$$\langle T_A, \hat{\mathcal{H}}(T_B)\rangle = \begin{pmatrix} (G_0^{-1})^{ab} & (G_0^{-1}B_0)^a{}_b \\ -(B_0 G_0^{-1})_a{}^b & (G_0 - B_0 G_0^{-1} B_0)_{ab} \end{pmatrix}, \tag{95}$$

で定義する．ここで G_0, B_0 はそれぞれ定数対称行列，定数反対称行列である．この作用は ε 模型 (ε-model) と呼ばれる [21]．以下の計算で明らかになるが，$l \in \mathcal{D}$ の自由度の半分は非物理的な場であり，拘束条件を与えられ，Poisson-Lie T 双対性で結ばれる作用は，拘束条件を解くことによって得られる．

3.4.1 作用の分解 1

作用 $\hat{S}(94)$ が拘束系であることを明らかにするために $l \in \mathcal{D}$ を $g \in \mathcal{G}, \bar{g} \in \bar{\mathcal{G}}$ を用いて $l = \bar{g}g$ と分離する．この l の形を用いて作用 $\hat{S}(94)$ を分解する．まず，作用 $\hat{S}$ の 3 項目を計算する．

$$
\begin{aligned}
l^{-1}dl =& g^{-1}\bar{g}^{-1}d(\bar{g}g) \\
=& g^{-1}(\bar{g}^{-1}d\bar{g} + dgg^{-1})g \ .
\end{aligned}
\tag{96}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{12}\int \langle l^{-1}dl \overset{\wedge}{,} [l^{-1}dl \overset{\wedge}{,} l^{-1}dl]\rangle \\
=&\frac{1}{12}\int \langle g^{-1}(\bar{g}^{-1}d\bar{g} + dgg^{-1})g \overset{\wedge}{,} [g^{-1}(\bar{g}^{-1}d\bar{g} + dgg^{-1})g \overset{\wedge}{,} g^{-1}(\bar{g}^{-1}d\bar{g} + dgg^{-1})g]\rangle \\
=&\frac{1}{12}\int \langle \bar{g}^{-1}d\bar{g} + dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} [\bar{g}^{-1}d\bar{g} + dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} \bar{g}^{-1}d\bar{g} + dgg^{-1}]\rangle \\
=&\frac{1}{12}\int \big[\langle \bar{g}^{-1}d\bar{g} \overset{\wedge}{,} [\bar{g}^{-1}d\bar{g} \overset{\wedge}{,} \bar{g}^{-1}d\bar{g}]\rangle + 3\,\langle dgg^{-1} \ \overset{\wedge}{,}\ [\bar{g}^{-1}d\bar{g} \overset{\wedge}{,} \bar{g}^{-1}d\bar{g}]\rangle \\
&+3\,\langle \bar{g}^{-1}d\bar{g} \overset{\wedge}{,} [dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} dgg^{-1}]\rangle + \langle dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} [dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} dgg^{-1}]\rangle\big] \\
=&\frac{1}{4}\int \big[\langle dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} [\bar{g}^{-1}d\bar{g} \overset{\wedge}{,} \bar{g}^{-1}d\bar{g}]\rangle + \langle \bar{g}^{-1}d\bar{g} \overset{\wedge}{,} [dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} dgg^{-1}]\rangle\big] \\
=&\frac{1}{4}\int \big[\langle dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} -2d(\bar{g}^{-1}d\bar{g})\rangle + \langle \bar{g}^{-1}d\bar{g} \overset{\wedge}{,} 2d(dgg^{-1})\rangle\big] \\
=&\frac{1}{2}\int d\,\langle dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} \bar{g}^{-1}d\bar{g}\rangle \\
=&\frac{1}{2}\int \langle dgg^{-1} \overset{\wedge}{,} \bar{g}^{-1}d\bar{g}\rangle \\
=&\frac{1}{2}\int d^2\sigma\,\big[\langle \partial_\tau gg^{-1}, \bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g}\rangle - \langle \partial_\sigma gg^{-1}, \bar{g}^{-1}\partial_\tau\bar{g}\rangle\big] \ .
\end{aligned}
\tag{97}
$$

次に第 1 項を計算する．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int d^2\sigma\,\langle g^{-1}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g} + \partial_\sigma gg^{-1})g, g^{-1}(\bar{g}^{-1}\partial_\tau\bar{g} + \partial_\tau gg^{-1})g\rangle \\
=&\frac{1}{2}\int d^2\sigma\,\langle \bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g} + \partial_\sigma gg^{-1}, \bar{g}^{-1}\partial_\tau\bar{g} + \partial_\tau gg^{-1}\rangle \\
=&\frac{1}{2}\int d^2\sigma\,\big[\langle \bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g}, \partial_\tau gg^{-1}\rangle + \langle \partial_\sigma gg^{-1}, \bar{g}^{-1}\partial_\tau\bar{g}\rangle\big] \ .
\end{aligned}
\tag{98}
$$

最後に 2 項目を計算する．まず，計算に必要な式を準備しておく．$g \in \mathcal{G}$ による共役変換を考えれば

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} g^{-1}\bar{t}^a g \\ g^{-1}t_a g \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^{-T a}{}_b(g) & -a^{-T a}{}_c(g)\Pi^{cb}(g) \\ 0 & a_a{}^b(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t}^b \\ t_b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{-T a}{}_c(g) & 0 \\ 0 & a_a{}^c(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^c{}_b(g) & -\Pi^{cb}(g) \\ 0 & \delta_c{}^b(g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t}^b \\ t_b \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}
\tag{99}
$$

と置くことができる．さらに

$$
\begin{aligned}
(dgg^{-1})^a =&\langle dgg^{-1}, \bar{t}^a\rangle \\
=&\langle g^{-1}dg, g^{-1}\bar{t}^a g\rangle \\
=&\langle g^{-1}dg, {a^{-T}}^a{}_b(g)\bar{t}^b - {a^{-T}}^a{}_c(g)\Pi^{cb}(g)t_b\rangle \\
=&{a^{-T}}^a{}_b(g)(g^{-1}dg)^b \ ,
\end{aligned}
\tag{100}
$$

である．これらを用いて作用 $\hat{S}(94)$ の第 2 項を書き直す．

$$
\begin{aligned}
l^{-1}\partial_\sigma l =&\begin{pmatrix}(l^{-1}\partial_\sigma l)_a & (l^{-1}\partial_\sigma l)^a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{t}^a \\ t_a\end{pmatrix} \\
=&g^{-1}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g} + \partial_\sigma g g^{-1})g \\
=&\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})_a & (\partial_\sigma g g^{-1})^a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g^{-1}\bar{t}^a g \\ g^{-1}t_a g\end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T & (\partial_\sigma g g^{-1})^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g^{-1}\bar{t}g \\ g^{-1}tg\end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T & (\partial_\sigma g g^{-1})^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-T}(g) & 0 \\ 0 & a(g)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\Pi(g) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{t} \\ t\end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T a^{-T} & (\partial_\sigma g g^{-1})^T a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\Pi(g) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{t} \\ t\end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T a^{-T} & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\Pi(g) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{t} \\ t\end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}
\tag{101}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int d^2\sigma\, \langle l^{-1}\partial_\sigma l, \hat{\mathcal{H}}(l^{-1}\partial_\sigma l)\rangle \\
=&-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \begin{pmatrix}(l^{-1}\partial_\sigma l)_a & (l^{-1}\partial_\sigma l)^a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(G_0^{-1})^{ab} & (G_0^{-1}B_0)^a{}_b \\ -(B_0G_0^{-1})_a{}^b & (G_0 - B_0G_0^{-1}B_0)_{ab}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(l^{-1}\partial_\sigma l)_b \\ (l^{-1}\partial_\sigma l)^b\end{pmatrix} \\
=&-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T a^{-T} & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\Pi(g) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_0^{-1} & G_0^{-1}B_0 \\ -B_0G_0^{-1} & G_0 - B_0G_0^{-1}B_0\end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix}1 & 0 \\ \Pi(g) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1}(\bar{g}\partial_\sigma\bar{g}) \\ (g^{-1}\partial_\sigma g)\end{pmatrix} \\
=&-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T a^{-T} & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G - BG^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1}(\bar{g}\partial_\sigma\bar{g}) \\ (g^{-1}\partial_\sigma g)\end{pmatrix} \ .
\end{aligned}
\tag{102}
$$

ここで

$$
G + B = \frac{1}{\frac{1}{G_0+B_0} + \Pi(g)} \ ,
\tag{103}
$$

と置いた．以上より作用は

$$
\begin{aligned}
\hat{S} =&\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left[\langle \bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g}, \partial_\tau g g^{-1}\rangle + \langle \partial_\sigma g g^{-1}, \bar{g}^{-1}\partial_\tau\bar{g}\rangle\right] \\
&-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \begin{pmatrix} (\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T a^{-T} & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G-BG^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1}(\bar{g}\partial_\sigma\bar{g}) \\ (g^{-1}\partial_\sigma g) \end{pmatrix} \\
&+\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left[\langle \partial_\tau g g^{-1}, \bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g}\rangle - \langle \partial_\sigma g g^{-1}, \bar{g}^{-1}\partial_\tau\bar{g}\rangle\right] \\
=&\int d^2\sigma \,\langle \bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g}, \partial_\tau g g^{-1}\rangle \\
&-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \begin{pmatrix} (\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T a^{-T} & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G-BG^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1}(\bar{g}\partial_\sigma\bar{g}) \\ (g^{-1}\partial_\sigma g) \end{pmatrix} \\
=&\int d^2\sigma (\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T a^{-T} a^T (\partial_\tau g g^{-1}) \\
&-\frac{1}{2}\int d^2\sigma \begin{pmatrix} (\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T a^{-T} & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G-BG^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1}(\bar{g}\partial_\sigma\bar{g}) \\ (g^{-1}\partial_\sigma g) \end{pmatrix} \\
=&\int d^2\sigma \left[\bar{\rho}^T(g^{-1}\partial_\tau g) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \bar{\rho} & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G-BG^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ (g^{-1}\partial_\sigma g) \end{pmatrix}\right] , \quad (104)
\end{aligned}
$$

となって，$\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}$ それぞれの依存性が分解される．ここで $\bar{\rho}$ は

$$\bar{\rho}_a = a^{-1}{}_a{}^b(g)(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})_b \ , \tag{105}$$

である．$\bar{g}$ の世界面の時間 τ 微分が作用に含まれないのは注目すべき点である．即ち，この作用において $\bar{g}$ は非物理的であり，拘束条件を与える役割を持つ．

3.4.2 ハミルトン形式 1

拘束条件を解くためにハミルトン形式で系を書き換える．左不変カレントの係数を

$$
\begin{aligned}
g^{-1}dg &= L^{-T a}{}_i dX^i t_a \ , \\
\bar{g}^{-1}d\bar{g} &= \bar{L}^{-T}{}_a{}^i d\bar{X}_i \bar{t}^a \ ,
\end{aligned} \tag{106}
$$

と置く．このとき作用に入っている $g, \bar{g}$ の微分は

$$
\begin{aligned}
(g^{-1}\partial_\tau g)^a =&(g^{-1}\partial_i g \partial_\tau X^i)^a \\
=&L^{-T a}{}_i \partial_\tau X^i \\
=&(L^{-T}\partial_\tau X)^a \ , \qquad (107) \\
(g^{-1}\partial_\sigma g)^a =&(L^{-T}\partial_\sigma X)^a \ , \qquad (108) \\
\bar{\rho}_a =&(a^{-1}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma\bar{X})_a \ , \qquad (109)
\end{aligned}
$$

と書くことができる．これを用いて作用は

$$
\begin{aligned}
S = \int d^2\sigma \Big[&\partial_\sigma\bar{X}^T\bar{L}^{-1}a^{-T}L^{-T}\partial_\tau X \\
&-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_\sigma\bar{X}^T\bar{L}^{-1}a^{-T} & \partial_\sigma X^T L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G-BG^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma\bar{X} \\ L^{-T}\partial_\sigma X \end{pmatrix}\Big] ,
\end{aligned} \tag{110}
$$

である．$X^i, \bar{X}_i$ の共役運動量 $P_i, \bar{P}^i$ を求めると

$$
\begin{aligned}
P_i =&(L^{-1}a^{-1}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma \bar{X})_i \ , && (111)\\
\bar{P}^i =&0 \ , && (112)
\end{aligned}
$$

となる．ハミルトニアン形式に移行すると Lagrange の未定乗数 $\lambda^i, \bar{\lambda}_i$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} =&P^T\partial_\tau X + \bar{P}^T\partial_\tau \bar{X} - \partial_\sigma \bar{X}^T\bar{L}^{-1}a^{-T}L^{-T}\partial_\tau X\\
&+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_\sigma \bar{X}^T\bar{L}^{-1}a^{-T} & \partial_\sigma X^T L^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G^{-1} & G^{-1}B\\ -BG^{-1} & G-BG^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{-1}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma \bar{X}\\ L^{-T}\partial_\sigma X\end{pmatrix}\\
&+\lambda^T(P_i - L^{-1}a^{-1}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma \bar{X}) + \bar{\lambda}^T\bar{P} \ , \qquad (113)
\end{aligned}
$$

と与えられる．ハミルトニアンの拘束を解いて X, P のみのハミルトニアンに書き換えると

$$
\mathcal{H} =\frac{1}{2}\begin{pmatrix}P^TL^T & \partial_\sigma X^T L^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G^{-1} & G^{-1}B\\ -BG^{-1} & G-BG^{-1}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}LP\\ L^{-T}\partial_\sigma X\end{pmatrix} \ , \qquad (114)
$$

を得る．

3.4.3 $\mathcal{G}$ のラグランジアンの導出

さらに，このハミルトニアンをラグランジアンに書き直す．そのためにハミルトン方程式から運動量を求める．

$$
\begin{aligned}
\partial_\tau X =&\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}\\
=&L^TG^{-1}LP + L^TG^{-1}BL^{-T}\partial_\sigma X \ ,\\
P =&L^{-1}GL^{-T}\partial_\tau X - L^{-1}BL^{-T}\partial_\sigma X \ . \qquad (115)
\end{aligned}
$$

これを用いてラグランジアンを導出する．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& \partial_\tau X^T P - \mathcal{H} \\
=& \partial_\tau X^T (L^{-1} G L^{-T} \partial_\tau X - L^{-1} B L^{-T} \partial_\sigma X) \\
& - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P^T L^T & \partial_\sigma X^T L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} LP \\ L^{-T}\partial_\sigma X \end{pmatrix} \\
=& \partial_\tau X^T (L^{-1} G L^{-T} \partial_\tau X - L^{-1} B L^{-T} \partial_\sigma X) \\
& - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau X^T L^{-1} G + \partial_\sigma X^T L^{-1} B & \partial_\sigma X^T L^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} GL^{-T}\partial_\tau X - BL^{-T}\partial_\sigma X \\ L^{-T}\partial_\sigma X \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau X^T L^{-1} & \partial_\sigma X^T L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2G & -B \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-T}\partial_\tau X \\ L^{-T}\partial_\sigma X \end{pmatrix} \\
& - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau X^T L^{-1} & \partial_\sigma X^T L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-T}\partial_\tau X \\ L^{-T}\partial_\sigma X \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau X^T L^{-1} & \partial_\sigma X^T L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2G & -B \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-T}\partial_\tau X \\ L^{-T}\partial_\sigma X \end{pmatrix} \\
& - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau X^T L^{-1} & \partial_\sigma X^T L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-T}\partial_\tau X \\ L^{-T}\partial_\sigma X \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau X^T L^{-1} & \partial_\sigma X^T L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2G & -B \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-T}\partial_\tau X \\ L^{-T}\partial_\sigma X \end{pmatrix} \\
& - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau X^T L^{-1} & \partial_\sigma X^T L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-T}\partial_\tau X \\ L^{-T}\partial_\sigma X \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau X^T L^T & \partial_\sigma X^T L^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -B \\ B & -G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L\partial_\tau X \\ L\partial_\sigma X \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (g^{-1}\partial_\tau g)^T & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -B \\ B & -G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g^{-1}\partial_\tau g) \\ (g^{-1}\partial_\sigma g) \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{116}
$$

$\sigma_+ = \tau + \sigma, \sigma_+ = \tau - \sigma$ と置けば，結局作用は

$$
S = -\int d\sigma_+ d\sigma_- (g^{-1}\partial_+ g)^a \left(\frac{1}{\frac{1}{G_0+B_0} + \Pi(g)} \right)_{ab} (g^{-1}\partial_- g)^b , \tag{117}
$$

により与えられる．この作用から標的空間 $\{X^m\}$ 上の計量 G_X と B 場 B_X を読み取れば

$$
(G_X + B_X)_{mn} = L^{-1}{}_m{}^a \left(\frac{1}{\frac{1}{G_0+B_0} + \Pi(g)} \right)_{ab} L^{-Tb}{}_n , \tag{118}
$$

を得る．

以上より，初めに与えた ε 模型の作用 $\hat{S}(94)$ は作用 $S(117)$ と等価である．

3.4.4 作用の分解 2

次に，作用 $S(117)$ に双対な作用 $\tilde{S}$ を導出する．この導出は先に行った計算と同様に $l \in \mathcal{D}$ を $\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}$ の元で置き直して拘束条件を解くことによって実行する．

ε 模型の作用 $\hat{S}(94)$ をもう一度確認する．

$$\hat{S}=\frac{1}{2}\int d^2\sigma[\langle l^{-1}\partial_\sigma l, l^{-1}\partial_\tau l\rangle-\langle l^{-1}\partial_\sigma l,\hat{\mathcal{H}}(l^{-1}\partial_\sigma l)\rangle]+\frac{1}{12}\int\langle l^{-1}dl \overset{\wedge}{,} [l^{-1}dl \overset{\wedge}{,} l^{-1}dl]\rangle \ . \tag{119}$$

ここで重要なことは，この作用が l の座標表示に依らないことである．即ち，l の座標の再定義によって作用は不変である．よって，先の計算とは $\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ による分解方法を変えて

$$l=g\bar{g} \ . \tag{120}$$

によって計算を実行する．

上の計算 $(l=\bar{g}g)$ で 1 項目と 3 項目の分解は $\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ の代数構造に依らず，単に群の元であることしか使っていない．故に，本節の $l=g\bar{g}$ における作用 $\hat{S}$ の 1 項目，3 項目の計算は前節の計算を単に $g\leftrightarrow\bar{g}$ と置き換えればよい．

$$S=\int d^2\sigma\,\langle g^{-1}\partial_\sigma g,\partial_\tau\bar{g}\bar{g}^{-1}\rangle-\frac{1}{2}\langle l^{-1}\partial_\sigma l,\hat{\mathcal{H}}(l^{-1}\partial_\sigma l)\rangle \ . \tag{121}$$

2 項目についても計算を実行する．こちらは $\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ の代数構造を用いるため，新たに計算し直す必要がある．共役変換の係数を

$$\begin{pmatrix}\bar{g}^{-1}\bar{t}^a\bar{g}\\ \bar{g}^{-1}t_a\bar{g}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{a}^a{}_b(\bar{g}) & 0\\ -\bar{a}^{-T}{}_a{}^c(\bar{g})\bar{\Pi}_{cb}(\bar{g}) & \bar{a}^{-T}{}_a{}^b(\bar{g})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{t}^b\\ t_b\end{pmatrix} \ , \tag{122}$$

と置く．カレントに関する計算は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}(\partial_\sigma\bar{g}\bar{g}^{-1})_a=&\langle\partial_\sigma\bar{g}\bar{g}^{-1},t_a\rangle\\ =&\langle\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g},\bar{g}^{-1}t_a\bar{g}\rangle\\ =&\langle\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g},-\bar{a}^{-T}{}_a{}^c(\bar{g})\bar{\Pi}_{cb}(\bar{g})\bar{t}^b+\bar{a}^{-T}{}_a{}^b(\bar{g})t_b\rangle\\ =&\bar{a}^{-T}{}_a{}^b(\bar{g})(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})_b \ ,\end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned}l^{-1}\partial_\sigma l=&\begin{pmatrix}(l^{-1}\partial_\sigma l)_a & (l^{-1}\partial_\sigma l)^a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{t}^a\\ t_a\end{pmatrix}\\ =&\bar{g}^{-1}(g^{-1}\partial_\sigma g+\partial_\sigma\bar{g}\bar{g}^{-1})\bar{g}\\ =&\begin{pmatrix}(\partial_\sigma\bar{g}\bar{g}^{-1})^T & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{g}^{-1}\bar{t}\bar{g}\\ \bar{g}^{-1}t\bar{g}\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}(\partial_\sigma\bar{g}\bar{g}^{-1})^T & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{a}(\bar{g}) & 0\\ -\bar{a}^{-T}(\bar{g})\bar{\Pi}(\bar{g}) & \bar{a}^{-T}(\bar{g})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{t}\\ t\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}(\partial_\sigma\bar{g}\bar{g}^{-1})^T\bar{a}(\bar{g}) & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T\bar{a}^{-T}(\bar{g})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\bar{\Pi}(\bar{g}) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{t}\\ t\end{pmatrix}\\ =&\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T & (g^{-1}\partial_\sigma g)^T\bar{a}^{-T}(\bar{g})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\bar{\Pi}(\bar{g}) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{t}\\ t\end{pmatrix} \ .\end{aligned} \tag{124}$$

前節同様に $\rho = \bar{a}^{-1}(\bar{g})(g^{-1}\partial_\sigma g)$ と置けば

$$
\begin{aligned}
\hat{S} &= \int d^2\sigma \rho^T(\bar{g}^{-1}\partial_\tau \bar{g}) - \frac{1}{2}\langle l^{-1}\partial_\sigma l, \hat{\mathcal{H}}(l^{-1}\partial_\sigma l)\rangle \\
&= \int d^2\sigma \rho^T(\bar{g}^{-1}\partial_\tau \bar{g}) \\
&\quad - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T & \rho^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ -\bar{\Pi}(\bar{g}) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G_0^{-1} & G_0^{-1}B_0 \\ -B_0G^{-1} & G_0 - B_0G_0^{-1}B_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \bar{\Pi}(\bar{g}) \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g}) \\ \rho\end{pmatrix} \\
&= \int d^2\sigma \left[\rho^T(\bar{g}^{-1}\partial_\tau\bar{g}) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g})^T & \rho^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G'^{-1} & G'^{-1}B' \\ -B'G'^{-1} & G' - B'G'^{-1}B'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\bar{g}^{-1}\partial_\sigma\bar{g}) \\ \rho\end{pmatrix}\right] ,
\end{aligned}
\tag{125}
$$

を得る．ここで新たに定義した対称行列 G'，反対称行列 B' は

$$
G' + B' = G_0 + B_0 + \bar{\Pi}(\bar{g}) , \tag{126}
$$

で与えられる．この作用を見ると，$g \in \mathcal{G}$ の世界面の時間微分が含まれていないことが分かる．故に $g \in \mathcal{G}$ は物理的ではなく，拘束系になっている．

3.4.5 ハミルトン形式 2

拘束条件を解くためにハミルトン形式に移行する．まず，作用を左不変カレントの係数 (106) を用いて書き下す．

$$
\begin{aligned}
\hat{S} = \int d^2\sigma \Big[&\partial_\sigma X^T L^{-1}\bar{a}^{-T}\bar{L}^{-T}\partial_\tau\bar{X} \\
&-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_\sigma\bar{X}^T\bar{L}^{-1} & \partial_\sigma X^T L^{-1}\bar{a}^{-T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G'^{-1} & G'^{-1}B' \\ -B'G'^{-1} & G' - B'G'^{-1}B'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma\bar{X} \\ \bar{a}^{-1}L^{-T}\partial_\sigma X\end{pmatrix}\Big] .
\end{aligned}
\tag{127}
$$

$X^i, \bar{X}_i$ の共役運動量 $P_i, \bar{P}^i$ は

$$
P_i = 0 , \tag{128}
$$

$$
\bar{P}^i = (\bar{L}^{-1}\bar{a}^{-1}L^{-T}\partial_\sigma X)^i , \tag{129}
$$

であるから Lagrange の未定乗数 $\lambda^i, \bar{\lambda}_i$ を用いてハミルトニアン $\bar{\mathcal{H}}$ を書く．

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{H}} =& P_i\partial_\tau X^i + \bar{P}^i\partial_\tau\bar{X}_i - \partial_\sigma X^T L^{-1}\bar{a}^{-T}\bar{L}^{-T}\partial_\tau\bar{X} \\
&+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_\sigma\bar{X}^T\bar{L}^{-1} & \partial_\sigma X^T L^{-1}\bar{a}^{-T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G'^{-1} & G'^{-1}B' \\ -B'G'^{-1} & G' - B'G'^{-1}B'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma\bar{X} \\ \bar{A}^{-1}L^{-T}\partial_\sigma X\end{pmatrix} \\
&+ \lambda^T P + \bar{\lambda}^T(\bar{P} - \bar{L}^{-1}\bar{a}^{-1}L^{-T}\partial_\sigma X) .
\end{aligned}
\tag{130}
$$

このハミルトニアンの拘束条件を解けば

$$
\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_\sigma\bar{X}^T\bar{L}^{-1} & \bar{P}\bar{L}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G'^{-1} & G'^{-1}B' \\ -B'G'^{-1} & G' - B'G'^{-1}B'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma\bar{X} \\ \bar{L}\bar{P}\end{pmatrix} , \tag{131}
$$

を得る．

3.4.6 $\bar{\mathcal{G}}$ のラグランジアンの導出

$\bar{\mathcal{G}}$ の元 $\bar{g}$ のみで書いたハミルトニアンからラグランジアンを導出する．$\partial_\tau \bar{X}$ をハミルトニアンから導出すれば，

$$\begin{aligned}
\partial_\tau \bar{X} =& \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \bar{P}} \\
=& \bar{L}^T (G' - B'G'^{-1}B')\bar{L}\bar{P} - \bar{L}^T B'G'^{-1}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma \bar{X} \ , \\
\bar{P} =& \bar{L}^{-1}(G' - B'G'^{-1}B')^{-1}\bar{L}^{-T}\partial_\tau \bar{X} + \bar{L}^{-1}(G' - B'G'^{-1}B')^{-1}B'G'^{-1}\bar{L}^{-T}\partial_\sigma \bar{X} \ .
\end{aligned} \tag{132}$$

を得る．これを用いてラグランジアンを計算する．

$$M' = G' - B'G'^{-1}B' \ , \tag{133}$$

と置けば，

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{L}} =&\partial_\tau \bar{X}^T \bar{P} - \bar{\mathcal{H}} \\
=&\partial_\tau \bar{X}^T (\bar{L}^{-1} M'^{-1} \bar{L}^{-T} \partial_\tau \bar{X} + \bar{L}^{-1} M'^{-1} B' G'^{-1} \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X}) \\
&- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\sigma \bar{X}^T \bar{L}^{-1} & \bar{P} \bar{L}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G'^{-1} & G'^{-1} B' \\ -B' G'^{-1} & M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X} \\ \bar{L} \bar{P} \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau \bar{X}^T \bar{L}^{-1} & \partial_\sigma \bar{X}^T \bar{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2M'^{-1} & M'^{-1} B' G'^{-1} \\ -G'^{-1} B' M'^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} \partial_\tau \bar{X} \\ \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X} \end{pmatrix} \\
&- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau \bar{X}^T \bar{L}^{-1} & \partial_\sigma \bar{X}^T \bar{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M'^{-1} \\ 1 & -G'^{-1} B' M'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G'^{-1} & G'^{-1} B' \\ -B' G'^{-1} & M' \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ M'^{-1} & M'^{-1} B' G'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} \partial_\tau \bar{X} \\ \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X} \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau \bar{X}^T \bar{L}^{-1} & \partial_\sigma \bar{X}^T \bar{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2M'^{-1} & M'^{-1} B' G'^{-1} \\ -G'^{-1} B' M'^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} \partial_\tau \bar{X} \\ \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X} \end{pmatrix} \\
&- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau \bar{X}^T \bar{L}^{-1} & \partial_\sigma \bar{X}^T \bar{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M'^{-1} B' G'^{-1} & 1 \\ G'^{-1} + G'^{-1} B' M'^{-1} B' G'^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ M'^{-1} & M'^{-1} B' G'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} \partial_\tau \bar{X} \\ \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X} \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau \bar{X}^T \bar{L}^{-1} & \partial_\sigma \bar{X}^T \bar{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2M'^{-1} & M'^{-1} B' G'^{-1} \\ -G'^{-1} B' M'^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} \partial_\tau \bar{X} \\ \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X} \end{pmatrix} \\
&- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau \bar{X}^T \bar{L}^{-1} & \partial_\sigma \bar{X}^T \bar{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M'^{-1} B' G'^{-1} & 1 \\ M'^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ M'^{-1} & M'^{-1} B' G'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} \partial_\tau \bar{X} \\ \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X} \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau \bar{X}^T \bar{L}^{-1} & \partial_\sigma \bar{X}^T \bar{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2M'^{-1} & M'^{-1} B' G'^{-1} \\ -G'^{-1} B' M'^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} \partial_\tau \bar{X} \\ \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X} \end{pmatrix} \\
&- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_\tau \bar{X}^T \bar{L}^{-1} & \partial_\sigma \bar{X}^T \bar{L}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M'^{-1} & 0 \\ 0 & M'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} \partial_\tau \bar{X} \\ \bar{L}^{-T} \partial_\sigma \bar{X} \end{pmatrix} \\
=&\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\bar{g}^{-1} \partial_\tau \bar{g})^T & (\bar{g}^{-1} \partial_\sigma \bar{g})^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M'^{-1} & M'^{-1} B' G'^{-1} \\ -G'^{-1} B' M'^{-1} & -M'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\bar{g}^{-1} \partial_\tau \bar{g}) \\ (\bar{g}^{-1} \partial_\sigma \bar{g}) \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}
\tag{134}
$$

を得る．従って，最終的に作用は

$$
\begin{aligned}
\bar{S} &= -\int d\sigma_+ d\sigma_- (\bar{g}^{-1}\partial_+\bar{g})^T \left(M'^{-1} - M'^{-1}B'G'^{-1}\right)(\bar{g}^{-1}\partial_-\bar{g}) \\
&= -\int d\sigma_+ d\sigma_- (\bar{g}^{-1}\partial_+\bar{g})^T M'^{-1}(G'-B')G'^{-1}(\bar{g}^{-1}\partial_-\bar{g}) \\
&= -\int d\sigma_+ d\sigma_- (\bar{g}^{-1}\partial_+\bar{g})^T (G'+B')G'(G'-B')^{-1}(G'-B')G'^{-1}(\bar{g}^{-1}\partial_-\bar{g}) \\
&= -\int d\sigma_+ d\sigma_- (\bar{g}^{-1}\partial_+\bar{g})^T (G'+B')(\bar{g}^{-1}\partial_-\bar{g}) \\
&= -\int d\sigma_+ d\sigma_- (\bar{g}^{-1}\partial_+\bar{g})_a \left(\frac{1}{G_0+B_0+\bar{\Pi}(\bar{g})}\right)^{ab} (\bar{g}^{-1}\partial_-\bar{g})_b
\end{aligned}
\tag{135}
$$

を得る．この作用から標的空間 $\{\bar{X}_m\}$ 上の計量 $G_{\bar{X}}$ と B 場 $B_{\bar{X}}$ を読み取れば

$$
(G_{\bar{X}} + B_{\bar{X}})^{mn} = \bar{L}^{-1m}{}_a \left(\frac{1}{G_0+B_0+\bar{\Pi}(\bar{g})}\right)^{ab} \bar{L}^{-T}{}_b{}^n \ , \tag{136}
$$

を得る．以上より，作用 $\hat{S}$ と等価な作用から 2 通りの計量，B 場 (118)(136) を導出できた．この 2 つの背景場の対応を Poisson-Lie T 双対性と呼ぶ．即ち，Poisson-Lie T 双対性によって

$$
(G_X + B_X)_{mn} = L^{-1}{}_m{}^a \left(\frac{1}{\frac{1}{G_0+B_0} + \Pi(g)}\right)_{ab} L^{-Tb}{}_n \ , \tag{137}
$$

$$
(G_{\bar{X}} + B_{\bar{X}})^{mn} = \bar{L}^{-1m}{}_a \left(\frac{1}{G_0+B_0+\bar{\Pi}(\bar{g})}\right)^{ab} \bar{L}^{-T}{}_b{}^n \ , \tag{138}
$$

が対応する．この結果は $\bar{f}^{ab}{}_c = 0$ の時，非アーベル的 T 双対性に一致する．故に，Poisson-Lie T 双対性は非アーベル的 T 双対性の拡張であると見なせる．

4　標準的な二重場理論 (NS-NS セクター)

3 章で述べたように 6 次元の余剰次元の幾何学は弦の質量スペクトルを変える．故に弦理論が標準模型を有効理論に持つためには標準模型と無矛盾な質量スペクトルを持つような余剰次元の背景場を求める必要がある．しかし，通常のコンパクト化で得られる弦の背景場を考えると質量 0 の粒子が標準模型よりも多く含まれてしまい，弦理論を標準模型に帰着させることができない．したがって，新たな弦の背景場の探索が重要な課題である．その探索の手がかりとして期待されているのが T 双対性である．

3 章で述べたように弦理論には背景場には T 双対性が存在する．特に，量子論の対応が明確である Buscher 則においては弦の運動量と巻き付き数が交換することを確認できる (58)．そのため，T 双対性は巻き付き数を持たない粒子には存在しない双対性であり，弦の特徴を強く反映していると期待される．

しかし，弦の背景場の有効理論として知られる 10 次元超重力理論は運動量の共役座標しか持たず，巻き付き数の共役座標を持たないために T 双対変換に対して理論が共変ではない．そこで，巻き付き数に対応した 10 次元座標を加えた 20 次元座標上で Buscher 則について共変な理論が構成された．この T 双対共変な 20 次元時空の理論を二重場理論 (Double Field Theory) と呼ぶ [7, 8, 9]．二重場理論上で Buscher 則を行うと座標の入れ替えが起きる．この座標の入れ替えは回転と合わせて，定数の $O(D,D)$ 変換に埋め込まれており，二重場理論はこの定数の $O(D,D)$ 変換に顕わに共変な形で作用が構成される．本章では特に計量，B 場，ディラトンを含む二重場理論の NS-NS セクターについて作用を構成する方法を説明する．

標準的な二重場理論には主に計量による定式化 (metric formalization) とフラックスによる定式化 (flux formulation) 2 つの定式化が存在するが，本章では次章で構成する新しい二重場理論と対応関係が見やすいフラックスによる定式化を説明する．その後，二重場理論が超弦理論の拡張になっていることを確認する．さらに，近年，弦の背景に対する新たな方程式として期待されている一般化超重力理論 (Generalized Supergravity Equations:GSE) も二重場理論が含むことを紹介する．

4.1　二重場理論の構成要素

本節では二重場理論を構成するのに必要な場や内積などの構成要素を定義する．まず，二重場理論の座標空間を定義する．運動量の共役座標である通常の 10 次元標的空間の座標 10 次元を

$$x^m : \text{運動量の 10 次元共役座標} \ , \tag{139}$$

と書く．これに対して巻き付き数の共役座標として 10 次元双対座標

$$\tilde{x}_m : \text{巻き付き数の 10 次元共役座標} \ , \tag{140}$$

を定義する．二重場理論では $\tilde{x}_m, x^m$ をまとめて

$$X^M = (X_m, X^m) = (\tilde{x}_m, x^m) \ , \tag{141}$$

と書いて 20 次元座標空間上で理論を構成する．添え字に関しては

$$l, m, n \in \{1, 2, \cdots, 10\} : \text{10 次元座標の添え字} \ , \tag{142}$$

$$L, M, N \in \{1, 2, \cdots, 20\} : \text{20 次元座標の添え字} \ , \tag{143}$$

の規則で用いる．このようにして導入された二重場理論の座標であるが，スピノル表現の議論をしない限りは 20 次元座標という具体的な次元は重要ではない．そこで慣例に則って本論文でも基本的には二重場理論を $2D$ 次元上の理論として構成する．具体的な数を知りたい場合は常に

$$D = 10 \ , \tag{144}$$

と読み替えればよい．

X^M の座標をもつ空間を $\mathbb{M}$ と書く．この上で接ベクトル空間 $T\mathbb{M}$ を導入する．

$$T\mathbb{M} = \{V^M \partial_M | V^M \in C^\infty(\mathbb{M})\} \ . \tag{145}$$

$T\mathbb{M}$ 上には内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle : T\mathbb{M} \times T\mathbb{M} \to C^\infty(\mathbb{M})$ が定義され，基底に対する内積 η_{MN} は $O(D,D)$ 計量と呼ぶ．

$$\eta_{MN} = \langle \partial_M, \partial_N \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \delta^m{}_n \\ \delta_m{}^n & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{146}$$

テンソルの添え字の上げ下げは η_{MN} を用いる．例えば，任意のテンソルの係数 T^{MN} に対して下付きの添え字は

$$T_M{}^N = \eta_{MM'} T^{M'N} \tag{147}$$

と定義される．

この $O(D,D)$ 計量 η_{MN} を不変に保つ基底変換を $O(D,D)$ 変換と呼ぶ．即ち，基底変換 $\partial_N \mapsto O^M{}_N \partial_M$ が $O(D,D)$ 変換であるということは

$$\eta_{MN} = \langle O^{M'}{}_M \partial_{M'}, O^{N'}{}_N \partial_{N'} \rangle = O^T{}_M{}^{M'} \eta_{M'N'} O^{N'}{}_N \tag{148}$$

を満たすことを意味する．また，この条件を満たす行列 $O^M{}_N$ を $O(D,D)$ 行列と呼ぶ．

NS-NS セクターの物理的場は $O(D,D)$ 行列である一般化計量 (generalized metric) H_{MN} とスカラーである一般化ディラトン (generalized dilaton) d として導入される．

$$O(D,D) \text{ テンソル} : H_{MN} \ , \ \text{スカラー} : d \ . \tag{149}$$

二重場理論を超重力理論の拡張と見なすためには，超重力理論を含まなければならない．二重場理論から超重力理論を得る手順を次元簡約と呼ぶ．詳しい内容は 4.5 節で述べるが，その際，一般化計量 H_{MN} と一般化ディラトン d は 10 次元の計量 G，B 場 B，ディラトン ϕ と

$$H_{MN} = \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \ , \ d = \phi - \frac{1}{4}\log(\det G) \ , \tag{150}$$

の対応を持つ．

通常の重力理論と同様に局所ローレンツ基底

$$E_A = (E^a, E_a) = E_A{}^M \partial_M \ , \tag{151}$$

を導入する．$E_A{}^B$ を一般化多脚場と呼ぶ．添え字に関しては

$$a,b,c,d,e,f,g \in \{1,2,\cdots,10\} : 10 \text{ 次元座標の添え字} \ , \tag{152}$$

$$A,B,C,D,E,F,G \in \{1,2,\cdots,20\} : 20 \text{ 次元座標の添え字} \ , \tag{153}$$

の規則で用いる．局所ローレンツ基底には $O(D,D)$ 計量と一般化計量が平坦であることを要請する．

$$\eta_{AB} = \langle E_A, E_B\rangle = E_A{}^M \eta_{MN} E^{TN}{}_B = \begin{pmatrix} 0 & \delta^a{}_b \\ \delta_a{}^b & 0 \end{pmatrix} , \tag{154}$$

$$H_{AB} = E_A{}^M H_{MN} E^{TN}{}_B = \begin{pmatrix} s^{ab} & 0 \\ 0 & s_{ab} \end{pmatrix} . \tag{155}$$

ここで s_{ab} は 10 次元の局所ローレンツ基底における計量で

$$s_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1,1,\cdots,1) \tag{156}$$

である．(154) から分かるように一般化多脚場は η_{MN} を変えない．故に，一般化多脚場 $E_A{}^M$ は $O(D,D)$ 行列である．

局所ローレンツ基底は一般相対論と同様に局所ローレンツ変換が定義できる．一般相対論では計量 s_{ab} を不変に保つ基底変換を局所ローレンツ変換呼ぶが，二重場理論においては η_{AB}, H_{AB} の 2 つの計量の構造があるため，2 つの計量を不変に保つ変換を局所ローレンツ変換，もしくは $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換と呼ぶ．即ち，基底変換 $E_A \mapsto E_B O^B{}_A$ が局所ローレンツ変換 ($O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換) であるとは

$$\begin{aligned} \eta_{AB} &= O^T{}_A{}^{A'} \eta_{A'B'} O^{A'}{}_B \ , \\ H_{AB} &= O^T{}_A{}^{A'} H_{A'B'} O^{A'}{}_B \ . \end{aligned} \tag{157}$$

を満たすことを意味する．この変換によって二重場理論の構成要素である内積と一般化計量，一般化ディラトンは不変である．故に，一般相対論と同様に局所ローレンツ変換は二重場理論の対称性になるべきである．実際，二重場理論の作用は局所ローレンツ変換で不変であることを作用の決定後に確かめる．

以上が基本的な二重場理論 (NS-NS セクター) の構成要素である．本節の最後に，重要な事項をまとめる．二重場理論の基本的な構成要素は

$$\text{内積} : \eta_{MN} \ , \text{物理的場} : H_{MN}, d \ , \tag{158}$$

である．一般化多脚場 $E_A{}^M$ によって局所ローレンツ基底 E_A が定義され，2 つの計量が局所平坦になる．

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^a{}_b \\ \delta_a{}^b & 0 \end{pmatrix} , \tag{159}$$

$$H_{AB} = \begin{pmatrix} s^{ab} & 0 \\ 0 & s_{ab} \end{pmatrix} . \tag{160}$$

また，一般化多脚場の局所ローレンツ変換 ($O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換) によって作用が不変であることが要請される．

4.2 一般化 Lie 微分

この節では二重場理論のゲージ変換を生成する一般化 Lie 微分を定義する．一般化 Lie 微分は超重力理論における一般座標変換と B 場のゲージ変換を拡張したものである．

超重力理論は一般座標変換と B 場のゲージ変換に対して作用が不変である．物理的な場が大域的に定義され，無限遠で 0 になる場合，一般座標変換の不変性と Lie 微分による不変性は等価である．故に超重力理論におけるゲージ変換はベクトル $V = V^m\partial_m$,1 形式 $\xi = \xi_m dx^m$ を用いて

$$\begin{aligned} \delta_{V,\xi}G &= L_V G \ , \\ \delta_{V,\xi}B &= L_V B + d\xi \ , \delta_{V,\xi}\phi = V^m\partial_m\phi \ , \end{aligned} \tag{161}$$

と書くことができる．

一方で二重化理論は一般化 Lie 微分 $\mathcal{L}$ が定義される．$V_1, V_2 \in T\mathbb{M}, \lambda$: scalar に対して

$$\mathcal{L}_{V_1}V_2 = V_1^M\partial_M V_2^N\partial_N - V_2^M\partial_M V_1^N\partial_N + \eta_{MM'}\eta^{NN'}V_2^M\partial_N V_1^{M'}\partial_{N'} + w_2\partial_N V_1^N V_2^M\partial_M \ , \tag{162}$$

$$\mathcal{L}_{V_1}\lambda = V_1^N\partial_N\lambda + w\partial_N V_1^N\lambda \ , \tag{163}$$

と与えられる．ここで w_2, w はそれぞれ V_2, λ のウェイトである．ウェイトはディラトンのみが持つ量で

$$\text{ウェイト } 0 : H_{MN}, \eta_{MN} \ , \ \text{ウェイト } 1 : e^{-2d} \tag{164}$$

と与えられる．ベクトル同士の一般化 Lie 微分はウェイトを除き D 括弧 (30) と同じ代数である．一般化計量 $H = H^{MN}\partial_M\partial_N$ のゲージ変換はこの一般化 Lie 微分により与えられる．ベクトル $\hat{V} = \hat{V}^m\partial_m + \hat{V}_m\partial^m \in T\mathbb{M}$ によるゲージ変換は

$$\delta_{\hat{V}}H = \mathcal{L}_{\hat{V}}H \ , \tag{165}$$

である．超重力理論を二重場理論から導出する際は (150) で述べたように，

$$H_{MN} = \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \ , \ d = \phi - \frac{1}{4}\log(\det G) \ , \tag{166}$$

と一般化計量を対応させる．また，超重力理論には $\tilde{x}_m$ 座標が存在しないから超重力理論を二重場理論から導出する際には $H_{MN}, \hat{V}$ から $\tilde{x}_m$ 依存性を落とす必要がある．この時，H_{MN}, d のゲージ変換から G, B, ϕ のゲージ変換を読み取れば

$$\begin{aligned} \delta_{\hat{V}}G &= L_{\hat{V}^m\partial_m}G \ , \\ \delta_{\hat{V}}B &= L_{\hat{V}^m\partial_m}B + d(\hat{V}_m dx^m) \ , \\ \delta_{\hat{V}}\phi &= \hat{V}^m\partial_m\phi \ , \end{aligned} \tag{167}$$

となっている．$\hat{V}^m = V^m, \hat{V}_m = \xi_m$ と置けば，この変換は超重力理論のゲージ変換と一致する．故に，一般化 Lie 微分は超重力理論のゲージ変換の拡張である．

また，二重場理論は Buscher 則に対して共変であることを要請している．Buscher 則は運動量と巻き付き数を交換するが，これは二重場理論においては $x^m, \tilde{x}_m$ を交換することに対応する．一般化 Lie 微分の定義 (162) を見れば，全ての添え字は縮約されており，座標の交換によって共変である．故に，一般化 Lie 微分は超重力理論のゲージ変換を座標の交換によって共変に持ち上げた変換であると理解できる．

4.3 閉包条件

前節で述べたように二重場理論にはゲージ変換 $\delta_{\hat{V}}$ が存在する．このゲージ変換のゲージ代数の閉包条件を要請する．これは，閉包条件を課すことでゲージ代数が一般化 Lie 微分で書けない変換まで広がってしまうことを防ぐほかに，4.4 節で示すように作用のゲージ不変性を示すための十分条件を得る役割がある．

しかし，この閉包条件は論理的に必ずしも必要ではなく，4.4 節の計算を実行するための道具の側面が強い．実際，閉包条件を課さずに二重場理論の構成を行うことは可能であり，これが本論文における重要な結果の 1 つである．閉包条件を用いない新たな二重場理論の構成に関しては 5 章で詳しく述べる．

さて，ゲージ代数の閉包条件は次で与えられる．

$$\delta_W\delta_V - \delta_V\delta_W = \delta_{[V,W]_C} \ . \tag{168}$$

左辺は V, W の入れ替えに対して反対称であるから右辺も同様に反対称である必要がある．そこで右辺で用いる括弧は単純に D 括弧ではなく，C 括弧 $[\cdot,\cdot]_C$ が用いられる．C 括弧は D 括弧 $\mathcal{L}_V W = [V,W]_D$ の反対称化で定義される．

$$[V,W]_C = \frac{1}{2}([V,W]_D - [W,V]_D) \ . \tag{169}$$

実際に物理的場の上でゲージ代数を計算すれば

$$(\delta_{E_A}\delta_{E_B} - \delta_{E_B}\delta_{E_A} - \delta_{[E_B,E_A]_C})E_C = \mathcal{Z}_{ABCD}E^D \ , \tag{170}$$

$$(\delta_{E_A}\delta_{E_B} - \delta_{E_B}\delta_{E_A} - \delta_{[E_B,E_A]_C})d = \frac{1}{2}\mathcal{Z}_{AB} \ , \tag{171}$$

を得る．ここで $\mathcal{Z}_{ABCD}, \mathcal{Z}_{AB}$ は

$$\mathcal{Z}_{ABCD} = 3\Omega_{E[AB}\Omega^E{}_{CD]} \ , \tag{172}$$

$$\mathcal{Z}_{AB} = -(E_C{}^N\partial_N + \partial_N E_C{}^N - 2E_C{}^N\partial_N d)\Omega^C{}_{AB} \ , \tag{173}$$

で定義される．Ω_{ABC} は Weitzenböck 接続と呼ばれ

$$\Omega_{ABC} = E_A{}^L\partial_L E_B{}^M\eta_{MN}E_C{}^N \ , \tag{174}$$

で定義される．よって，ゲージ代数の閉包条件は

$$\mathcal{Z}_{ABCD} = 0 \ , \ \mathcal{Z}_{AB} = 0 \ , \tag{175}$$

によって与えられる．

閉包条件に含まれる Weitzenböck 接続を (174) で展開すれば

$$\mathcal{Z}_{ABCD} = 3\partial_N E_{[A}{}^L E_{B|L}\partial^N E_{|C}{}^M E_{D]M} \tag{176}$$

$$\mathcal{Z}_{AB} = -(\partial_L\partial^L E_A{}^N)E_{BN} - \partial^L E_A{}^N\partial_L E_{BN} + 2\partial_N d\partial^N E_A{}^M E_{BM} \tag{177}$$

を得る．この式を見れば，微分演算子同士が縮約していることに気付く．故に，閉包条件の解として任意の場 Ψ_1, Ψ_2 に対し

$$\partial_M\Psi_1\partial^M\Psi_2 = 0 \ , \ \partial_M\partial^M\Psi_1 = 0 \ , \tag{178}$$

を課すことが考えられる．この条件は強い拘束条件 (strong constraint) と呼ばれ，最も簡単な解は，全ての場が x^m だけに依存するものである．超重力理論に縮約する際は場が x^m のみに依存しているから，実際にこの条件を満たす．

多くの二重場理論における論文では強い拘束条件を課して理論を構築する．しかし，ゲージ代数の閉包条件を考える場合には強い拘束条件は強すぎる条件である．本章では強い拘束条件は課さずに，閉包条件のみを理論に課して二重場理論を構成する．

4.4 作用のフラックス定式化

ここまでで，二重場理論の構成要素とゲージ代数の閉包条件に付いて述べた．本節では，実際に二重場理論の作用を構成する．二重場理論の構成にはフラックス F_{ABC}, F_A を用いる．フラックスは一般化 Lie 微分を用いて

$$\mathcal{L}_{E_A} E_B = F_{ABC} E^C \ , \tag{179}$$

$$\mathcal{L}_{E_A} e^{-2d} = -F_A e^{-2d} \ , \tag{180}$$

で定義する．具体的な成分は

$$F_{ABC} = 3\Omega_{[ABC]} \ , \tag{181}$$

$$F_A = -\partial_N E_A{}^N + 2 E_A{}^N \partial_N d \ , \tag{182}$$

で与えられる．このフラックスのゲージ変換を実行すると

$$\delta_{E_A} F_{BCD} = \partial_A F_{BCD} + \mathcal{Z}_{ABCD} \ , \tag{183}$$

$$\delta_{E_A} F_A = \partial_A F_B + \mathcal{Z}_{AB} \ , \tag{184}$$

を得る．故に閉包条件が成立する時，フラックスはゲージ変換に対して単にスカラーとして振る舞う．

$$\delta_{E_A} F_{BCD} = \partial_A F_{BCD}, \tag{185}$$

$$\delta_{E_A} F_A = \partial_A F_B \ . \tag{186}$$

これを用いて，ゲージ不変な積分 I_{inv} を作ることができる．

$$I_{inv} = \int dX e^{-2d} (C_1^{AA'BB'CC'} F_{ABC} F_{A'B'C'} + C_2^{AA'} F_A F_{A'}) \tag{187}$$

ここで $C_1^{AA'BB'CC'}, C_2^{AA'}$ は任意の定数行列である．実際にゲージ変換を実行すれば

$$
\begin{aligned}
& \delta_{E_A}\int dXe^{-2d}(C_1^{AA'BB'CC'}F_{ABC}F_{A'B'C'}+C_2^{AA'}F_AF_{A'}) \\
= & \int dX(\delta_{E_A}e^{-2d})(C_1^{AA'BB'CC'}F_{ABC}F_{A'B'C'}+C_2^{AA'}F_AF_{A'}) \\
& +\int dXe^{-2d}\delta_{E_A}(C_1^{AA'BB'CC'}F_{ABC}F_{A'B'C'}+C_2^{AA'}F_AF_{A'}) \\
= & \int dX-F_Ae^{-2d}(C_1^{AA'BB'CC'}F_{ABC}F_{A'B'C'}+C_2^{AA'}F_AF_{A'}) \\
& +\int dXe^{-2d}E_A{}^N\partial_N(C_1^{AA'BB'CC'}F_{ABC}F_{A'B'C'}+C_2^{AA'}F_AF_{A'}) \\
= & \int dX-(-\partial_NE_A{}^N+2E_A{}^N\partial_Nd)e^{-2d}(C_1^{AA'BB'CC'}F_{ABC}F_{A'B'C'}+C_2^{AA'}F_AF_{A'}) \\
& +\int dXe^{-2d}E_A{}^N\partial_N(C_1^{AA'BB'CC'}F_{ABC}F_{A'B'C'}+C_2^{AA'}F_AF_{A'}) \\
= & \ 0 \ ,
\end{aligned} \tag{188}
$$

となってゲージ不変であることが確かめられた．C_1, C_2 は超重力理論が得られるように η_{AB}, H_{AB} を組み合わせて

$$
C_1^{AA'BB'CC'} = -\frac{1}{6}\eta^{AA'}\eta^{BB'}\eta^{CC'}+\frac{1}{4}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'}-\frac{1}{12}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'} \ , \tag{189}
$$

$$
C_2^{AA'} = -(\eta^{AA'}-H^{AA'}) \ , \tag{190}
$$

と置く．即ち，二重場理論の作用 S は

$$
\begin{aligned}
& S_{sDFT} \\
= & \int dXe^{-2d}\Big[\Big(-\frac{1}{6}\eta^{AA'}\eta^{BB'}\eta^{CC'}+\frac{1}{4}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'}-\frac{1}{12}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'}\Big)F_{ABC}F_{A'B'C'} \\
& -(\eta^{AA'}-H^{AA'})F_AF_{A'}\Big] \\
= & \int dXe^{-2d}\Big[\Big(-\frac{1}{6}\eta^{AA'}\eta^{BB'}\eta^{CC'}+\frac{1}{4}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'}-\frac{1}{12}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'}\Big)F_{ABC}F_{A'B'C'} \\
& -2(\eta^{AA'}-H^{AA'})E_A{}^N\partial_NF_{A'}+(\eta^{AA'}-H^{AA'})F_AF_{A'}\Big] \ ,
\end{aligned} \tag{191}
$$

によって定義される．この作用の形は $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変な形になっている．実際，$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換

$$
\delta_\Lambda E_A = E_B\Lambda^B{}_A \ , \tag{192}
$$

によって作用は

$$
\delta_\Lambda S = \int dXe^{-2d}\mathcal{Z}_{AC}\Lambda_B{}^C(\eta^{AB}-H^{AB}) \ , \tag{193}
$$

と変換されるから，閉包条件の下で

$$
\delta_\Lambda S = 0 \ , \tag{194}
$$

が従う．以上より，二重場理論の作用は

- Buscher 則により共変．

- 一般化 Lie 微分によるゲージ変換で不変.
- 一般化 Lie 微分で生成されるゲージ代数が閉包条件を満たす.
- 超重力理論を含む.
- $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 変換により不変.

の 5 つの条件を満たす理論として構成された.

4.5 超重力理論への次元簡約

前節で従来の方法により二重場理論の作用まで導入した．本節では，実際に二重場理論の作用から超重力理論の作用を導出する.

超重力理論の場である計量 G，B 場 B，ディラトン ϕ と二重場理論の場の対応を与える.

$$H_{MN} = \begin{pmatrix} G^{-1} & -G^{-1}B \\ BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \ , \ d = \phi - \frac{1}{4}\log(\det G) \ . \tag{195}$$

超重力理論には $\tilde{x}_m$ 座標が存在しないため，全ての場は x^m にのみ依存する．故に，任意の場 ψ に対して

$$\partial^m \psi = 0 \ , \tag{196}$$

を課す．これは強い拘束条件を満たすため，閉包条件を用いることができ，二重場理論を適用することができる．閉包条件を満たすとき，作用は $O(1, D-1) \times (D-1, D)$ 変換によって不変である．故に，一般化多脚場は

$$E_A{}^N = \begin{pmatrix} e^{-T a}{}_m & 0 \\ 0 & e_a{}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^m{}_n & 0 \\ -B_{mn} & \delta_m{}^n \end{pmatrix} \ , \tag{197}$$

と決定しても一般性を損なわない．ここで $e_a{}^m$ は D 次元上の多脚場であり

$$e_a{}^m G_{mn} e^{Tn}{}_b = s_{ab} \ , \tag{198}$$

を満たす.

作用を計算するためにはフラックスをそれぞれ導出すればよい．F_{ABC}, F_A を添え字の付き方によってそれぞれ求めれば

$$\begin{aligned} F_{abc} &= 3e_a{}^l e_b{}^m e_c{}^n \partial_{[l} B_{mn]} \ , \\ F^a{}_{bc} &= f^{(e)a}_{bc} \ , \\ F^{ab}{}_c &= 0 \ , \\ F^{abc} &= 0 \ , \\ F_a &= f^{(e)}_a + 2e^m_a \partial_m \phi \ , \\ F^a &= 0 \ , \end{aligned} \tag{199}$$

を得る．ここで $f^{(e)}_{abc}, f^{(e)}_a$ は D 次元の多脚場から作られる関数で

$$f^{(e)}_{abc} = -2e_{[a}{}^m e_{b]}{}^n \partial_m e^{-1}{}_m{}^c \tag{200}$$

$$f^{(e)}_a = -\frac{1}{\sqrt{\det G}} \partial_m (\sqrt{\det G} e_a{}^m) \tag{201}$$

により定義される．これらを作用に代入すれば

$$
\begin{aligned}
S_{sDFT} &= \int dX\sqrt{\det G}e^{-2\phi}\Big[-\frac{1}{2}f_{ba}{}^{c}f_{cd}{}^{b}s^{ad}-\frac{1}{4}f_{ab}{}^{c}f_{de}{}^{f}s^{ad}s^{be}s_{cf}-\frac{1}{12}H_{abc}H_{def}s^{ad}s^{be}s^{cf} \\
&\quad +f_a f_b s^{ab}+4G^{mn}(\partial_m\phi)(\partial_n\phi)+\frac{1}{\sqrt{\det G}}\partial_n(\sqrt{\det G}f_a e_b{}^{n})s^{ab}\Big] \\
&= \int dX\sqrt{\det G}e^{-2\phi}\Big[R^{(e)}-\frac{1}{12}H_{abc}H_{def}s^{ad}s^{be}s^{cf}+4G^{mn}(\partial_m\phi)(\partial_n\phi)\Big] \\
&= \tilde{V}\int dx\sqrt{\det G}e^{-2\phi}\Big[R^{(e)}-\frac{1}{12}H_{abc}H_{def}s^{ad}s^{be}s^{cf}+4G^{mn}(\partial_m\phi)(\partial_n\phi)\Big] \qquad (202)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで $R^{(e)}$ は D 次元の多脚場で書かれた Ricci スカラーである．また，$\tilde{V}$ は $\tilde{x}_m$ の体積で $\tilde{V}=\int d\tilde{x}$ である．

この作用はまさに超重力理論の NS-NS セクターである．故に，二重場理論は超重力理論 (NS-NS セクター) を含むことが確かめられた．

4.6 一般化超重力理論 (GSE) への次元簡約

4.5 節において二重場理論から超重力理論が導出されることを見た．本節では超重力理論の拡張である一般化超重力理論 (GSE:Generalized Supergravity Equations) が含まれることを説明する．

一般化超重力理論とは D 次元の幾何学を構成する理論であり，弦の背景場になることが示唆されている．通常，弦理論の Weyl 不変性を要請した際には背景場が超重力理論に従わなければならないとされている．しかし，近年の研究で一般化超重力理論 (GSE) の解になる背景場はくりこみ項 (counterterm) を考慮することで Weyl 不変性を回復することが示唆されている [12, 13]．ここで導入されたくりこみ項はディラトンの再定義で吸収できる形をしており，1 ループまででアノマリーを除去できることが示されている．より高次のループに関しては証明がないが，同様にくりこみ項を導入可能であることが期待されている．

一般化超重力理論は Generalized Supergravity Equations という名前の通り作用が存在していない理論である．この理論には運動方程式のみが存在しており，NS-NS セクターは次で与えられる．

$$
R^{(e)}+4\nabla^m\partial_m\phi-4|\partial\phi|^2-\frac{1}{2}|H|^2-4(I^mI_m+U^mU_m+2U^m\partial_m\phi-\nabla_mU^m) = 0\ , \qquad (203)
$$

$$
R^{(e)}_{mn}-\frac{1}{4}H_{mpq}H_n{}^{pq}+2\nabla_m\partial_n\phi+\nabla_mU_n+\nabla_nU_m = 0\ , \qquad (204)
$$

$$
-\frac{1}{2}\nabla^kH_{kmn}+\partial_k\phi H^k{}_{mn}+U^kH_{kmn}+\nabla_mI_n-\nabla_nI_m = 0\ . \qquad (205)
$$

ここで $I=I^m\partial_m$ は Killing ベクトルであり，

$$
L_IG=0\ ,\ L_IB=0\ ,\ L_I\phi=0\ , \qquad (206)
$$

を満たす．U_m は I^m で定義され，

$$
U_m=I^nB_{nm}\ , \qquad (207)
$$

で与えられる．座標変換によって I^m は定数に置くことができる．よって，以降の議論は I^m : 定数として議論を行う．この時，条件 (206) は特に

$$
I^l\partial_lG_{mn}=0\ ,\ I^l\partial_lB_{mn}=0\ ,\ I^l\partial_l\phi=0\ , \qquad (208)
$$

を意味する．

一般化超重力理論は超重力理論の拡張になっている．実際，$I=0$ のとき，一般化超重力理論は通常の超重力理論に一致する．

一般化超重力理論は二重場理論から導出することが可能である．導出方法は超重力理論を導出する手法 (4.5 節) とほぼ同様で，二重場理論の場として

$$H_{MN}=\begin{pmatrix} G^{-1} & -G^{-1}B \\ BG^{-1} & G-BG^{-1}B \end{pmatrix}\ ,\ d=\phi-\frac{1}{4}\log(\det G)+I^m\tilde{x}_m\ , \tag{209}$$

と置けばよい．超重力理論の置き方 (150) と比較するとディラトンのみが変更を受けている．二重場理論の構成に用いる閉包条件を確認する．特に，今の場合は強い拘束条件 (178) を満足することが確かめられる．

$$\begin{aligned} \partial_L d\partial^L H_{MN} &= I^l\partial_l H_{MN}=0\ , & (210)\\ \partial_L d\partial^L d &= 2I^l\partial_l(\phi-\frac{1}{4}\log(\det G))=0\ . & (211) \end{aligned}$$

ここで (208) を用いた．よって，二重場理論を用いることができる．最後に，(209) を作用に導入し，運動方程式を得れば，一般化超重力理論を得ることができる [11]．

本節で見たように，二重場理論は弦の新しい背景場の有効理論として提案されている一般化超重力理論を含む．故に，二重場理論は超重力理論で失われてしまった弦の背景場の性質を持っていることが期待される．このことは，二重場理論の研究を行う大きな動機の 1 つである．

5　閉包条件のない二重場理論の構成 (NS-NS セクター)

4 章で標準的な二重場理論の構成方法を述べた．この標準的な定式化には閉包条件 (168) が必要であり，この条件は物理的場に対して制限を課す．しかし，4.3 節で述べたように，閉包条件は作用の外から手で課される条件であるため，ラグランジアン未定乗数などによって作用から決定できる拘束条件と理解することもできない．また，二重場理論は $2D$ 次元の接ベクトル空間上の幾何学と解釈されるが，閉包条件を課された接ベクトル空間は一般に定義されていない．実際，二重場理論の場に課されている閉包条件は一般の接ベクトルに対する閉包条件 (168) ではなく，一般化多脚場に条件を課す (175) のみであり，閉包条件を課された接ベクトル空間全体がどのような構造を持っているかが解明されていない．以上，閉包条件に対する問題点をまとめれば

- 作用の中に閉包条件を課す機構が存在せず，手で作用の外から条件を課す必要がある．
- 閉包条件を課した後の接ベクトル空間が一般に定義されていない．

の 2 点である．故に，本章では閉包条件を用いない新たな二重場理論の構成を行う．

5.1　標準的な二重場理論との相違点

この節では標準的な二重場理論と本章で扱う新たな二重場理論の相違点について述べる．標準的な二重場理論の基礎となる前提は 4.4 節の終わりに述べたように

- Buscher 則により共変．
- 一般化 Lie 微分によるゲージ変換で不変．
- 一般化 Lie 微分で生成されるゲージ代数が閉包条件を満たす．
- 超重力理論を含む．
- $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 変換により不変．

の 5 つである．これに対して本章で説明する二重場理論では，2 つの条件を外して次の 3 つを要請する．

新たな二重場理論に対する要請

- Buscher 則により共変．
- ~~一般化 Lie 微分によるゲージ変換で不変．~~
- ~~一般化 Lie 微分で生成されるゲージ代数が閉包条件を満たす．~~
- 超重力理論を含む．
- $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 変換により不変．

特に，最後の $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 変換により不変であるという条件は一般相対論における局所ローレンツ変換に対応しており，最も重要な役割を果たす．

5.1.1 曲がった $O(D,D)$ 計量

本章で述べる二重場理論の構成要素についても一般化が可能である．内積を定義する $O(D,D)$ 計量に関して標準的な二重場理論では (146) で与えたように η_{MN} を定数行列に取る．一方で，本章ではこの前提を捨て，任意の対称行列 η_{MN} に対して理論を構築する．

新たな二重場理論における $O(D,D)$ 計量

$$\eta_{MN} = \left(\cancel{\begin{matrix} 0 & \delta^m{}_n \\ \delta_m{}^n & 0 \end{matrix}}\right) . \tag{212}$$

η_{MN} が座標依存性を持つ時，その空間を曲がった空間 (curved space) と呼ぶ．曲がった空間上の二重場理論は 3.3，3.4 節で述べた非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性に関係しており，興味深い研究対象である [25]．曲がった空間上の二重場理論に関する従来の研究は $\mathrm{DFT_{WZW}}$ と呼ばれ，特定の η_{MN} において正しい作用を与えるように補正項を手で与えて理論を構成している [22, 23, 24]．$\mathrm{DFT_{WZW}}$ は一般の曲がった空間上の二重場理論として提案されているが，特定の η_{MN} 上でしか正当化されておらず，一般の η_{MN} を考えた場合に新たな補正項が必要になる可能性を排除できない．本章ではこの点を改善し，η_{MN} の値に依らない二重場理論の構成方法を与え，曲がった空間上の二重場理論を定義する．

一般化多脚場の物理的自由度に関して　η_{MN} を一般の関数に拡張したことによって，一般化計量 $E_A{}^M$ の属する空間が変わることを述べる．一方で，物理的な自由度は変わらず，$\Big(O(1,D-1)\times O(D-1,1)\Big)\backslash O(D,D)$ であることを示す．

標準的な二重場理論では

$$\eta_{AB} = E_A{}^M \eta_{MN} E_B{}^N \ , \tag{213}$$

を用いて，$E_A{}^M$ が $O(D,D)$ 行列であることを示した．一方で，本章で扱う曲がった空間上の二重場理論では η_{MN} が任意の対称行列であるから $E_A{}^M$ は単に $GL(2D)$ 行列である．局所ローレンツ基底の $O(D,D)$ 計量と一般化計量との関係は

$$\begin{aligned} \eta_{AB} &= E_A{}^M \eta_{MN} E_B{}^N \ , \\ H_{AB} &= E_A{}^M H_{MN} E_B{}^N \ , \end{aligned} \tag{214}$$

であるから，$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換は物理的場を変えない．故に，$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換の自由度を多脚場から引いておく必要があって

$$E_A{}^M \in \Big(O(1,D-1)\times O(D-1,1)\Big)\backslash GL(2D) \tag{215}$$

が多脚場の持つ自由度である．

ここで，$E_A{}^M$ の "物理的" 自由度が変わらずに $\Big(O(1,D-1)\times O(D-1,1)\Big)\backslash O(D,D)$ であることを示す．今，二重場理論に含まれる物理的自由度を思い出せば

$$\text{物理的自由度} : H_{MN} \ , \ d \ , \tag{216}$$

であり，η_{MN} は物理的ではないことに注意する．H_{MN}, η_{MN} は多脚場を用いて

$$H_{MN} = E^{-1}{}_M{}^A H_{AB} E^{-TB}{}_N \ , \tag{217}$$

$$\eta_{MN} = E^{-1}{}_M{}^A \eta_{AB} E^{-TB}{}_N \ , \tag{218}$$

と書ける．物理的な自由度を顕わに見るために多脚場を

$$E_A{}^M = U_A{}^B \bar{E}_B{}^M \ , \tag{219}$$

と分離する．ここで $\bar{E}_A{}^M$ は

$$\bar{\eta}_{AB} := \bar{E}_A{}^M \eta_{MN} \bar{E}^{TN}{}_B = \begin{pmatrix} 0 & \delta^a{}_b \\ \delta_a{}^b & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{220}$$

を満たすように決定される．η_{MN} は物理的な自由度ではないから $\bar{E}_A{}^M$ は物理的自由度を持たない．したがって $E_A{}^M$ の物理的自由度は全て $U_A{}^B$ が持っている．$U_A{}^B$ は

$$\eta_{AB} = U_A{}^{A'} \bar{\eta}_{A'B'} U^{TB'}{}_B = \begin{pmatrix} 0 & \delta^a{}_b \\ \delta_a{}^b & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{221}$$

を満たすから $U_A{}^B$ は $O(D,D)$ 行列である．一方で

$$H_{MN} = \bar{E}^{-1}{}_M{}^{A'} U^{-1}{}_{A'}{}^A H_{AB} U^{-TB}{}_{B'} \bar{E}^{-TB'}{}_N \ , \tag{222}$$

$$\eta_{MN} = \bar{E}^{-1}{}_M{}^{A'} U^{-1}{}_{A'}{}^A \eta_{AB} U^{-TB}{}_{B'} \bar{E}^{-TB'}{}_N \ , \tag{223}$$

と書けるから，H_{MN}, η_{MN} を変えない自由度 $O(1,D-1) \times O(D-1,1)$ は理論に寄与を与えない．故に，物理的自由度について以下が従う．

多脚場 $E_A{}^M$ が持つ物理的自由度

多脚場 $E_A{}^M = U_A{}^B \bar{E}_B{}^M$ の物理的な自由度は $U_A{}^B$ が担っており

$$U_A{}^B \in \Big(O(1,D-1) \times O(D-1,1) \Big) \backslash O(D,D) \ , \tag{224}$$

となる．これは標準的な二重場理論と同じ物理的自由度である．

5.1.2 $T\mathbb{M}$ 上の代数構造と計量亜代数

標準的な二重場理論では $T\mathbb{M}$ 上の代数構造がウェイト付きの D 括弧 (162) で与えられた．このウェイト付きの D 括弧には次の 2 つの問題点がある．

ウェイト付きの D 括弧の問題点

- 座標変換について不変でないこと．
  - ウェイト付きの D 括弧 (162) の表式は微分を顕わに使っており，座標変換によって不変ではない．そのため，多様体上で定義されておらず，幾何学的な取り扱いが困難になってしまっている
- ウェイトを持つ量に対する変換が天下り的に与えられていること．
  - ウェイトの項は通常の 2 重場理論においてディラトンの変換性を生成するために手で付け足した項である．この項の二重場理論における幾何学的な解釈は議論されておらず，超重力理論に整合するように与えているのみである．特に本章で扱う η_{MN} が関数の空間上の二重場理論においてはディラトンの変換が通常通り扱われる保証はないため，通常のウェイトの依存性を取り入れるのは危険である．

この 2 つの問題点はどちらもウェイト付きの D 括弧を微分などを用いて具体的に書き下したこと

に由来する．そこで，D 括弧の具体形を用いずに，括弧が満たす代数的な性質のみを用いて二重場理論を構築する．特に，ディラトンの変換性についてはウェイトを用いることなく定義可能であるため (5.5 節)，ウェイトという概念を導入せずに理論を構築する．

D 括弧が閉包条件を満たすとき，この代数は Courant 亜代数 (2.1.3 節) を成すことが知られている．さらに，本章における二重場理論の構成では閉包条件を取り除くため，代数は計量亜代数 (2.1.4) を成す．そこで，本章では代数を成す括弧と内積に対して具体的な形を考えずに 2.1.4 節で与えた計量亜代数の公理だけを仮定する．

二重場理論の代数に対する要請

任意の $V_1, V_2, V_3 \in T\mathbb{M}$ に対して括弧 $[\cdot,\cdot]$，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，anchor 写像 ρ が存在して

$$\rho(V_1)(\langle V_2, V_3\rangle) = \langle [V_1, V_2], V_3\rangle + \langle V_2, [V_1, V_3]\rangle \ , \tag{225}$$

$$[V_1, V_1] = \frac{1}{2}\partial \langle V_1, V_1\rangle \ , \tag{226}$$

を満たす．今，代数が接ベクトル $T\mathbb{M}$ 上に定義されているから anchor 写像は自然に

$$\rho(V_1) = V_1 \ , \tag{227}$$

で定義する．

5.2 Dirac 生成演算子

5.1.2 節で述べたように本章では計量亜代数によって二重場理論を構成する．計量亜代数は Dirac 生成演算子 $\not{D}$ と呼ばれる演算子によって生成することができる．本節ではこの Dirac 生成演算子とこの演算子が作用する空間である Clifford バンドルを導入する．

Clifford バンドルの定義　初めに，Clifford バンドルを導入する．局所ローレンツ基底において内積は

$$\langle E_A, E_B\rangle = \eta_{AB} \ , \tag{228}$$

と与えられている．この内積を用いて Clifford 代数を

$$\{\gamma_A, \gamma_B\} = 2\eta_{AB} \ , \tag{229}$$

によって定義する．ここで括弧 $\{\cdot,\cdot\}$ は通常の Clifford 代数と同様に次数付きの括弧で

$$\{V, W\} = VW - (-1)^{|V||W|}WV = -(-1)^{|V||W|}\{W, V\} \ , \tag{230}$$

で定義される．ただし，$|V|$ は V の次数を表す．次数はガンマ行列の偶数個の積か奇数個の積かで定義される．

$$\begin{aligned} \text{次数 } odd &: \{\gamma_A, \gamma_{ABC}, \cdots\} \ , \\ \text{次数 } even &: \{1, \gamma_{AB}, \gamma_{ABCD}, \cdots\} \ . \end{aligned} \tag{231}$$

$\gamma_{AB}, \gamma_{ABC}$ のように複数の添え字を書いた場合は反対称な積で

$$\gamma_{AB} = \gamma_{[A}\gamma_{B]} \ , \ \gamma_{ABC} = \gamma_{[A}\gamma_B\gamma_{C]} \ , \tag{232}$$

などと与える．添え字の上げ下げは η_{AB} をによって与える．

$$\gamma_A = \eta_{AB}\gamma^B \ . \tag{233}$$

以上がを用いて Clifford バンドル $Cl(T\mathbb{M})$ は γ_A の積の集合によって与えられる．

$$Cl(T\mathbb{M}) = \{V^{A_1\cdots A_n}\gamma_{A_1\cdots A_n}|V^{A_1\cdots A_n} \in C^\infty(\mathbb{M}), n \geq 0\} \ , \tag{234}$$

また，Clifford バンドルの基本表現空間をスピノル空間 $\mathbb{S}$ と書く．

Dirac 生成演算子の構成　ここでは，計量亜代数の生成子として定義される Dirac 生成演算子 $\not{D} : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ を構成する．そのためにまず，Clifford バンドル $Cl(T\mathbb{M})$ 上に計量亜代数の括弧 $[\cdot,\cdot]$ を定義する．線形写像 $\gamma : E_A \mapsto \gamma_A$ を用いて，任意の $V, W \in T\mathbb{M}$ で

$$[\gamma(V), \gamma(W)] = \gamma([V, W]) \ , \tag{235}$$

によって定義する．以下の計算では，記法の簡略化のために線形写像 γ を省略し，E_A と γ_A を同一視する．即ち，$T\mathbb{M} \subset Cl(T\mathbb{M})$ であって，括弧も $V, W \in T\mathbb{M} \subset Cl(T\mathbb{M})$ に対して単に

$$[\gamma(V), \gamma(W)] \to [V, W] \ , \tag{236}$$

と書くことにする．

以上を用いて，スピノル空間に作用する次数 odd の微分演算子である Dirac 生成演算子 $\not{D} : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ を定義する．

Dirac 生成演算子の定義

Dirac 生成演算子 $\not{D}$ は任意の $V, W \in T\mathbb{M} \subset Cl(T\mathbb{M})$, $g_1 \in C^\infty(\mathbb{M}) \subset Cl(T\mathbb{M})$ に対して

$$\begin{aligned} \partial f &= 2\{\not{D}, f\} \ , && (237) \\ [V, W] &= \{\{\not{D}, V\}, W\} \ , && (238) \\ \rho(V)(f) &= \{\{\not{D}, V\}, f\} \ . && (239) \end{aligned}$$

を満たす．また，この Dirac 生成演算子を用いて自然にスピノル $\psi \in \mathbb{S}$ の計量亜代数による変換が定義される．

$$\mathcal{L}_V\psi = \{\not{D}, V\}\psi \ . \tag{240}$$

この変換は Leibniz 則を満たす．

$$\mathcal{L}_V W\psi = [V, W]\psi + W\mathcal{L}_V\psi \ . \tag{241}$$

逆に Dirac 生成演算子で生成された代数は計量亜代数の公理 (225)(226) を自動的に満たすことを確かめることができる．実際，任意の $V, W, Z \in T\mathbb{M}$ について

$$\begin{aligned} \rho(V)(\langle W, Z\rangle) &= \{\{\not{D}, V\}, \{W, Z\}\} \\ &= \{\{\{\not{D}, V\}, W\}, Z\} + \{W, \{\{\not{D}, V\}, Z\}\} \\ &= \langle [V, W], Z\rangle + \langle W, [V, Z]\rangle \ , && (242) \\ \partial\langle V, V\rangle &= \{\not{D}, \{V, V\}\} \\ &= 2\{\{\not{D}, V\}, V\} \\ &= 2[V, V] \ , && (243) \end{aligned}$$

となって公理を全て満たすことが確かめられる．

また，スピノルに対する計量亜代数の作用 (240) が Leibniz 則を満たすことも顕わに確認しておく．任意のベクトル V, W とスピノル ψ に対して

$$\mathcal{L}_V(W\psi) = \{\not{\mathcal{D}}, V\}W\psi = \{\{\not{\mathcal{D}}, V\}W\}\psi + W\{\not{\mathcal{D}}, V\}\psi = (\mathcal{L}_V W)\psi + W\mathcal{L}_V\psi \ , \tag{244}$$

が従う．ここで (238) を用いた．故に，Leibniz 則 (241) は成り立つ．

この Dirac 演算子の具体形を求める．まず，(237) を考える．この式は関数との交換関係を与えるから，$\mathbb{S}$ 上の線形写像部分以外は決定して

$$\not{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\gamma^A\partial_A + (\text{線形写像}) \tag{245}$$

の形で与えられる．ここで $\partial_A : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ は微分演算子で

$$\begin{aligned} \{\partial_A, f\} &= \rho(E_A)(f) \ , & (246)\\ \{\partial_A, \gamma_B\} &= 0 \ , & (247)\\ \partial_A |0\rangle &= 0 \ , & (248) \end{aligned}$$

定義される．ただし，$|0\rangle$ はスピノル空間の真空で (866) により定義される．さらに，この微分演算子部分から (239) が自動的に満たされる．

最後に，線形写像部分を決定する．そのために，基底に対する計量亜代数の構造関数 ${F_{AB}}^C$ を与える．

$$[E_A, E_B] = {F_{AB}}^C E_C \ . \tag{249}$$

F_{ABC} は η_{AB} が定数であることを用いて，完全反対称であることが示せる．

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(E_A)(\langle E_B, E_C\rangle)\\ &= \langle [E_A, E_B], E_C\rangle + \langle E_B, [E_A, E_C]\rangle\\ &= F_{ABC} + F_{ACB} \ , & (250)\\ 0 &= \partial\langle E_A, E_B\rangle\\ &= [E_A, E_B] + [E_B, E_A]\\ &= (F_{ABC} + F_{BAC})E^C \ . & (251) \end{aligned}$$

この完全反対称性を用いて $\not{\mathcal{D}}$ の線形写像部分を決定できる．基底に対して (238) を満たすように

$$\{\{\not{\mathcal{D}}, \gamma_A\}, \gamma_B\} = {F_{AB}}^C\gamma_C \ , \tag{252}$$

を要請すれば，γ_A の 3 次以上の項が決定して結局 Dirac 生成演算子 $\not{\mathcal{D}}$ は次のように導出される．

ディラック生成演算子の具体形

$$\not{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\gamma^A\partial_A - \frac{1}{24}F_{ABC}\gamma^{ABC} - \frac{1}{4}F_A\gamma^A \ , \tag{253}$$

ここで F_A は Dirac 生成演算子への全ての要請 (237)(238)(239) からは決定しない関数である．

5.3 スピノル空間 $\mathbb{S}$ 上の共変微分と Dirac 生成演算子

スピノル空間上の演算子として Dirac 生成演算子 $\not{\mathcal{D}}$(253) を導入した．ここではさらにスピノル空間 $\mathbb{S}$ 上の共変微分を導入して Dirac 生成演算子との関係を与える．

ベクトル空間上 $T\mathbb{M}$ の共変微分 $\nabla_A^{T\mathbb{M}}$ をスピン接続 $W_{AB}{}^C$ を用いて

$$\begin{aligned}
\nabla_A^{T\mathbb{M}}(fV) &= \rho(E_A)(f)V + f\nabla_A V \ , \\
\nabla_A^{T\mathbb{M}} E_B &= W_{AB}{}^C E_C \ ,
\end{aligned} \tag{254}$$

により定義する．このスピン接続を用いてスピノル空間上の共変微分 $\nabla_A^{\mathbb{S}}$ を次で定義する．

スピノル空間上の共変微分

スピノル空間上の共変微分は

$$\nabla_A^{\mathbb{S}} = \partial_A - \frac{1}{4} W_{ABC}\gamma^{BC} \ , \tag{255}$$

により与えられる．この共変微分は Clifford バンドルに整合するように定義しており

$$\{\nabla_A^{\mathbb{S}}, \gamma_B\} = W_{AB}{}^C \gamma_C \ , \tag{256}$$

を満たす．

この共変微分を用いて Dirac 生成演算子を書けば，

$$\begin{aligned}
\not{\mathcal{D}} &= \frac{1}{2}\gamma^A\nabla_A^{\mathbb{S}} + \frac{1}{24}(3W_{[ABC]} - F_{ABC})\gamma^{ABC} - \frac{1}{4}(F_A - W^B{}_{BA})\gamma^A \\
&= \frac{1}{2}\gamma^A\nabla_A^{\mathbb{S}} + \frac{1}{24}T_{ABC}\gamma^{ABC} - \frac{1}{4}(F_A - W^B{}_{BA})\gamma^A \ ,
\end{aligned} \tag{257}$$

を得る．ここで T_{ABC} は一般化捩率 (generalized torsion) と呼ばれるテンソルで

$$\begin{aligned}
T(V,W,Z) &= \langle \nabla_V W - \nabla_W V - [V,W], Z\rangle - \langle \nabla_Z V, W\rangle \\
&= V^A W^B Z^C T_{ABC} \\
&= V^A W^B Z^C (3W_{[ABC]} - F_{ABC}) \ ,
\end{aligned} \tag{258}$$

によって定義される．T_{ABC} がテンソルであることから基底に依らずに $T_{ABC} = 0$ に取ることができる．故に，以下では接続を

$$W_{[ABC]} = \frac{1}{3}F_{ABC} \ , \tag{259}$$

を満たすように選ぶ．また，F_A は任意関数であったから

$$F_A = W^B{}_{BA} \ , \tag{260}$$

と取ることにする．その結果，Dirac 生成演算子はスピノル空間上の共変微分を用いて以下のように非常に単純な形で与えることができる．

Dirac 生成演算子とスピノル空間上の共変微分の関係

一般化捩率が 0 になるようなスピン接続を選ぶことによって Dirac 生成演算子はスピノル空間上の共変微分を用いて

$$\not{\mathcal{D}} = \frac{1}{2}\gamma^A\nabla_A^{\mathbb{S}} \ , \tag{261}$$

と書くことができる．

5.4　一般化 Lichnerowicz 公式と pre-Bianchi 恒等式

本節では，ここまでで与えた演算子を用いて Dirac 生成演算子の自由度 F_A を決定するための共変な条件式を構築する．この条件式は通常の幾何学においてスカラー曲率を導出するために用いられる Lichnerowics 公式と同様の方法で構成することができるため一般化 Lichnerowics 公式と呼ぶ．本節で議論は以下の手順で進行する．

一般化 Lichnerowics 公式を用いた F_A の決定

- $\not{\mathcal{D}}^2$ を用いてスカラーを定義する方法を議論する．
  - 超重力理論における作用が Dirac 生成演算子の 2 乗から作られることから類推して，$\not{\mathcal{D}}^2$ からスカラーを作る方法を議論する．
  - Lie 代数から作られる 2 つ目の共変微分 $\nabla^{\phi'}$ を定義し，ラプラシアン $\Delta^{\phi'}$ を構成する．
  - 2 階微分を除去するために $4\not{\mathcal{D}}^2 - \Delta^{\phi'}$ を考える．
  - $4\not{\mathcal{D}}^2 - \Delta^{\phi'}$ は直接スカラーにはならない．そこで，$4\not{\mathcal{D}}^2 - \Delta^{\phi'} \in C^\infty(\mathbb{M})$ を条件式としておく．この式を一般化 Lichnerowics 公式と呼ぶ．
- 一般化 Lichnerowics 公式による F_A の決定．
  - 一般化 Lichnerowics 公式の結果，F_A はスカラー自由度 d のみを持つ．d は 5.5 節の議論で一般化ディラトンと同定することが可能であることが示される．
  - 一般化 Lichnerowics 公式が η_{MN}:定数の場合に pre-Bianchi 恒等式 [44] と呼ばれる恒等式に一致することを明らかにする．

$\not{\mathcal{D}}^2$ を用いてスカラーを構成するための条件　超重力理論においては，既に Dirac 生成演算子を用いて作用を定式化しようという試みが成功している [45]．その際，作用は超重力理論上で定義される Dirac 生成演算子 $\not{\mathcal{D}}_{gg}$ の 2 乗から計算される．

$$
\text{超重力理論の作用} : \not{\mathcal{D}}_{gg}^2 \ . \tag{262}
$$

そこで二重場理論においても Dirac 生成演算子の 2 乗が何らかの意味ある量になることが期待される．

しかし，二重場理論の場合は単純に $\not{\mathcal{D}}^2$ を計算してもスカラーを得ることはできない．

$$
\begin{aligned}
4\not{\mathcal{D}}^2 &= \left(\gamma^A \partial_A - \frac{1}{12} F_{ABC}\gamma^{ABC} - \frac{1}{2}F_A\gamma^A\right)^2 \\
&= \partial_A\partial^A - \frac{1}{24}F_{ABC}F^{ABC} - \frac{1}{2}\rho(E^A)(F_A) + \frac{1}{4}F_AF^A - F^A\partial_A \\
&\quad -\left(\frac{1}{4}\rho(E^A)(F_{ABC}) + \frac{1}{2}(\rho(E_{[B})(F_{C]}) - F^AF_{ABC})\right)\gamma^{BC} \\
&\quad -\frac{1}{2}\gamma^{BC}{\phi'_{BC}}^A\partial_A \\
&\quad -\frac{1}{12}\left(\rho(E_B)(F_{CB'C'}) - \frac{3}{4}F_{ABC}{F^A}_{B'C'}\right)\gamma^{BCB'C'}.
\end{aligned} \tag{263}
$$

ここで ϕ'_{ABC} は F_{ABC} と $T\mathbb{M}$ 上に自然に定義される通常の Lie 微分 $[E_A, E_B]_L = F'_{AB}{}^C E_C$ を用いて

$$\phi'_{ABC} = F_{ABC} - F'_{ABC} \ , \tag{264}$$

と定義される．スカラーを得るために最も注目すべき点は $\not{\mathcal{D}}^2$ が 2 階微分 $\partial_A \partial^A$ を含むことである．故に，$\not{\mathcal{D}}$ とは異なる方法で 2 階微分の演算子を作り，$\not{\mathcal{D}}^2$ から引き去ればよい．

新たな微分演算子は ϕ'_{ABC} を用いて構成できる．そのために基底変換に対する ϕ'_{ABC} の変換性を調べる．ϕ'_{ABC} の基底との関係は

$$\phi'_{BCA} = \langle [E_B, E_C] - [E_B, E_C]_L, E_A \rangle \ , \tag{265}$$

によって与えられる．任意関数 $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{M})$ によって $(E_A, E_B, E_C) \mapsto (fE_A, gE_B, hE_C)$ と変換すれば ϕ'_{ABC} は

$$\phi'_{ABC} \mapsto fgh\phi'_{ABC} + fh\rho(E_A)(g)\eta_{BC} \ , \tag{266}$$

によって与えられる．一方でスピン接続 W_{ABC} は

$$W_{ABC} = \langle \nabla_A E_B, E_C \rangle \ , \tag{267}$$

で与えられるから，$(E_A, E_B, E_C) \mapsto (fE_A, gE_B, hE_C)$ の変換によってスピン接続は

$$W_{ABC} \mapsto fghW_{ABC} + fh\rho(E_A)(g)\eta_{BC} \ , \tag{268}$$

と変換される．2 つの変換性を比べれば，ϕ'_{BCA}, W_{ABC} の変換性は同じである．この性質を用いて $\mathbb{S}$ 上の共変微分として新たに

$$\nabla^{\phi'}_A = \partial_A - \frac{1}{4}\phi'_{BCA}\gamma^{BC} \ , \tag{269}$$

を定義することができる．そこで 2 階微分を作るためにスピノル空間 $\mathbb{S}$ 上のラプラシアンを次で定義する．

$$\Delta^{\phi'} = div^U_{\nabla^{\phi'}} \nabla^{\phi'} = \eta^{AB}\nabla^{\phi'}_A \nabla^{\phi'}_B - (\phi'_B{}^{AB} + U^A)\nabla^{\phi'}_A \ . \tag{270}$$

この式が div は一般化された発散であり，$U = U^A E_A$ は発散の自由度である任意の接ベクトルである．$\mathbb{S}$ 上の発散の定義の方法は A で説明を行っている．

さて，これによって $\mathbb{S}$ 上に 2 つの 2 階微分 $\not{\mathcal{D}}^2, \Delta^{\phi'}$ が導入された．この 2 つの演算子の差を考える．

$$\begin{aligned}
&4\not{\mathcal{D}}^2 - \Delta^{\phi'} \\
&= -\frac{1}{24}F_{ABC}F^{ABC} - \frac{1}{2}\rho(E^A)(F_A) + \frac{1}{4}F_A F^A + \frac{1}{8}\phi'_{BCA}\phi'^{BCA} + (-F^A + \phi'_E{}^{AE} + U^A)\partial_A \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(-\rho(E_D)(F_{BC}{}^D - \phi'_{BC}{}^D) + 2\rho(E_{[B})(\phi'_{C]D}{}^D) + (F_{BC}{}^D - \phi'_{BC}{}^D)\phi'_{ED}{}^E \\
&\quad + 2(\rho(E_{[B})(-F_{C]} + \phi'^D{}_{C]D}) - (-F^A + \phi'_D{}^{AD})F_{ABC} - U_A\phi'_{BC}{}^A\Big)\gamma^{BC} \\
&\quad - \frac{1}{48}\Big(4\rho(E_{[A})(F_{BCD]}) - 3F_{[AB}{}^E F_{CD]E} + 3\phi'_{[AB}{}^E\phi'_{CD]E}\Big)\gamma^{ABCD}
\end{aligned} \tag{271}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{24}F_{ABC}F^{ABC} - \frac{1}{2}\rho(E^A)(F_A) + \frac{1}{4}F_A F^A + \frac{1}{8}\phi'_{BCA}\phi'^{BCA} + (-F^A + \phi'_E{}^{AE} + U^A)\partial_A \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(2(\rho(E_{[B})(-F_{C]} + \phi'^D{}_{C]D}) - (-F^A + \phi'_D{}^{AD})F_{ABC} - U_A\phi'_{BC}{}^A\Big)\gamma^{BC} \ .
\end{aligned} \tag{272}$$

スピノル空間上の Dirac 演算子の 2 乗からラプラシアンを引き去る演算は Lichnerowicz 公式と呼ばれる [46]．Lichnerowicz 公式は通常の幾何学においてスカラー曲率を導出するために用いられ，Lichnerowicz 公式はスカラー曲率そのものになる．そこで，二重場理論において $4\not{D}^2 - \Delta^{\phi'}$ がスカラーになる要請を一般化 Lichnerowicz 公式と呼ぶ．

一般化 Lichnerowics 公式

一般化 Lichnerowics 公式は次で定義される $\not{D}^2, \Delta^{\phi'}$ に対する条件式である．

$$4\not{D}^2 - \Delta^{\phi'} \in C^\infty(\mathbb{M}) \ . \tag{273}$$

一般化 Lichnerowics 公式による F_A の決定　ここでは一般化 Lichnerowicz 公式が具体的にどのような条件を与えるかを示す．この条件を解くと F_A がスカラー自由度 d で決定することが明らかになる．

一般化 Lichnerowics 公式が具体的にどのような条件を課すかを調べる．まず，1 階微分かつ γ_A の 0 次の項がゼロになるためには

$$F_A = \phi'_{BA}{}^{B} + U_A \ , \tag{274}$$

が必要である．この式を (272) に代入する．

$$\begin{aligned}
&4\not{D}^2 - \Delta^{\phi'} \\
&= -\frac{1}{24}F_{ABC}F^{ABC} - \frac{1}{2}\rho(E^A)(F_A) + \frac{1}{4}F_AF^A + \frac{1}{8}\phi'_{BCA}\phi'^{BCA} \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(2(-\rho(E_{[B})(U_{C]}) + (U^A)F_{ABC} - U_A\phi'_{BC}{}^{A}\Big)\gamma^{BC} \\
&= -\frac{1}{24}F_{ABC}F^{ABC} - \frac{1}{2}\rho(E^A)(F_A) + \frac{1}{4}F_AF^A + \frac{1}{8}\phi'_{BCA}\phi'^{BCA} \\
&\quad - \frac{1}{2}E_B{}^{M}E_C{}^{N}(\partial_{[M}U_{N]})\gamma^{BC} \ .
\end{aligned} \tag{275}$$

ここで U_N は U_A を座標基底で書いたもので

$$U_A = E_A{}^{N}U_N \ , \tag{276}$$

で表される．(275) がスカラーになるためにはさらに

$$\partial_{[M}U_{N]} = 0 \ , \tag{277}$$

が必要である．故に，局所的には任意関数 d を用いて U_N を解くことができて

$$U_N = 2\partial_N d \ , \tag{278}$$

と解くことができる．結局 U_A は

$$U_A = 2\rho(E_A)(d) \ , \tag{279}$$

と得られる．ここで U_A の自由度に d の文字を使ったのは 5.5 節の議論でこの d が一般化ディラトンと解釈できるためである．ただし，この時点では，d は単に任意関数であることを強調しておく．

以上より，(274)(279) を用いれば F_A が決定される．

一般化 Lichnerowics 公式を満たす F_A

一般化 Lichnerowics 公式を要請すると Dirac 生成演算子の自由度 F_A が決定する．

$$F_A = \phi'_{BA}{}^{B} + 2\rho(E_A)(d)\ . \tag{280}$$

ここで d は単なる任意関数であることに注意．

一方で，Lichnerowicz 公式の計算の途中式 (271) において (274) を用いると $F_{ABC}, F_A, \phi'_{ABC}$ に対する条件式として Lichnerowicz 公式を見直すことができる．

$$\begin{aligned}
&4\not{\mathcal{D}}^2 - \Delta^{\phi'} \\
=& -\frac{1}{24}F_{ABC}F^{ABC} - \frac{1}{2}\rho(E^A)(F_A) + \frac{1}{4}F_AF^A + \frac{1}{8}\phi'_{BCA}\phi'^{BCA} \\
&-\frac{1}{4}\Big(2\rho(E_{[B})(F_{C]}) + \rho(E_A)(F_{BC}{}^{A}) - F_AF_{BC}{}^{A} + \rho(E_A)(\phi'_{BC}{}^{A}) - F_A\phi'_{BC}{}^{A}\Big)\gamma^{BC} \\
&-\frac{1}{48}\Big(4\rho(E_{[A})(F_{BCD]}) - 3F_{[AB}{}^{E}F_{CD]E} + 3\phi'_{[AB}{}^{E}\phi'_{CD]E}\Big)\gamma^{ABCD}\ ,
\end{aligned} \tag{281}$$

を得られる．即ち，$4\not{\mathcal{D}}^2 - \Delta^{\phi'} \in C^\infty(\mathbb{M})$ となるには

$$\mathcal{B}_{BC} := 2\rho(E_{[B})(F_{C]}) + \rho(E_A)(F_{BC}{}^{A}) - F_AF_{BC}{}^{A} + \rho(E_A)(\phi'_{BC}{}^{A}) - F_A\phi'_{BC}{}^{A} = 0\ , \tag{282}$$

$$\mathcal{B}_{ABCD} := 4\rho(E_{[A})(F_{BCD]}) - 3F_{[AB}{}^{E}F_{CD]E} + 3\phi'_{[AB}{}^{E}\phi'_{CD]E} = 0\ . \tag{283}$$

が必要である．式 (283) は，

$$\phi'_{BCA} = \Omega_{ABC}, \tag{284}$$

(174) と置いた場合に pre-Bianchi 恒等式と呼ばれるものと一致する [44]．$\phi'_{BCA} = F_{BCA} - F'_{BCA} = \Omega_{ABC}$ は基底における計量亜代数が消えていること

$$[\partial_L, \partial_M] = 0\ , \tag{285}$$

を意味する．これは本節で計算に用いた任意の計量亜代数を，D 括弧 (30) に選んだことを意味する．実際，D 括弧の定義の下で座標基底同士の括弧を計算すれば 0 になる．これは pre-Bianchi 恒等式の導出の際に D 括弧を用いていたことと整合する．

故に，一般化 Lichnerowicz 公式は pre-Bianchi 恒等式を一般化したものであると解釈できる．また，pre-Bianchi 恒等式の議論では F_A を含む恒等式 (282) が得られなかったが，ここでは一般化 Lichnerowicz 公式として統一的に扱うことができるようになった．

5.5 スピノルの真空と一般化ディラトン

本節では，5.4 節で F_A の自由度として残った任意関数 d が一般化ディラトンと解釈できることを示す．

本節の流れは次のとおりである．

F_A のスカラー自由度が一般化ディラトンと解釈できることを示す流れ

- スピノル上の内積が持つ測度の決定
  - スピノル空間上に $O(D,D)$ 変換で不変な内積 (A-内積)$(\cdot,\cdot)_A$ を定義する．
  - この内積において Dirac 生成演算子が半エルミート的であることを要請する．即ち，任意のスピノル ψ_1, ψ_2 に対して

$$(\not{\mathcal{D}}\psi_1, \psi_2)_A = (\psi_1, -\not{\mathcal{D}}\psi_2)_A \ , \tag{286}$$

    を要請する．
  - Dirac 生成演算子 $\not{\mathcal{D}}$ は微分演算子であるため，要請 (286) は部分積分の規則を定めた式であるとみなせる．このことから A-内積の測度の構造が決定し，スカラー d が測度にどのように含まれているかが求められる．
- スカラー d のゲージ変換性の決定
  - 上で得られた真空の内積とディラトンの関係式全体をゲージ変換する．ここでスピノルのゲージ変換はスピノルに対する計量亜代数の作用 (240) で決定する．

$$\delta_V\psi = \mathcal{L}_V\psi = \{\not{\mathcal{D}}, V\}\psi \ . \tag{287}$$

  - 両辺比較することによってスカラー d のゲージ変換 $\delta_V d$ を得る．
  - 最後にスカラー d のゲージ変換が一般化ディラトンと同じであることと F_A へのスカラー d の寄与が一般化ディラトンと同じであるから，スカラー d が一般化ディラトンと同定できることを述べる．

スピノル上の内積が持つ測度の決定　ここではスピノルの真空の内積と F_A のスカラー自由度 d の関係を明らかにする．A-内積として (853) で定義しているように任意のスピノル ψ_1, ψ_2 に対して $O(D,D)$ 不変な A-内積を定義する．

$$(\psi_1, \psi_2)_A = \psi_1^\dagger \hat{A}_+ \psi_2 \ . \tag{288}$$

この内積を A-内積と呼ぶこととする．(854) で議論している通りこの A-内積は $O(D,D)$ 不変である．

A-内積において，任意のスピノル ψ_1, ψ_2 と $\not{\mathcal{D}}$ が次の関係を満たすことを要請する．

$$(\not{\mathcal{D}}\psi_1, \psi_2)_A = (\psi_1, -\not{\mathcal{D}}\psi_2)_A \ . \tag{289}$$

以下では，この関係を用いて積分測度を決定する．任意関数 g_1, g_2 と (842) で定義される $\hat{K}$ について

$$(\{\not{\mathcal{D}}, \Gamma_A\}g_1 |0\rangle, g_2\hat{K}|0\rangle)_A = (g_1|0\rangle, -\{\not{\mathcal{D}}, \Gamma_A\}g_2\hat{K}|0\rangle)_A \ , \tag{290}$$

が従う．これより

$$((\partial_A - \frac{1}{2}F_A)g_1|0\rangle, g_2\hat{K}|0\rangle)_A = (g_1|0\rangle, -(\partial_A - \frac{1}{2}F_A)g_2\hat{K}|0\rangle)_A \ , \tag{291}$$

を得る．基底に対して測度を

$$(|0\rangle\,,\hat{K}\,|0\rangle)_A=\int dxf\ , \tag{292}$$

と置けば (291) は

$$\int dxf((\partial_A-\frac{1}{2}F_A)g_1)g_2=-\int dxfg_1(\partial_A-\frac{1}{2}F_A)g_2\ , \tag{293}$$

と書ける．即ち

$$\int dxf(\partial_A g_1)g_2=-\int dxfg_1(\partial_A-F_A)g_2\ , \tag{294}$$

を満たすように f を決定すればよい．部分積分でこれを満たすためには

$$\partial_N(fE_A{}^N)=-fF_A\ , \tag{295}$$

が必要である．この計算を進めるために座標基底における計量亜代数の構造係数 $F_{LM}{}^N$ を用いる．

$$[\partial_L,\partial_M]=F_{LM}{}^N\partial_N\ . \tag{296}$$

この構造係数 $F_{LM}{}^N$ を用いて F_A を書く．

$$\begin{aligned}\phi'_{ABC} &= (\partial_C E_A{}^L)E_B{}^M\eta_{LM}+E_A{}^L E_B{}^M F_{LM}{}^{N'}E_C{}^N\eta_{N'N}\ ,\\ F_A &= -E_A{}^M\eta^{LN}(\partial_N\eta_{LM})-\partial_M E_A{}^M+E_A{}^M F_{LM}{}^L+2\rho(E_A)(d)\ .\end{aligned} \tag{297}$$

これを (295) に代入すれば

$$\partial_M f=f\eta^{LN}\partial_N\eta_{LM}-fF_{LM}{}^L-2f\partial_M d\ , \tag{298}$$

を得る．さらに

$$f=e^{-2d}\ , \tag{299}$$

と置き直せば，h に対する条件式

$$h^{-1}\partial_N h=\partial^M\eta_{MN}-\tilde{F}_{MN}{}^M\ , \tag{300}$$

を得る．この h を導出する．

$$\begin{aligned}h^{-1}\partial_N h &= \partial^M\eta_{MN}-\tilde{F}_{MN}{}^M\\ &= \partial^M\eta_{MN}-\langle[\partial_M,\partial_N],\partial_L\rangle\,\eta^{ML}\\ &= \partial^M\eta_{MN}-\Big((\partial_M\eta_{NL})-\langle\partial_N,[\partial_M,\partial_L]\rangle\Big)\eta^{ML}\\ &= \tilde{F}_{MLN}\eta^{ML}\\ &= \frac{1}{2}(\tilde{F}_{MLN}+\tilde{F}_{LMN})\eta^{ML}\\ &= \frac{1}{2}(\partial_N\langle\varepsilon_M,\varepsilon_L\rangle)\eta^{ML}\\ &= \frac{1}{2}(\partial_N\eta_{ML})\eta^{ML}\ .\end{aligned} \tag{301}$$

よって，定数 c_0 を用いて h は η_{MN} の行列式の微分から求めることができる．

$$h=c_0\sqrt{\det\eta_{MN}}\ . \tag{302}$$

したがって，f は実定数 c_0 を用いて

$$f = c_0\sqrt{\det\eta}e^{-2d} \ , \tag{303}$$

と求められた．以上より，真空の内積が決定した．

スピノルの真空の内積

スピノルの真空 $|0\rangle$ と真空の双対基底 $\hat{K}\,|0\rangle$ の A-内積が持つ測度は

$$(|0\rangle\,,\hat{K}\,|0\rangle)_A = c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d} \ , \tag{304}$$

で与えられる．特に，任意関数 g_1 について

$$(|0\rangle\,,g_1\hat{K}\,|0\rangle)_A = c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}g_1 \ , \tag{305}$$

が成立する．

スカラー d のゲージ変換性の決定　次に，任意関数 d のゲージ変換を与えるためにスピノルのゲージ変換を考える．スピノルのゲージ変換 δ_V はスピノルに対する計量亜代数の作用 (240) により与える．

$$\delta_V\psi = \mathcal{L}_V\psi = \{\not{D}, V\}\psi \ . \tag{306}$$

特に真空 $|0\rangle$ とその双対基底 $\hat{K}\,|0\rangle$ のゲージ変換は

$$\delta_V\,|0\rangle = \{\not{D}, V\}\,|0\rangle \ , \ \delta_V\hat{K}\,|0\rangle = \{\not{D}, V\}\hat{K}\,|0\rangle \tag{307}$$

により定義される．このゲージ変換を用いて (305) の両辺をゲージ変換する．左辺のゲージ変換は

$$\begin{aligned}\delta_V(|0\rangle\,,g_1\hat{K}\,|0\rangle)_A &= (\delta_V\,|0\rangle\,,g_1\hat{K}\,|0\rangle)_A + (|0\rangle\,,g_1\delta_V\hat{K}\,|0\rangle)_A \\ &= c_0\int dx\sqrt{\det\eta}e^{-2d}g_1(-2V^A\partial_A d + \partial_A V^A - \phi'^B{}_{AB}V^A) \ ,\end{aligned} \tag{308}$$

で与えられる．一方で，右辺のゲージ変換を考えれば，d のみが変換を受ける．

$$\delta_V c_0\int dx\sqrt{\det\eta}e^{-2d}g_1 = c_0\int dx\sqrt{\det\eta}e^{-2d}g_1(-2\delta_V d) \ . \tag{309}$$

故に両辺を比較すればスカラー d のゲージ変換が得られる．

F_A のスカラー自由度 d のゲージ変換

F_A のスカラー自由度 d のゲージ変換は次で与えられる．

$$\begin{aligned}\delta_V d &= V^A\partial_A d - \frac{1}{2}\partial_A V^A + \frac{1}{2}\phi'^B{}_{AB}V^A \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_A - F_A)V^A \ ,\end{aligned} \tag{310}$$

基底方向へのゲージ変換は特に

$$\delta_{E_A}e^{-2d} = -F_A e^{-2d} \ , \tag{311}$$

であり，この式は標準的な二重場理論における F_A の定義 (180) と同じ形をしている．

最後に，標準的な二重場理論の場合にこのゲージ変換が一般化ディラトンのゲージ変換と同じになることを見る．(284) で説明したように標準的な二重場理論の式を得るには $\phi'_{BCA} = \Omega_{ABC}$ と置けばよい．また，標準的な二重場理論においては η_{MN} が定数であることに注意すれば

$$\delta_V d = \rho(V)(d) - \frac{1}{2}\partial_N V^N \ , \tag{312}$$

を得る．故に標準的な二重場理論において，e^{-2d} の変換を考えれば

$$\delta_V e^{-2d} = V^N \partial_N e^{-2d} + \partial_N V^N e^{-2d} \ , \tag{313}$$

を得る．この変換性は (163) で定義されている一般化 Lie 微分のウェイト 1 のスカラーの変換と同じである．即ち，一般化ディラトンの変換性と同じである．

以上の議論から，Lichnerowicz 公式の解の自由度として導入した任意関数 d は

- ゲージ変換性 (310)
- F_A との関係 (311)

が定義され，どちらも標準的な二重場理論における一般化ディラトンの式 (180) (163) と整合的である．故に，単に任意関数として導入した d は一般化ディラトンと同一視することが可能である．

ここで，重要なことは一般化ディラトンに対してウェイトを与える必要がないことである．従来の方法ではディラトンの変換性をウェイトを導入することで手で導入していたが，本節のスピノルを使った方法では

$$(\not{\mathcal{D}}\psi_1, \psi_2)_A = (\psi_1, -\not{\mathcal{D}}\psi_2)_A \ , \tag{314}$$

を課しただけで A-内積の測度とゲージ変換が決定しており，人為的な仮定が明らかに少ない．また，この手法では η_{MN} が定数か関数かを問わずに定義されるため，η_{MN} が関数である曲がった空間上の二重場理論を与える際にも適用可能である．

5.6 射影された Lichnerowicz 公式と DFT 作用

5.4 節において導入した一般化 Lichnerowicz 公式 (272) の構成において一般化計量 H_{AB} を用いていないことは注目すべき点である．そのため，一般化計量の変換に対して一般化 Lichnerowicz 公式は不変である．即ち，$O(D,D)$ 計量 η_{AB} を不変に保つ $O(D,D)$ 変換全体で一般化 Lichnerowicz 公式は不変である．この不変性は作用に課すべき $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変性 (5.1 節) に比べて広く，本来含まれるべき一般化計量の物理的な自由度が落ちてしまっている．故に，一般化 Lichnerowicz 公式 (272) が直接作用になることはない．

本節では一般化計量 H_{AB} の構造を射影演算子を用いて導入し，新たに射影された Lichnerowicz 公式 (projected Lichnerowicz formula) を構成する．この射影された Lichnerowicz 公式によって二重場理論の作用を導出する．本節では，射影された Lichnerowicz 公式を用いた二重場理論の作用の導出を次の手順で行う．

射影された Lichnerowicz 公式の導出方法

- 射影を用いたスピノル空間の分解.
  - まず，一般化計量 H を用いて射影演算子 $P^{\pm}$ を定義する.
  - この射影演算子 $P^{\pm}$ を用いて $T\mathbb{M} = V^+ \oplus V^-$ と空間を分割する.
  - V^+ から Clifford バンドル $Cl(V^+)$ を構成し，$Cl(V^+)$ の表現空間としてスピノル空間 $\mathbb{S}^+$ を定義する.
- $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 共変な微分演算子の構成.
  - 共変微分 V^+, V^- 上でそれぞれ閉じることを要求する.
  - $\mathbb{S}$ 上の共変微分 $\nabla^{\mathbb{S}^+}, \nabla^{\phi'^+}$ を定義する.
  - Dirac 演算子 $\not{\mathcal{D}}^+$ を共変微分を用いて与える.
- 新しい二重場理論の構成.
  - $\mathbb{S}^+$ 上の演算子を用いて射影された Lichnerowicz 公式を与える.
  - 最後に射影された Lichnerowics 公式を用いて二重場理論の作用を構成する.

射影を用いたスピノル空間の分解　まず，射影演算子 ${P^{\pm}}_A{}^B$ を H_{AB} によって

$$P^{\pm A}{}_B = \frac{1}{2}(\delta^A{}_B \pm H^A{}_B) \ , \tag{315}$$

を定義する．この演算子は $H^A{}_B H^B{}_C = \delta^A{}_C$ を用いて，射影の性質

$$P^{+A}{}_B + P^{-A}{}_B = \delta^A{}_B \ , \ P^{\pm A}{}_B P^{\pm B}{}_C = P^{\pm A}{}_C \ , \ P^{\pm A}{}_B P^{\mp B}{}_C = 0 \ , \tag{316}$$

を満たすことが確かめられる.

この射影演算子を用いて接ベクトル空間 $T\mathbb{M}$ を 2 つの部分空間 V_+, V_- に分割する.

$$V^+ = \{V \in T\mathbb{M} | P^{+A}{}_B V^B = V^A\} \ , \tag{317}$$
$$V^- = \{V \in T\mathbb{M} | P^{-A}{}_B V^B = V^A\} \ , \tag{318}$$
$$T\mathbb{M} = V^+ \oplus V^- \ . \tag{319}$$

V^+, V^- の基底をそれぞれ $\overset{+}{E}{}^a, \overset{-}{E}_a$ で定義する.

$$\begin{pmatrix} \overset{+}{E}{}^a \\ \overset{-}{E}_a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \delta^a{}_b & s^{ab} \\ -s_{ab} & \delta_a{}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^a \\ E_a \end{pmatrix} \ . \tag{320}$$

$V^{\pm}$ の基底を $\hat{E}_A = (\overset{+}{E}{}^a, \overset{-}{E}_a)$ とまとめて $T\mathbb{M}$ の基底を作る.

$V^{\pm}$ の基底で展開された係数は以下のように係数の上に符号をつけて表現する．任意のベクトル W に対しては

$$W^A E_A = \hat{W}^A \hat{E}_A = \overset{+}{W}_a \overset{+}{E}{}^a + \overset{-}{W}{}^a \overset{-}{E}_a = \overset{+}{W}{}^a \overset{+}{E}_a + \overset{-}{W}_a \overset{-}{E}{}^a \ , \tag{321}$$

と表す．添え字の上げ下げは基底 $\hat{E}_A$ の $O(D,D)$ 計量

$$\hat{\eta}_{AB} = \begin{pmatrix} s^{ab} & 0 \\ 0 & -s_{ab} \end{pmatrix} , \tag{322}$$

を用いて $\hat{E}^A = \hat{\eta}^{AB}\hat{E}_A$ で行っている．具体的に成分で書けば $\overset{+}{E}_a, \overset{-}{E}^a$ は $\overset{++}{s}_{ab} = s_{ab}, \overset{--}{s}_{ab} = -s_{ab}$ を用いて

$$\overset{+}{E}_a = \overset{++}{s}_{ab}\overset{+}{E}^b \ , \ \overset{-}{E}^a = \overset{--}{s}^{ab}\overset{-}{E}_b \ , \tag{323}$$

と添え字の上げ下げが行われる．

V^+ を用いて Clifford バンドル $Cl(V^+)$ を与える．

$$\{\Gamma^+_a, \Gamma^+_b\} = 2\overset{++}{s}_{ab} \ . \tag{324}$$

Clifford バンドル $Cl(V^+)$ の基底は

$$Cl(V^+) \text{ の基底} = \{1, \Gamma^+_a, \Gamma^{++}_{a_1a_2}, \cdots, \Gamma^{++\cdots+}_{a_1a_2\cdots a_{10}}\} \tag{325}$$

で与えられる．この Clifford バンドル $CL(V^+)$ の表現空間としてスピノル空間 $\mathbb{S}^+$ を定義する．

$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 共変な微分演算子の構成　ここまでで，射影を用いてスピノル空間 $\mathbb{S}^+$ を定義した．ここではスピノル空間 $\mathbb{S}^+$ 上に $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 共変な微分演算子を定義する．

まず，$T\mathbb{M}$ 上の共変微分 (254) が V^+, V^- 上で閉じることを要請する．

共変微分が $V^\pm$ で閉じる要請

任意のベクトル $v_+ \in V^+, v_- \in V^-$ に対して

$$\nabla_A v_+ \in V^+ \ , \ \nabla_A v_- \in V^- \ , \tag{326}$$

を要請する．この要請によってスピン接続は

$$\overset{++-}{W}_{abc} = \overset{+-+}{W}_{abc} = \overset{-+-}{W}_{abc} = \overset{--+}{W}_{abc} = 0 \ , \tag{327}$$

となる．この条件は $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変であることに注意．

この下で F_{ABC} との関係 (260)(259) を考えれば

$$\begin{aligned} \overset{+++}{F}_{abc} &= 3\overset{+++}{W}_{[abc]} \\ \overset{---}{F}_{abc} &= 3\overset{---}{W}_{[abc]} \\ \overset{-++}{F}_{abc} &= \overset{-++}{W}_{abc} \\ \overset{+--}{F}_{abc} &= \overset{+--}{W}_{abc} \\ \overset{+}{F}_a &= \overset{+++}{W}{}^b{}_{ba} \\ \overset{-}{F}_a &= \overset{---}{W}{}^b{}_{ba} \ , \end{aligned} \tag{328}$$

を得る．

次に，$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 共変な微分演算子を定義するために $V^\pm$ の基底 $\hat{\Gamma}_A$ が $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換でどのように変換するかを調べる．$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換は $O(D,D)$ 計量と一般化計量を不変に保つ変換として特徴づけられる．そこでこの基底の上での $O(D,D)$ 計量 $\hat{\eta}_{AB}$ と一般化計量 $\hat{H}_{AB}$ を不変に保つ変換を調べればよい．$\hat{\eta}_{AB},\hat{H}_{AB}$ を顕わに書けば

$$\hat{\eta}_{AB}=\begin{pmatrix} s^{ab} & 0 \\ 0 & -s_{ab}\end{pmatrix}\ ,\ \hat{H}_{AB}=\begin{pmatrix} s^{ab} & 0 \\ 0 & s_{ab}\end{pmatrix}\ , \tag{329}$$

と成分表示される．よって，これらを不変に保つ変換は Γ^{+a} の $O(1,D-1)$ 変換と Γ^-_a の $O(D-1,1)$ 変換で与えられること分かる．即ち，$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換が $V^\pm$ 上の 2 つの変換に分離することを意味する．

$$O(1,D-1)\times O(D-1,1)\ \text{変換} = (V^+\text{の}\ O(1,D-1)\ \text{変換})\otimes(V^-\text{の}\ O(D-1,1)\ \text{変換})\ . \tag{330}$$

$\mathbb{S}^+$ 上で共変微分 $\nabla^{\mathbb{S}^+}_A$ を導入する．$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換ではスピン接続は $\overset{+++}{W}_{abc},\overset{-++}{W}_{abc}$ $,\overset{---}{W}_{abc},\overset{+--}{W}_{abc}$ の各々が別々に回転し，混ざらない．故に，$\mathbb{S}^+$ 上の共変微分として

$$\begin{aligned}
\nabla^{\mathbb{S}^+}_{E^+_a} &= \overset{+}{\partial}_a-\frac{1}{4}\overset{+++}{W}_{abc}\Gamma^{++bc}\ , \qquad (331)\\
\nabla^{\mathbb{S}^+}_{E^-_a} &= \overset{-}{\partial}_a-\frac{1}{4}\overset{-++}{W}_{abc}\Gamma^{++bc}\\
&= \overset{-}{\partial}_a-\frac{1}{4}\overset{-++}{F}_{abc}\Gamma^{++bc} \qquad (332)
\end{aligned}$$

を定義できる．ここで $\partial^+_a,\partial^-_a$ は (246)(247) と同様に Γ^+_a と可換な微分演算子である．

$$\begin{aligned}
\{\overset{+}{\partial}_a,f\} &= \rho(\overset{+}{E}_a)(f)\ ,\ \{\overset{-}{\partial}_a,f\}=\rho(\overset{-}{E}_a)(f)\ , \qquad (333)\\
\{\overset{+}{\partial}_a,\Gamma^+_b\} &= \{\overset{-}{\partial}_a,\Gamma^+_b\}=0\ . \qquad (334)
\end{aligned}$$

ϕ'_{ABC} を用いた共変微分 (269) についても同様に

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi'+}_{\overset{+}{E}_a} &= \overset{+}{\partial}_a-\frac{1}{4}\overset{+++}{\phi'}_{bca}\Gamma^{++bc}\ , \qquad (335)\\
\nabla^{\phi'+}_{\overset{-}{E}_a} &= \overset{-}{\partial}_a-\frac{1}{4}\overset{++-}{\phi'}_{bca}\Gamma^{++bc}\ , \qquad (336)
\end{aligned}$$

を定義できる．

次に，共変微分 (332) を用いて Dirac 演算子を定義する．

$$\begin{aligned}
\not{\mathcal{D}}^+ &= \frac{1}{2}\Gamma^{+a}\nabla^{\mathbb{S}^+}_{\overset{+}{E}_a}\\
&= \frac{1}{2}\Gamma^{+a}\overset{+}{\partial}_a-\frac{1}{24}\overset{+++}{F}_{abc}\Gamma^{+++abc}-\frac{1}{4}\overset{+}{F}_a\Gamma^{+a}\ . \qquad (337)
\end{aligned}$$

ここで，この演算子が計量亜代数の係数 F_{ABC},F_A のみで書けるのは (328) の関係があるからである．

ここで注意すべきことは，Dirac 演算子 $\not{\mathcal{D}}^+$ は $O(1,D-1)$ に共変ではあるが，計量亜代数を生成しないことである．そのため，$\not{\mathcal{D}}$ を Dirac“生成” 演算子と呼ぶのに対して，$\not{\mathcal{D}}^+$ は単に Dirac 演算子と呼ぶ．

新しい二重場理論の構成　一般化 Lichnerowicz 公式 (272) と同様に Dirac 演算子の 2 乗 $\not{D}^{+2}$ をもとに $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変なスカラーを与える．しかし，$\not{D}^2$ の計算 (263) で示したのと同様に $\not{D}^{+2}$ もそのままではスカラーにならない．

$$
\begin{aligned}
4\not{D}^{+2} \;=\;& \overset{+}{\partial}{}^a\overset{+}{\partial}_a - \overset{+}{F}{}^a\overset{+}{\partial}_a - \frac{1}{24}\overset{+++}{F}{}_{abc}\overset{+++}{F}{}^{abc} - \frac{1}{2}\rho(\overset{+}{E}_a)(\overset{+}{F}{}^{+a}) + \frac{1}{4}\overset{+}{F}_a\overset{+}{F}{}^a \\
&+\Gamma^{++ab}\Big(\overset{+}{\partial}_{[a}\overset{+}{\partial}_{b]} - \frac{1}{2}\overset{+++}{F}{}_{ab}{}^c\overset{+}{\partial}_c - \frac{1}{4}\rho(\overset{+}{E}_c)(\overset{+++}{F}{}_{ab}{}^c) + \frac{1}{4}\overset{+}{F}{}^c\overset{+++}{F}{}_{abc} - \frac{1}{2}\rho(\overset{+}{E}_{[a})(\overset{+}{F}_{b]})\Big) \\
&+\Gamma^{++++abcd}\Big(\frac{1}{16}\overset{+++}{F}{}_{e[ab}\overset{+++}{F}{}^e{}_{cd]} - \frac{1}{12}\rho(\overset{+}{E}_{[a})(\overset{+++}{F}{}_{bcd]})\Big)\ .
\end{aligned}
\tag{338}
$$

そこで，一般化 Lichnerowicz 公式 (272) を構成した際に用いた式 (282)(283) を使って Γ_a^+ のべきの係数が消えるように微分演算子を組み合わせる．この式は射影で構成されたスピノル空間 $\mathbb{S}^+$ 上で Lichnerowics 公式と同様の計算を行うことから射影された Lichnerowicz 公式 (projected Lichnerowicz formula) と呼ぶ．

射影された Lichnerowicz 公式

射影された Lichnerowicz 公式は次で与えられる．

$$
L^+ := 4\not{D}^{+2} + div_\nabla\nabla_-^{\mathbb{S}^+} - \Delta^{\phi'^+}
\tag{339}
$$

ここで div_∇ は $T\mathbb{M}\otimes\mathbb{S}^+$ に作用する発散である (813)．また，ラプラシアン $\Delta^{\phi'^+}$ も $\mathbb{S}^+$ 上で定義されている (818)．

作用の具体的な形を得るために，2，3 項目を計算する．

$$
\begin{aligned}
div_\nabla\nabla_-^{\mathbb{S}^+} \;=\;& div_\nabla(\overset{-}{E}{}^a\otimes\nabla^{\mathbb{S}^+}_{E_a^-}) \\
=\;& \overset{-}{\partial}_a\overset{-}{\partial}{}^a - \overset{-}{F}{}^a\overset{-}{\partial}_a - \frac{1}{8}\overset{-++}{F}{}_{abc}\overset{-++}{F}{}^{abc} \\
&+\Gamma^{++ab}\Big(-\frac{1}{2}\overset{++-}{F}{}_{ab}{}^c\overset{-}{\partial}_c + \frac{1}{4}\overset{-}{F}{}^c\overset{++-}{F}{}_{abc} - \frac{1}{4}\rho(\overset{-}{E}_c)(\overset{++-}{F}{}_{ab}{}^c)\Big) \\
&+\frac{1}{16}\Gamma^{++++abcd}\overset{++-}{F}{}_{[ab}{}^e\overset{++-}{F}{}_{cd]e}\ ,
\end{aligned}
\tag{340}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\phi'^+} \;=\;& \partial_A\partial^A - F^A\partial_A - \frac{1}{8}\overset{+++}{\phi'}{}_{abc}\overset{+++}{\phi'}{}^{abc} - \frac{1}{8}\overset{++-}{\phi'}{}_{abc}\overset{++-}{\phi'}{}^{abc} \\
&+\Gamma^{++ab}\Big(-\frac{1}{2}\overset{+++}{\phi'}{}_{abc}\overset{+}{\partial}{}^c - \frac{1}{2}\overset{++-}{\phi'}{}_{abc}\overset{-}{\partial}{}^c - \frac{1}{4}\rho(\overset{+}{E}{}^c)(\overset{+++}{\phi'}{}_{abc}) - \frac{1}{4}\rho(\overset{-}{E}{}^c)(\overset{++-}{\phi'}{}_{abc}) \\
&+\frac{1}{4}\overset{+}{F}{}^c\overset{+++}{\phi'}{}_{abc} + \frac{1}{4}\overset{-}{F}{}^c\overset{++-}{\phi'}{}_{abc}\Big) \\
&+\frac{1}{16}\Gamma^{++++abcd}(\overset{+++}{\phi'}{}_{[ab}{}^e\overset{+++}{\phi'}{}_{cd]e} + \overset{++-}{\phi'}{}_{[ab}{}^e\overset{++-}{\phi'}{}_{cd]e})\ .
\end{aligned}
\tag{341}
$$

これらを用いて射影された Lichnerowicz 公式 (339) を計算すれば

$$
\begin{aligned}
L^{+} &= 4\not{\mathcal{D}}^{+2} + div_{\nabla}\nabla_{-}^{\mathbb{S}^{+}} - \Delta^{\phi'+} \\
&= -\frac{1}{24}\overset{+++}{F}_{abc}\overset{+++}{F}{}^{abc} - \frac{1}{8}\overset{-++}{F}{}^{abc}\overset{-++}{F}_{abc} - \frac{1}{2}\rho(\overset{+}{E}_{a})(\overset{+}{F}{}^{a}) + \frac{1}{4}\overset{+}{F}_{a}\overset{+}{F}{}^{a} \\
&\quad +\frac{1}{8}\overset{+++}{\phi'}_{abc}\overset{+++}{\phi'}{}^{abc} + \frac{1}{8}\overset{++-}{\phi'}_{abc}\overset{++-}{\phi'}{}^{abc} \\
&\quad -\frac{1}{4}\mathcal{B}^{++}_{ab}\Gamma^{++ab} - \frac{1}{48}\mathcal{B}^{++++}_{abcd}\Gamma^{++++abcd} \\
&= -\frac{1}{24}\overset{+++}{F}_{abc}\overset{+++}{F}{}^{abc} - \frac{1}{8}\overset{-++}{F}{}^{abc}\overset{-++}{F}_{abc} - \frac{1}{2}\rho(\overset{+}{E}_{a})(\overset{+}{F}{}^{a}) + \frac{1}{4}\overset{+}{F}_{a}\overset{+}{F}{}^{a} \\
&\quad +\frac{1}{8}\overset{+++}{\phi'}_{abc}\overset{+++}{\phi'}{}^{abc} + \frac{1}{8}\overset{++-}{\phi'}_{abc}\overset{++-}{\phi'}{}^{abc} ,
\end{aligned}
\tag{342}
$$

を得る．ここで $\mathcal{B}^{++}_{ab}, \mathcal{B}^{++++}_{abcd}$ は一般化 Lichnerowicz 公式 (273) で現れた 0 になる係数 $\mathcal{B}_{AB}$(282), $\mathcal{B}_{ABCD}$(283) を射影したものである．そのため，この公式 (342) を射影された Lichnerowicz 公式 (projected Lichnerowicz formula) と呼んでいる．

ここまでの議論は射影方向 $+ \leftrightarrow -$ の入れ替えを行っても同様に成り立つ．そのため，射影された Lichnerowicz 公式は全ての射影方向を $+ \leftrightarrow -$ と入れ替えたもう 1 種類存在する．

$\mathbb{S}^{-}$ 上の射影された Lichnerowicz 公式

$\mathbb{S}^{-}$ 上の射影された Lichnerowics 公式として

$$
L^{-} := 4\not{\mathcal{D}}^{-2} + div_{\nabla}\nabla_{+}^{\mathbb{S}^{-}} - \Delta^{\phi'-} \tag{343}
$$

を構成できる．

具体的に成分を計算すれば

$$
\begin{aligned}
L^{-} &= 4\not{\mathcal{D}}^{-2} + div_{\nabla}\nabla_{+}^{\mathbb{S}^{-}} - \Delta^{\phi'-} \\
&= -\frac{1}{24}\overset{---}{F}_{abc}\overset{---}{F}{}^{abc} - \frac{1}{8}\overset{+--}{F}{}^{abc}\overset{+--}{F}_{abc} - \frac{1}{2}\rho(\overset{-}{E}_{a})(\overset{-}{F}{}^{a}) + \frac{1}{4}\overset{-}{F}_{a}\overset{-}{F}{}^{-a} \\
&\quad +\frac{1}{8}\overset{---}{\phi'}_{abc}\overset{---}{\phi'}{}^{abc} + \frac{1}{8}\overset{--+}{\phi'}_{abc}\overset{--+}{\phi'}{}^{abc} ,
\end{aligned}
\tag{344}
$$

を得る．

二重場理論の作用　射影された Lichnerowicz 公式 (342) (344) は $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 共変な演算子のみで構成されている．そのため，射影された Lichnerowicz 公式から導出されたスカラー $L^{\pm}$ は $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変である．二重場理論の作用は $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変であることが要請されていたことを思い出せば，$L^{\pm}$ から二重場理論の作用が構成できることが期待される．

作用の測度は真空と真空の双対基底の A-内積 (304) により与える．A-内積は $O(D, D)$ 不変であるから，その部分群である $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ に対しても不変である．故に，定数 $\beta_{\pm}$ を用いて $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変な積分 $I(\beta_{+}, \beta_{-})$ を

$$
\begin{aligned}
I(\beta_{+}, \beta_{-}) &= (|0\rangle, \hat{K}\,|0\rangle)_{A}(\beta_{+}L^{+} + \beta_{-}L^{-}) \\
&= c_{0}\int dX \sqrt{\det \eta}\, e^{-2d}(\beta_{+}L^{+} + \beta_{-}L^{-}) ,
\end{aligned}
\tag{345}
$$

と構成できる．この積分は部分積分に対する性質 (289) を用いれば

$$
\begin{aligned}
I(\beta_+,\beta_-) &= \beta_+\Big(-4(\not{\mathcal{D}}^+\left|0\right\rangle,\not{\mathcal{D}}^+\hat{K}\left|0\right\rangle)_A-(\nabla^{\mathbb{S}+}_{E_a^-}\left|0\right\rangle,\nabla^{\mathbb{S}+}_{E^{-a}}\hat{K}\left|0\right\rangle)_A+(\nabla^{\phi'+}_{E_A}\left|0\right\rangle,\nabla^{\phi'+}_{E^A}\hat{K}\left|0\right\rangle)_A\Big)\\
&\quad+\beta_-\Big(-4(\not{\mathcal{D}}^-\left|0\right\rangle,\not{\mathcal{D}}^-\hat{K}\left|0\right\rangle)_A-(\nabla^{\mathbb{S}-}_{E_a^+}\left|0\right\rangle,\nabla^{\mathbb{S}-}_{E^{+a}}\hat{K}\left|0\right\rangle)_A+(\nabla^{\phi'-}_{E_A}\left|0\right\rangle,\nabla^{\phi'-}_{E^A}\hat{K}\left|0\right\rangle)_A\Big)\ ,
\end{aligned}
\tag{346}
$$

のように真空の 1 階微分の 2 次で単純に書くことができる．

この積分 $I(\beta_+,\beta_-)$ に含まれる定数 $\beta_\pm$ を適切に選べば，二重場理論の作用が構成できる．この係数の選び方は後に述べるように，(1) 超重力理論を含むことと (2)DFT$_{\mathrm{WZW}}$ を含むことを要請することで決定することができる．ただし，(2) を満たせば (1) が自動的に満足するから (1) は冗長な条件である．その結果，二重場理論の作用は

$$
S=I(-4c_0^{-1},4c_0^{-1})=\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}(-4L^++4L^-)\ , \tag{347}
$$

と与えられる．

5.7 超重力理論への簡約

前節で導出した積分 $I(\beta_+,\beta_-)$ が超重力理論へ簡約できるように β_+,β_- を決定する．本節の流れは次の通り．

積分 $I(\beta_+,\beta_-)$ と標準的な二重場理論，超重力理論の比較

- $L^\pm$ を標準的な二重場理論と同じ基底 E_A で書き下す．
- 強い拘束条件 (178) が成立する時，標準的な二重場理論の作用が $I(0,8c_0^{-1})$ と書けることを示す．
- 超重力理論を導出するためには $-\beta_++\beta_-=8c_0^{-1}$ で良いことを示す．

強い拘束条件の下での標準的な二重場理論の導出　まず，$L_\pm$ を標準的な二重場理論と同じ基底 E_A の成分で書き直す．

$$
\begin{aligned}
L^\pm &= -\frac{1}{24}F_{ABC}F_{A'B'C'}P^{\pm AA'}P^{\pm BB'}P^{\pm CC'}-\frac{1}{8}F_{ABC}F_{A'B'C'}P^{\mp AA'}P^{\pm BB'}P^{\pm CC'}\\
&\quad-\frac{1}{2}\rho(E_A)(F_{A'})P^{\pm AA'}+\frac{1}{4}F_AF_{A'}P^{\pm AA'}\\
&\quad+\frac{1}{8}\phi'{}_{ABC}\phi'^{A'B'C'}P^{\pm AA'}P^{\pm BB'}P^{\pm CC'}+\frac{1}{8}\phi'{}_{ABC}\phi'^{A'B'C'}P^{\pm AA'}P^{\pm BB'}P^{\mp CC'}\\
&= \frac{1}{8}\Big[F_{ABC}F_{A'B'C'}\Big(-\frac{1}{6}\eta^{AA'}\eta^{BB'}\eta^{CC'}\mp\frac{1}{4}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'}\pm\frac{1}{12}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'}\Big)\\
&\quad-2\rho(E_A)(F_{A'})(\eta^{AA'}\pm H^{AA'})+F_AF_{A'}(\eta^{AA'}\pm H^{AA'})\Big]\\
&\quad+\frac{1}{32}\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'}{}^C(\eta^{AA'}\eta^{BB'}\pm2\eta^{AA'}H^{BB'}+H^{AA'}H^{BB'})\ ,
\end{aligned}
\tag{348}
$$

標準的な二重場理論の作用 (191) と比較すれば F_{ABC},F_A が含まれる項の係数の比が同じなのは L^- であることが分かる．そこで $I(\beta_+,\beta_-)$ から標準的な二重場理論を得るには $\beta_+=0$ に取らな

ければならない．実際 $I(0,8c_0^{-1})$ を計算すれば

$$\begin{aligned}
& I(0,8c_0^{-1}) \\
= & \int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}8L^{-} \\
= & \int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\Big[F_{ABC}F_{A'B'C'}\Big(-\frac{1}{6}\eta^{AA'}\eta^{BB'}\eta^{CC'}+\frac{1}{4}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'} \\
& -\frac{1}{12}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'}\Big) \\
& -2\rho(E_A)(F_{A'})(\eta^{AA'}-H^{AA'})+F_AF_{A'}(\eta^{AA'}-H^{AA'}) \\
& +\frac{1}{4}\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'}{}^{C}(\eta^{AA'}\eta^{BB'}-2\eta^{AA'}H^{BB'}+H^{AA'}H^{BB'})\Big] ,
\end{aligned} \tag{349}$$

を得る．標準的な二重場理論では (285) のところで説明したように座標基底での D 括弧がゼロであることから ϕ'_{ABC} が Weitzenböck 接続で書けることが従う．

$$[\partial_L,\partial_M]=0\Longrightarrow\phi'_{ABC}=\Omega_{CAB} . \tag{350}$$

故に，$I(0,8c_0^{-1})$ の最後の項が具体的に計算できる．$\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'}{}^{C}$ を計算すれば

$$\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'}{}^{C}=\partial_LE_A{}^{M}E_{BM}\partial^LE_{A'}{}^{N}E_{B'N} .$$

この項は強い拘束条件 (178) の下でゼロになる．したがって，強い拘束条件の下で標準的な二重場理論の作用 S_{sDFT} は $I(0,8c_0^{-1})$ によって与えられる．

$$I(0,8c_0^{-1})=S_{sDFT} . \tag{351}$$

超重力理論との比較　標準的な二重場理論で行ったのと同じように超重力理論の場を用いて二重場理論の場を書くこと (150) を考える．このとき，場は D 次元の x^m にしか依存しない (196) ため，強い拘束条件 (178) を満たす．強い拘束条件の下で $I(0,8c_0^{-1})$ は標準的な二重場理論と一致し，この場の置き方で標準的な二重場理論は超重力理論と一致する．

　したがって，$I(0,8c_0^{-1})$ は場の置き方 (150) で超重力理論の作用に一致する．

$$I(0,8c_0^{-1})=S_{SUGRA}, (150) \text{ の場の置き方の下} . \tag{352}$$

　しかし，超重力理論を導出できる積分は $I(0,8c_0^{-1})$ に限らず，$I(\beta_+,\beta_-)$ が $-\beta_++\beta_-=8c_0^{-1}$ を満たせばよい．このことを示すために L_+,L_- の和を調べる．

$$\begin{aligned}
& \int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}(L^{+}+L^{-}) \\
= & \int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\Big[-\frac{1}{24}F_{ABC}F_{A'B'C'}\eta^{AA'}\eta^{BB'}\eta^{CC'} \\
& -2\rho(E_A)(F_{A'})\eta^{AA'}+F_AF_{A'}\eta^{AA'} \\
& +\frac{1}{16}\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'}{}^{C}(\eta^{AA'}\eta^{BB'}+H^{AA'}H^{BB'})\Big] \\
= & \int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\Big[-\frac{1}{24}F_{ABC}F_{A'B'C'}\eta^{AA'}\eta^{BB'}\eta^{CC'} \\
& -F_AF_{A'}\eta^{AA'}+\frac{1}{16}\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'}{}^{C}(\eta^{AA'}\eta^{BB'}+H^{AA'}H^{BB'})\Big]
\end{aligned} \tag{353}$$

(351) で述べたように超重力理論に簡約する際は最後の項は 0 になる．また，超重力理論に簡約する時の F_{ABC}, F_A の具体的な形 (199) を用いれば，全ての項が 0 になることが分かる．よって，超重力理論に簡約する際には

$$\int dX \sqrt{\det \eta} e^{-2d}(L^+ + L^-) = 0 \ , \tag{354}$$

が従う．よって，超重力理論に簡約する際には

$$\begin{aligned} I(\beta_+, \beta_-) &= c_0 \int dX \sqrt{\det \eta} e^{-2d}(\beta_+ L^+ + \beta_- L^-) \\ &= c_0 \int dX \sqrt{\det \eta} e^{-2d}((-\beta_+ + \beta_-)L^-) \\ &= I(0, -\beta_+ + \beta_-) \ , \end{aligned} \tag{355}$$

が従う．以上の議論より，超重力理論に簡約する際の場の置き方 (150) を採用したとき，$\beta_\pm$ が

$$-\beta_+ + \beta_- = 8c_0^{-1} \ , \tag{356}$$

を満たすことは $I(\beta_+, \beta_-) = S_{SUGRA}$ となるための必要十分条件である．そのため，二重場理論の作用に超重力理論に簡約するという条件を課しても一意には決定しない．

超重力理論を含む二重場理論の作用

超重力理論に簡約されることを要請した二重場理論の作用は

$$S = I(\beta_+, \beta_-) \ , \ (-\beta_+ + \beta_- = 8c_0^{-1}) \tag{357}$$

で与えられる．

5.8 DFT$_{WZW}$ への簡約

(357) で述べたように二重場理論の作用は超重力理論に簡約するという条件だけでは一意に決定しない．そこで，本節では WZW 二重場理論 (DFT$_{WZW}$)[22, 23, 24] と呼ばれるある特殊な曲がった空間上の二重場理論に一致することを要請する．この要請により $\beta_\pm$ は $(\beta_+, \beta_-) = (-4c_0^{-1}, 4c_0^{-1})$ と一意に決定される．本節の流れは以下の通り．

積分 $I(\beta_+, \beta_-)$ と WZW 二重場理論 (DFT$_{WZW}$) の比較

- WZW 二重場理論の構成要素と作用を確認する．
- 積分 $I(\beta_+, \beta_-)$ が WZW 二重場理論を含む条件 $(\beta_+, \beta_-) = (-4c_0^{-1}, 4c_0^{-1})$ を導出する．これによって二重場理論の作用が $S = I(-4c_0^{-1}, 4c_0^{-1})$ と一意に定まる．
- WZW 二重場理論と本章で導出した二重場理論の違いについて議論する．

WZW 二重場理論の構成要素と作用　標準的な二重場理論は η_{MN} が定数の空間で構成されている．この $O(D,D)$ 内積 η_{MN} を

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} g^{mn}(x) & 0 \\ 0 & -\bar{g}_{mn}(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_a^m(x) s^{ab} e_b^n(x) & 0 \\ 0 & -\bar{e}_m^a(\bar{x}) s_{ab} e_n^b(\bar{x}) \end{pmatrix} \ , \tag{358}$$

と書ける特殊な場合に拡張したのが，WZW 二重場理論 (DFT$_{WZW}$) である [22, 23, 24]．

多脚場を導入する．(224) の議論と同様に $E_A{}^M = U_A{}^B \bar{E}_B{}^M$ のように物理的自由度 $U_A{}^B$ を分けて考える．この $\bar{E}_A$ 基底における計量亜代数の構造係数 $\bar{F}_{ABC}$ を

$$\bar{F}^{+++}_{abc} = f_{ab}{}^d s_{dc} \ , \ \bar{F}^{---}_{abc} = -\bar{f}^{ab}{}_d s^{dc} \ , \ others = 0 \ , \tag{359}$$

と与える．ここで構造定数 $f_{ab}{}^c, \bar{f}^{ab}{}_c$ は Lie 代数の係数で

$$f_{ab}{}^c = 2e^l_{[a|}\partial_l e^m_{|b]}e^c_m \ , \ \bar{f}^{ab}{}_c = 2\bar{e}^{[a|}_l \partial^l \bar{e}^{|b]}_m \bar{e}^m_c \ , \tag{360}$$

で与えられる．$U_A{}^B$ に関しては常に強い拘束条件 (178) を課す．

$$\partial_M \Psi_1 \partial^M \Psi_2 = 0 \ , \ \partial_M \partial^M \Psi_1 = 0 \ . \tag{361}$$

このとき，作用は次で与えられる [24]．後の比較のために，WZW 二重場理論のディラトンを d' と文字を変えて作用を書く．

$$\begin{aligned} S_{DFT_{WZW}} &= \int dX e^{-2d'}\Big(-\frac{1}{12}F_{ABC}F_{A'B'C'}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'} \\ &\quad +\frac{1}{4}F_{ABC}F_{A'B'C'}\eta^{AA'}\eta^{BB'}\eta^{CC'} + \tilde{F}_A\tilde{F}_B H^{AB} \\ &\quad -\frac{1}{2}\Omega^{(U)}_{CAB}\Omega^{(U)C}{}_{A'B'}\eta^{AA'}H^{BB'}\Big) \qquad (362) \\ &= \int dX e^{-2d'}\Big(-\frac{1}{12}F_{ABC}F_{A'B'C'}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'} \\ &\quad +\frac{1}{4}F_{ABC}F_{A'B'C'}\eta^{AA'}\eta^{BB'}\eta^{CC'} + \tilde{F}_A\tilde{F}_B H^{AB}\Big) \qquad (363) \end{aligned}$$

ここで $\tilde{F}_A$ は本論文の F_A の定義と異なり，

$$\tilde{F}_A = 2\rho(E_A)(d') - \rho(E_N)(E_A{}^N) \ , \tag{364}$$

で定義される．また，$\Omega^{(U)}_{CAB}$ は

$$\Omega^{(U)}_{ABC} = \rho(E_A)(U_B{}^{B'})U_C{}^{C'}\eta_{B'C'} \ , \tag{365}$$

で定義される．これは Weitzenböck 接続 (174) への $U_A{}^B$ の寄与で

$$\Omega_{ABC} = U_A{}^{A'}U_B{}^{B'}U_C{}^{C'}\bar{\Omega}_{A'B'C'} + \Omega^{(U)}_{ABC} \ , \tag{366}$$

を満たす．(363) の最後の等号は強い拘束条件 (178) を用いた．

ただし，この作用の導出に関してはいくつか注意すべき点がある．

WZW 二重場理論の問題点

- 摂動に対して強い拘束条件が必要なこと．後で詳しく述べるが，このことは二重場理論上で T 双対性を議論する場合に大きな弊害となる．
- 特別な代数を持っている場合 (359) のみで構成されていること．そのため，一般の曲がった空間に対して同じ作用を適用することは大きな飛躍がある．
- この作用は摂動論を用いて導出されており，摂動の 3 次までしか計算されていない．そのため高次まで計算した際に，破綻する可能性がある．

特に最後の点ついて，先行研究 [22, 23, 24] では一般の曲がった空間に作用が適用可能であることを期待しているが，理論的な根拠はなく，提案するにとどまっている．

積分 $I(\beta_+,\beta_-)$ から WZW 二重場理論を得るための条件　WZW 二重場理論の作用 $S_{DFT_{WZW}}$ を積分 $I(\beta_+,\beta_-)$ から得ることを考える．WZW 二重場理論は基底 $\bar{E}_A$ で Lie 代数と計量亜代数の構造定数を一致させている．故に，計量亜代数の構造関数と Lie 代数の構造関数の差で定義される ϕ'_{ABC}(264) の基底 $\bar{E}_A$ での値 $\bar{\phi}'_{ABC}$ は

$$\bar{\phi}'_{ABC} = 0 \ , \tag{367}$$

となる．局所ローレンツ基底 E_A で書くと

$$\phi'_{ABC} = \Omega^{(U)}_{CAB} \ , \tag{368}$$

を得る．このことに注意して積分 $I(\beta_+,\beta_-)$ が WZW 二重場理論の作用 (363) と一致するかを調べる．積分 $I(\beta_+,\beta_-)$ に含まれる F_{ABC} の 2 次の項が WZW 二重場理論の作用に一致するように $\beta_\pm$ を決定すれば，

$$\begin{aligned}
& I(-4c_0^{-1}, 4c_0^{-1}) \\
= & \int dX\sqrt{\det\eta}\,e^{-2d}\Big[F_{ABC}F_{A'B'C'}\Big(\frac{1}{4}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'} - \frac{1}{12}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'}\Big) \\
& +2\rho(E_A)(F_{A'})H^{AA'} - F_AF_{A'}H^{AA'} - \frac{1}{2}\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'}{}^{C}\eta^{AA'}H^{BB'}\Big] \\
= & \int dX\sqrt{\det\eta}\,e^{-2d}\Big[F_{ABC}F_{A'B'C'}\Big(\frac{1}{4}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'} - \frac{1}{12}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'}\Big) \\
& +F_AF_{A'}H^{AA'} - \frac{1}{2}\Omega^{(U)}_{CAB}\Omega^{(U)C}{}_{A'B'}\eta^{AA'}H^{BB'}\Big] \ ,
\end{aligned} \tag{369}$$

を得る．ここで用いた F_A と WZW 二重場理論で用いている $\tilde{F}_A$(364) は定義が違うから，式 (295) を用いて F_A を書き直して比較する．$f = e^{-2d}h = c_0e^{-2d}\sqrt{\det\eta}$ を用いれば

$$\begin{aligned}
-fF_A &= \rho(E_N)(E_A{}^Nf) \\
-c_0e^{-2d}\sqrt{\det\eta}F_A &= \rho(E_N)(E_A{}^Nc_0e^{-2d}\sqrt{\det\eta}) \\
F_A &= -2\rho(E_A)\Big(d - \frac{1}{4}\log(\det\eta)\Big) - \rho(E_N)(E_A{}^N) \ ,
\end{aligned} \tag{370}$$

を得る．よって，d, d' を

$$d' = d - \frac{1}{4}\log(\det\eta) \ , \tag{371}$$

と置けば，2 つの構造係数 $F_A, \tilde{F}_A$ は等しくなる．

$$F_A = \tilde{F}_A \ , \ \Big(d' = d - \frac{1}{4}\log(\det\eta)\Big) \ . \tag{372}$$

測度に関しても，この d, d' の対応によって

$$dXe^{-2d}\sqrt{\det\eta} = dXe^{-2d'} \ , \ \Big(d' = d - \frac{1}{4}\log(\det\eta)\Big) \ , \tag{373}$$

と対応する．これらを用いて積分 $I(-4c_0^{-1}, 4c_0^{-1})$ を書き換えれば

$$\begin{aligned}
& I(-4c_0^{-1}, 4c_0^{-1}) \\
= & \int dXe^{-2d'}\Big[F_{ABC}F_{A'B'C'}\Big(\frac{1}{4}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'} - \frac{1}{12}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'}\Big) \\
& +\tilde{F}_A\tilde{F}_{A'}H^{AA'} - \frac{1}{2}\Omega^{(U)}_{CAB}\Omega^{(U)C}{}_{A'B'}\eta^{AA'}H^{BB'}\Big] \ ,
\end{aligned} \tag{374}$$

を得る．WZW 二重場理論の作用 $S_{DFT_{WZW}}$ と比較すればこの積分は強い拘束条件を課す前の (362) と一致していることが分かる．これは，拘束条件を課さずに構成した本論文の二重場理論が，実際に拘束を課す前の WZW 二重場理論の作用を導出できたことを意味する．このことは，本論文で拘束条件のない二重場理論が構成できた根拠の一つである．

以上より，WZW 二重場理論を得るためには積分 $I(\beta_+,\beta_-)$ の定数 $\beta_\pm$ を $(\beta_+,\beta_-)=(-4c_0^{-1},4c_0^{-1})$ と取ることが必要かつ十分である．この条件は超重力理論に簡約するための条件 $-\beta_++\beta_-=8c_0^{-1}$ を自動的に満たす．したがって，二重場理論に対して超重力理論に簡約する条件を課すことは冗長である．二重場理論の作用から WZW 二重場理論の作用を得られることを要請すれば，結局作用は次で得られる．

二重場理論の作用

二重場理論の作用は次で与えられる．

$$S_{DFT}=I(-4c_0^{-1},4c_0^{-1})\ . \tag{375}$$

具体的に成分で書けば，

$$\begin{aligned}S_{DFT} &= \int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\Big[\frac{1}{4}F_{ABC}F_{A'B'C'}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'}\\ &\quad -\frac{1}{12}F_{ABC}F_{A'B'C'}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'}\\ &\quad +2\rho(E_A)(F_{A'})H^{AA'}-F_AF_{A'}H^{AA'}\\ &\quad -\frac{1}{2}\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'}{}^{C}\eta^{AA'}H^{BB'}\Big]\ ,\end{aligned} \tag{376}$$

と与えられる．二重場理論の構成に用いた 3 つの要請とその役割をまとめる．

- Buscher 則により共変．
  - 座標の入れ替えによって理論が不変になるように $2D$ 次元の座標空間を導入した．
- $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換により不変．
  - この要請が最も重要である．$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変な作用を構成するために共変な微分演算子を構成し，作用を $I(\beta_+,\beta_-)$ の形まで決定した．
- WZW 二重場理論を含む．
  - 作用に含まれる定数 $\beta_\pm$ を決定した．

5.9 Riemann テンソル

前節までで，Dirac 演算子や共変微分などの $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 共変な微分演算子を用いて，作用 S_{DFT} を導出した．本節ではこれまでの議論から，少し離れて共変微分を用いた Riemann テンソルの定式化について議論する．

Riemann テンソルの構成

- 既存の研究における Riemann テンソルを導入.
  - 既存の研究における Riemann テンソルがテンソルではないことを示す.
- テンソル性 (添え字に対する線形性) を回復した新たな Riemann テンソルを構成する.
  - テンソル性を回復するために補正項を付け足して新たな Riemann テンソルを定義する.
  - 新たな Riemann テンソルを用いて Ricci テンソルと Ricci スカラーを定義する.

既存の研究では Riemann テンソルとして次の $\mathcal{R}^{HZ}:(T\mathbb{M})^4\to C^\infty(\mathbb{M})$ が提案されている [47]. 任意のベクトル $V_1,V_2,V_3,V_4\in T\mathbb{M}$ に対して

$$\mathcal{R}^{HZ}(V_1,V_2,V_3,V_4)=R^\nabla(V_1,V_2,V_3,V_4)+R^\nabla(V_3,V_4,V_1,V_2)\ . \tag{377}$$

ここで $R^\nabla:(T\mathbb{M})^4\to C^\infty(\mathbb{M})$ は次で定義される写像である.

$$\begin{aligned} R^\nabla(V_1,V_2,V_3,V_4): &= \langle(\nabla_{V_1}\nabla_{V_2}-\nabla_{V_2}\nabla_{V_1})V_3-\nabla_{[V_1,V_2]}V_3,V_4\rangle \\ &\quad +\frac{1}{2}\langle\nabla_{E_A}V_1,V_2\rangle\langle\nabla_{E^A}V_3,V_4\rangle\ . \end{aligned} \tag{378}$$

この $\mathcal{R}^{HZ}$ の引数に対する線形性を評価する．任意関数 $f_1,f_2,f_3,f_4\in C^\infty(\mathbb{M})$ に対して

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}^{HZ}(f_1V_1,V_2,V_3,V_4)+\mathcal{R}^{HZ}(V_1,f_2V_2,V_3,V_4)+\mathcal{R}^{HZ}(V_1,V_2,f_3V_3,V_4) \\ &+\mathcal{R}^{HZ}(V_1,V_2,V_3,f_4V_4)-(f_1+f_2+f_3+f_4)\mathcal{R}^{HZ}(V_1,V_2,V_3,V_4) \\ = \ &-\rho(\mathcal{L}'(V_1,V_2))(f_3)\langle V_3,V_4\rangle-\rho(\mathcal{L}'(V_3,V_4))(f_1)\langle V_1,V_2\rangle\ , \end{aligned} \tag{379}$$

となる．ここで $\mathcal{L}':(T\mathbb{M})^2\to T\mathbb{M}$ は

$$\mathcal{L}'(V_1,V_2)=[V_1,V_2]-[V_1,V_2]_L\ , \tag{380}$$

で定義される．特に基底に対しては

$$\mathcal{L}'(E_A,E_B)=\phi'_{AB}{}^{C}E_C\ , \tag{381}$$

となって，ϕ'_{ABC}(264) を作る．(379) の計算から明らかなように，$\mathcal{R}^{HZ}(V_1,V_2,V_3,V_4)$ は 1，3 個目の引数に対して線形ではない．よって，$\mathcal{R}^{HZ}(E_A,E_B,E_C,E_D)$ はテンソルと見なすことができない．そこで新たに全ての引数に線形な演算子である Riemann テンソル $\mathcal{R}(V_1,V_2,V_3,V_4)$ を定義する．

$$\mathcal{R}(V_1,V_2,V_3,V_4)=\mathcal{R}^{HZ}(V_1,V_2,V_3,V_4)+\langle\mathcal{L}'(V_1,V_2),\mathcal{L}'(V_3,V_4)\rangle_{TM}\ . \tag{382}$$

具体的にテンソルの成分を書けば，次を得る．

Ricci テンソル

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ABCD} &:= \mathcal{R}(E_A, E_B, E_C, E_D) \\
&= R^{\nabla}_{ABCD} + R^{\nabla}_{CDAB} + \phi'_{ABE}\phi'_{CD}{}^{E} \;,
\end{aligned}
\tag{383}
$$

を得る．ここで R^{∇}_{ABCD} は

$$
R^{\nabla}_{ABCD} := 2\rho(E_{[A})W_{B]CD} - 2W_{[A|C}{}^{E'}W_{|B]E'D} - F_{AB}{}^{E}W_{ECD} + \frac{1}{2}W_{EAB}W^{E}{}_{CD} \;. \tag{384}
$$

で定義される．

この新たに定義した Riemann テンソル $\mathcal{R}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ は計量亜代数や Lie 代数の構造係数だけでは決定しないことに注意が必要である．(328) で議論したように，二重場理論のスピン接続 W_{ABC} の成分は決まらない自由度が残っている．故に，$\mathcal{R}(V_1, V_2, V_3, V_4)$ は二重場理論の代数構造のみでは書くことができない．

この Riemann テンソルを縮約することで Ricci テンソルと Ricci スカラーを定義する．二重場理論には $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変なテンソルとして一般化計量 H_{AB} と $O(D, D)$ 計量 η_{AB} があるため，$O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ に対する共変性を要請するだけでは縮約の取り方が決定しない．実際，H_{AB},η_{AB} の任意の線形和で Riemann テンソルの縮約をとっても $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 共変である．そこで，通常の幾何学と同様に Ricci テンソル $\mathcal{R}_{AB}$ と Ricci スカラー $\mathcal{R}$ が運動方程式に現れるように縮約の方法を決定する．以下のように定義した Ricci テンソル $\mathcal{R}_{AB}$ と Ricci スカラー $\mathcal{R}$ が実際に運動方程式に現れることは 5.10 節で確認する．

Ricci テンソル，Ricci スカラー

二重場理論における Ricci テンソルと Ricci スカラーは次で定義する．

$$
\mathcal{R}_{AB} = -\mathcal{R}_{ACB}{}^{C} \;, \tag{385}
$$

$$
\mathcal{R} = \mathcal{R}_{AB}H^{AB} \;. \tag{386}
$$

この Ricci テンソルの射影成分 $\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab}$ と Ricci スカラーは二重場理論の構造係数のみから決定する．その具体形を与えれば

$$
\begin{aligned}
\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ad} &= 2\overset{++-}{F}{}_{abc}\overset{-+-}{F}{}_{d}{}^{bc} - (\overset{+}{E}{}^{N}_{c}\partial_N - \overset{+}{F}_{c})\overset{+-+}{F}{}_{ad}{}^{c} \\
&\quad + (\overset{-}{E}{}^{N}_{c}\partial_N - \overset{-}{F}_{c})\overset{+--}{F}{}_{ad}{}^{c} + \overset{-}{E}{}^{N}_{d}\partial_N\overset{+}{F}_{a} + \overset{+}{E}{}^{N}_{a}\partial_N\overset{-}{F}_{d} \\
&\quad - \overset{+++}{\phi'}{}_{abc}\overset{-++}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} - \overset{++-}{\phi'}{}_{abc}\overset{-+-}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} - \overset{+-+}{\phi'}{}_{abc}\overset{--+}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} - \overset{+--}{\phi'}{}_{abc}\overset{---}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} \;,
\end{aligned}
\tag{387}
$$

$$
\mathcal{R} = -8L^{+} + 8L^{-} \;, \tag{388}
$$

と得られる．

ここで定義した Ricci テンソルと Ricci スカラーは 5.10 節で議論するように二重場理論の運動方程式になっており，幾何学的に意味のある量である．したがって，Riemann テンソルに関しても何らかの幾何学的意味を持つことが期待される．

5.10 運動方程式

ここまでの議論で二重場理論の作用 S_{DFT}(376) を得た．本節ではこの作用を変分し，運動方程式を得る．また，作用の $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変性を顕わに確認する．

二重場理論の運動方程式

- 作用の一般化多脚場による変分
  - 多脚場の変分が $\delta E_A = E_B\Lambda^B{}_A, (\Lambda_{AB}=-\Lambda_{BA})$ と書けることを示す．特に，局所ローレンツ変換 $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ の自由度が $\overset{++}{\Lambda}_{ab}, \overset{--}{\Lambda}_{ab}$ で与えられることを示す．即ち，物理的変分は $\overset{+-}{\Lambda}_{ab}, \overset{-+}{\Lambda}_{ab}$ で与えられる．
  - 作用を一般化多脚場で変分し，運動方程式を導く．また，$\overset{++}{\Lambda}_{ab}, \overset{--}{\Lambda}_{ab}$ による変分が 0 になること．即ち，作用が $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変であることを顕わに示す．
- 作用のディラトンによる変分
  - 作用を一般化ディラトンにより変分し，運動方程式を得る．

作用 S_{DFT} の一般化多脚場による変分　まず，一般化多脚場 E_A の変分を考える．一般化多脚場は物理的自由度を持つ $U_A{}^B$ を用いて $E_A = U_A{}^B\bar{E}_B$ と書ける．この $U_A{}^B$ の物理的自由度は (224) で述べたように

$$U_A{}^B \in \Big(O(1,D-1)\times O(D-1,1)\Big)\backslash O(D,D)\ , \tag{389}$$

と与えられる．この $U_A{}^B$ の変分

$$\delta U_A{}^B = \Lambda^C{}_A U_C{}^B\ , \tag{390}$$

を考えて，$U_A{}^B$ に対する条件を変分の条件に書き換える．

まず，$O(D,D)$ を保つ変分を考える．$O(D,D)$ の条件を具体的に与えれば，

$$U^{-1}{}_{A'}{}^{A}\eta_{AB}U^{-TB}{}_{B'} = \eta_{A'B'}\ , \tag{391}$$

である．よって，$U_A{}^B, U'^{\,B}_A = U_A{}^B + \delta U_A{}^B$ の両方が $O(D,D)$ に属することを考えれば

$$\begin{aligned} \Lambda^T{}_A{}^C\eta_{CB} + \eta_{AC}\Lambda^C{}_B &= 0\ ,\\ \Lambda_{AB} &= -\Lambda_{BA}\ , \end{aligned} \tag{392}$$

が従う．さらに，$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ の自由度は (330) で議論したように V^+, V^- それぞれを回転させる．故に，V^+, V^- が混ざる回転方向をゼロにしたのが $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 自由度である．

$$O(1,D-1)\times O(D-1,1)\ \text{変換}: \overset{+-}{\Lambda}_{ab} = \overset{-+}{\Lambda}_{ab} = 0, \Lambda_{AB} = -\Lambda_{BA}\ . \tag{393}$$

したがって，一般化多脚場の変分

$$\delta^{(E)}E_A = U_B{}^C\bar{E}_C\Lambda^B{}_A = \bar{E}_B\Lambda^B{}_A\ , \tag{394}$$

は $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 部分と物理的変分に分離する．

$$
\begin{aligned}
O(1,D-1)\times O(D-1,1)\ \text{変換} &\ :\ \overset{++}{\Lambda}_{ab},\ \overset{--}{\Lambda}_{ab}\ ,\\
\text{物理的変分} &\ :\ \overset{+-}{\Lambda}_{ab},\ \overset{-+}{\Lambda}_{ab}\ .
\end{aligned}
\tag{395}
$$

以下の計算では物理的変分のみではなく $O(D,D)$ の変分を実行し，$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換を引き起こす変分 $\overset{++}{\Lambda}_{ab}, \overset{--}{\Lambda}_{ab}$ が二重場理論の作用 S_{DFT} の変分に寄与しないことを確認する．

まず，各構造係数の変換則を与える．

$$
\begin{aligned}
\delta^{(E)}F_{ABC} &= -\rho(E_A)(\Lambda_{BC})-\rho(E_B)(\Lambda_{CA})-\rho(E_C)(\Lambda_{AB})\\
&\quad +F_{A'BC}\Lambda^{A'}{}_A+F_{AB'C}\Lambda^{B'}{}_B+F_{ABC'}\Lambda^{C'}{}_C\ , &(396)\\
\delta^{(E)}\phi'_{ABC} &= -\rho(E_C)(\Lambda_{AB})+\phi'_{A'BC}\Lambda^{A'}{}_A+\phi'_{AB'C}\Lambda^{B'}{}_B+\phi'_{ABC'}\Lambda^{C'}{}_C\ , &(397)\\
\delta^{(E)}F_A &= -\rho(E_B)(\Lambda^B{}_A)+F_B\Lambda^B{}_A\ , &(398)
\end{aligned}
$$

測度は変換を受けないことに注意.

$$
\delta^{(E)}(dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d})=0\ . \tag{399}
$$

これらを用いて $c_0\int d^{2D}x\sqrt{\det\eta}e^{-2d}L^+$ の変分を実行する．$c_0\int d^{2D}x\sqrt{\det\eta}e^{-2d}L^-$ の変分は $+\leftrightarrow -$ と読み替えれば良い．$c_0\int d^{2D}x\sqrt{\det\eta}e^{-2d}L^+$ の具体形をもう一度書けば

$$
\begin{aligned}
&c_0\int d^{2D}x\sqrt{\det\eta}e^{-2d}L^+\\
=\ &c_0\int d^{2D}x\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\Big(-\frac{1}{24}\overset{+++}{F}{}_{abc}\overset{+++}{F}{}^{abc}-\frac{1}{8}\overset{-++}{F}{}^{abc}\overset{-++}{F}{}_{abc}\\
&-\frac{1}{2}\rho(\overset{+}{E}_a)(\overset{+}{F}{}^a)+\frac{1}{4}\overset{+}{F}_a\overset{+}{F}{}^a+\frac{1}{8}\overset{+++}{\phi'}{}_{abc}\overset{+++}{\phi'}{}^{abc}+\frac{1}{8}\overset{++-}{\phi'}{}_{abc}\overset{++-}{\phi'}{}^{abc}\Big)\\
=\ &\int d^{2D}xf\Big(-\frac{1}{24}\overset{+++}{F}{}_{abc}\overset{+++}{F}{}^{abc}-\frac{1}{8}\overset{-++}{F}{}^{abc}\overset{-++}{F}{}_{abc}-\frac{1}{2}\rho(\overset{+}{E}_a)(\overset{+}{F}{}^a)+\frac{1}{4}\overset{+}{F}_a\overset{+}{F}{}^a\\
&+\frac{1}{8}\overset{+++}{\phi'}{}_{abc}\overset{+++}{\phi'}{}^{abc}+\frac{1}{8}\overset{++-}{\phi'}{}_{abc}\overset{++-}{\phi'}{}^{abc}\Big)\ ,
\end{aligned}
\tag{400}
$$

である．この各項を変分する．$\sim$ は部分積分を実行していることを表す.

$$
\begin{aligned}
\delta^{(E)}(-\frac{1}{24}f\overset{+++}{F}{}_{abc}\overset{+++}{F}{}^{abc}) &= \frac{1}{4}f\overset{+++}{F}{}^{abc}\overset{+}{E}_a{}^N\partial_N\overset{++}{\Lambda}{}_{bc}+\frac{1}{4}f\overset{+++}{F}{}^{abc}\overset{-++}{F}{}^d{}_{bc}\overset{+-}{\Lambda}{}_{ad}\\
&\sim -\frac{1}{4}\overset{++}{\Lambda}{}_{bc}f(\overset{+}{E}_a{}^N-\overset{+}{F}_a)\overset{+++}{F}{}^{abc}+\frac{1}{4}f\overset{+++}{F}{}^{abc}\overset{-++}{F}{}^d{}_{bc}\overset{+-}{\Lambda}{}_{ad}\ ,
\end{aligned}
\tag{401}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^{(E)}(-\frac{1}{8}f\overset{-++}{F}{}^{dbc}\overset{-++}{F}{}_{dbc}) &= \frac{1}{4}f\overset{-++}{F}{}^{dbc}\overset{-}{E}_d{}^N\partial_N\overset{++}{\Lambda}{}_{bc}+\frac{1}{2}f\overset{+-+}{F}{}^{adc}\overset{+}{E}_c{}^N\partial_N\overset{+-}{\Lambda}{}_{ad}\\
&\quad -\frac{1}{4}f\overset{+++}{F}{}^{abc}\overset{-++}{F}{}^d{}_{bc}\overset{+-}{\Lambda}{}_{ad}+\frac{1}{2}f\overset{++-}{F}{}^{abc}\overset{-+-}{F}{}^d{}_{bc}\overset{+-}{\Lambda}{}_{ad}\\
&\sim -\frac{1}{4}\overset{++}{\Lambda}{}_{bc}f(\overset{-}{E}_d{}^N\partial_N-\overset{-}{F}_d)\overset{-++}{F}{}^{dbc}-\frac{1}{2}\overset{+-}{\Lambda}{}_{ad}f(\overset{+}{E}_c{}^N\partial_N-\overset{+}{F}_c)\overset{+-+}{F}{}^{adc}\\
&\quad -\frac{1}{4}f\overset{+++}{F}{}^{abc}\overset{-++}{F}{}^d{}_{bc}\overset{+-}{\Lambda}{}_{ad}+\frac{1}{2}f\overset{++-}{F}{}^{abc}\overset{-+-}{F}{}^d{}_{bc}\overset{+-}{\Lambda}{}_{ad}\ ,
\end{aligned}
\tag{402}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta^{(E)}(-\frac{1}{2}\overset{+}{E}{}_a^N\partial_N\overset{+}{F}{}^a) \\
=\ & \frac{1}{2}f\overset{-}{E}{}_d^N\partial_N\overset{+}{F}_a\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}+\frac{1}{2}f\overset{+}{E}{}_a^N\overset{+}{F}_b\partial_N\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}+\frac{1}{2}f\overset{+}{E}{}_a^N\partial_N\overset{-}{F}_d\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}+\frac{1}{2}f\overset{-}{F}_d\overset{+}{E}{}_a{}^N\partial_N\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad} \\
& -\frac{1}{2}f\overset{+}{E}{}_a^N\partial_N\overset{+}{E}{}_b^M\partial_M\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}-\frac{1}{2}f\overset{+}{E}{}_a^N\partial_N\overset{-}{E}{}_d^M\partial_M\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}-\frac{1}{2}f\overset{+}{E}{}_a^M\overset{-}{E}{}_d^N\partial_M\partial_N\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad} \\
\sim\ & f\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}\overset{+}{E}{}_b^N\partial_N\overset{+}{F}_a+f\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\overset{-}{E}{}_d^N\partial_N\overset{+}{F}_a\ ,
\end{aligned}
\tag{403}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^{(E)}(\frac{1}{4}f\overset{+}{F}_a\overset{+}{F}{}^a) &= -\frac{1}{2}f\overset{+}{F}_a\overset{-}{F}_d\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}+\frac{1}{2}f\overset{+}{F}_a\overset{+}{E}{}_b^N\partial_N\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}+\frac{1}{2}f\overset{+}{F}_a\overset{-}{E}{}_d^N\partial_N\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad} \\
&\sim -\frac{1}{2}f\overset{+}{E}{}_b^N\partial_N\overset{+}{F}_a\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}-\frac{1}{2}f\overset{-}{E}{}_d^N\partial_N\overset{+}{F}_a\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\ ,
\end{aligned}
\tag{404}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^{(E)}(\frac{1}{8}\overset{+++}{\phi'}{}_{abc}\overset{+++}{\phi'}{}^{abc}) &= -\frac{1}{4}f\overset{+++}{\phi'}{}_{ab}{}^c\overset{+}{E}{}_c^N\partial_N\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}-\frac{1}{2}f\overset{+++}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-++}{\phi'}{}_{dbc}\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad} \\
&\sim \frac{1}{4}f(\overset{+}{E}{}_c^N\partial_N-\overset{+}{F}_c)\overset{+++}{\phi'}{}_{ab}{}^c\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}-\frac{1}{2}f\overset{+++}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-++}{\phi'}{}_{dbc}\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\ ,
\end{aligned}
\tag{405}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^{(E)}(\frac{1}{8}\overset{++-}{\phi'}{}_{abc}\overset{++-}{\phi'}{}^{abc}) &= -\frac{1}{4}f\overset{++-}{\phi'}{}_{ab}{}^c\overset{-}{E}{}_c^N\partial_N\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}-\frac{1}{2}f\overset{++-}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-+-}{\phi'}{}_{dbc}\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad} \\
&\sim \frac{1}{4}f(\overset{-}{E}{}_c^N\partial_N-\overset{-}{F}_c)\overset{++-}{\phi'}{}_{ab}{}^c\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}-\frac{1}{2}f\overset{++-}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-+-}{\phi'}{}_{dbc}\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\ ,
\end{aligned}
\tag{406}
$$

以上の計算結果をまとめると，

$$
\begin{aligned}
&\delta^{(E)}\Big(c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}L^+\Big) \\
=\ & c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d} \\
&\Big[-\frac{1}{4}\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}\Big((\overset{+}{E}{}_c^N\partial_N-\overset{+}{F}_c)\overset{+++}{F}{}_{ab}{}^c+(\overset{-}{E}{}_c^N\partial_N-\overset{-}{F}_c)\overset{++-}{F}{}_{ab}{}^c \\
&+2\overset{+}{E}{}_{[a}^N\partial_N\overset{+}{F}_{b]}-(\overset{+}{E}{}_c^N\partial_N-\overset{+}{F}_c)\overset{+++}{\phi'}{}_{ab}{}^c-(\overset{-}{E}{}_c^N\partial_N-\overset{-}{F}_c)\overset{++-}{\phi'}{}_{ab}{}^c\Big) \\
&+\frac{1}{2}\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\Big(\overset{++-}{F}{}_a{}^{bc}\overset{-+-}{F}{}_{dbc}-(\overset{+}{E}{}_c^N\partial_N-\overset{+}{F}_c)\overset{+-+}{F}{}_{ad}{}^c+\overset{-}{E}{}_d^N\partial_N\overset{+}{F}_a-\overset{+++}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-++}{\phi'}{}_{dbc}-\overset{++-}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-+-}{\phi'}{}_{dbc}\Big)\Big] \\
=\ & c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\Big[-\frac{1}{4}\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}\overset{++}{\mathcal{B}}{}_{ab} \\
&+\frac{1}{2}\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\Big(\overset{++-}{F}{}_a{}^{bc}\overset{-+-}{F}{}_{dbc}-(\overset{+}{E}{}_c^N\partial_N-\overset{+}{F}_c)\overset{+-+}{F}{}_{ad}{}^c+\overset{-}{E}{}_d^N\partial_N\overset{+}{F}_a-\overset{+++}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-++}{\phi'}{}_{dbc}-\overset{++-}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-+-}{\phi'}{}_{dbc}\Big)\Big] \\
=\ & c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d} \\
&\frac{1}{2}\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\Big(\overset{++-}{F}{}_a{}^{bc}\overset{-+-}{F}{}_{dbc}-(\overset{+}{E}{}_c^N\partial_N-\overset{+}{F}_c)\overset{+-+}{F}{}_{ad}{}^c+\overset{-}{E}{}_d^N\partial_N\overset{+}{F}_a-\overset{+++}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-++}{\phi'}{}_{dbc}-\overset{++-}{\phi'}{}_a{}^{bc}\overset{-+-}{\phi'}{}_{dbc}\Big)\ .
\end{aligned}
\tag{407}
$$

と得られる．ここで $\overset{++}{\mathcal{B}}{}_{ab}$(282) は一般化 Lichnerowicz 公式で現れる係数で $\overset{++}{\mathcal{B}}{}_{ab}=0$ である．

ここまでの計算を $+ \leftrightarrow -$ と入れ替えても同様に成り立つから，

$$
\begin{aligned}
&\delta^{(E)}\Big(c_0 \int dX \sqrt{\det\eta} e^{-2d} L^{-}\Big) \\
= \ & c_0 \int dX \sqrt{\det\eta} e^{-2d} \\
& \frac{1}{2} \overset{-+}{\Lambda}{}^{ad}\Big(\overset{--+}{F}{}_{a}{}^{bc} \overset{+-+}{F}{}_{dbc} - (\overset{-}{E}{}_c^N \partial_N - \overset{-}{F}{}_c) \overset{-+-}{F}{}_{ad}{}^{c} + \overset{+}{E}{}_d^N \partial_N \overset{-}{F}{}_a - \overset{---}{\phi'}{}_{a}{}^{bc} \overset{+--}{\phi'}{}_{dbc} - \overset{--+}{\phi'}{}_{a}{}^{bc} \overset{+-+}{\phi'}{}_{dbc} \Big) \ . \\
= \ & -c_0 \int dX \sqrt{\det\eta} e^{-2d} \\
& \frac{1}{2} \overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\Big(\overset{--+}{F}{}_{d}{}^{bc} \overset{+-+}{F}{}_{abc} - (\overset{-}{E}{}_c^N \partial_N - \overset{-}{F}{}_c) \overset{-+-}{F}{}_{da}{}^{c} + \overset{+}{E}{}_a^N \partial_N \overset{-}{F}{}_d - \overset{---}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} \overset{+--}{\phi'}{}_{abc} - \overset{--+}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} \overset{+-+}{\phi'}{}_{abc} \Big) \ .
\end{aligned}
\tag{408}
$$

を得る．

これらの計算を用いて，作用 S_{DFT}(376) の変分を導出すれば

$$
\begin{aligned}
\delta^{(E)} S_{DFT} \ = \ & -2 \int dX \sqrt{\det\eta} e^{-2d} \overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\Big(2 \overset{++-}{F}{}_{abc} \overset{-+-}{F}{}_{d}{}^{bc} - (\overset{+}{E}{}_c^N \partial_N - \overset{+}{F}{}_c) \overset{+-+}{F}{}_{ad}{}^{c} \\
& + (\overset{-}{E}{}_c^N \partial_N - \overset{-}{F}{}_c) \overset{+--}{F}{}_{ad}{}^{c} + \overset{-}{E}{}_d^N \partial_N \overset{+}{F}{}_a + \overset{+}{E}{}_a^N \partial_N \overset{-}{F}{}_d \\
& - \overset{+++}{\phi'}{}_{abc} \overset{-++}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} - \overset{++-}{\phi'}{}_{abc} \overset{-+-}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} - \overset{+-+}{\phi'}{}_{abc} \overset{--+}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} - \overset{+--}{\phi'}{}_{abc} \overset{---}{\phi'}{}_{d}{}^{bc} \Big) \ ,
\end{aligned}
\tag{409}
$$

を得る．Ricci テンソル (387) を用いれば，

$$
\delta^{(E)} S_{DFT} \ = \ -2 \int dX \sqrt{\det\eta} e^{-2d} \overset{+-}{\Lambda}{}^{ad} \overset{+-}{\mathcal{R}}{}_{ad} \ , \tag{410}
$$

となる．したがって，一般化多脚場により得られる運動方程式は Ricci テンソルで書けて，

$$
\overset{+-}{\mathcal{R}}{}_{ad} = 0 \ , \tag{411}
$$

とまとまる．また，この変分は $\overset{++}{\Lambda}{}^{ab}$, $\overset{--}{\Lambda}{}^{ab}$ の寄与が消えている．即ち，作用 S_{DFT} が $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変であることを顕わに確かめられた．

作用 S_{DFT} の一般化ディラトンによる変分　次にディラトンによる変分を考える．ディラトンの変分によって，各構造係数は

$$
\begin{aligned}
\delta^{(d)} F_{ABC} &= 0 && (412) \\
\delta^{(d)} \phi'_{ABC} &= 0 && (413) \\
\delta^{(d)} F_A &= 2\rho(E_A)(\delta d) \ , && (414)
\end{aligned}
$$

と変換する．ディラトンの変分に関しては測度も変換を受ける．

$$
\delta^{(d)}(dX \sqrt{\det\eta} e^{-2d})(-2\delta d) = dX \sqrt{\det\eta} e^{-2d} (-2\delta d) \ . \tag{415}
$$

このディラトンの変分を多脚場の時と同様に $c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}L^+$ に対して適用する．

$$\begin{aligned}&\delta^{(d)}\Big(c_0\int d^{2D}x\sqrt{\det\eta}e^{-2d}L^+\Big)\\
=\ &\int d^{2D}xf(-2\delta d)\Big(-\frac{1}{24}\overset{+++}{F}{}_{abc}\overset{+++}{F}{}^{abc}-\frac{1}{8}\overset{-++}{F}{}^{abc}\overset{-++}{F}{}_{abc}-\frac{1}{2}\rho(\overset{+}{E}_a)(\overset{+}{F}{}^a)+\frac{1}{4}\overset{+}{F}_a\overset{+}{F}{}^a\\
&+\frac{1}{8}\overset{+++}{\phi'}{}_{abc}\overset{+++}{\phi'}{}^{abc}+\frac{1}{8}\overset{++-}{\phi'}{}_{abc}\overset{++-}{\phi'}{}^{abc}\Big)\\
&+\int d^{2D}xf\Big(-\frac{1}{2}\rho(\overset{+}{E}_a)(2\rho(\overset{+}{E}{}^a)(\delta d))+\frac{1}{2}\overset{+}{F}_a\rho(\overset{+}{E}{}^a)(2\delta d)\Big)\\
=\ &c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}(-2\delta d)L^+\ .\end{aligned}\tag{416}$$

同様に，$c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}L^-$ についても

$$\begin{aligned}&\delta^{(d)}\Big(c_0\int d^{2D}x\sqrt{\det\eta}e^{-2d}L^-\Big)\\
=\ &c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}(-2\delta d)L^-\ ,\end{aligned}\tag{417}$$

を得る．故に，ディラトンの変分を二重場理論の作用 S_{DFT} に行えば，

$$\delta^{(d)}S_{DFT}=\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\delta d(8L^+-8L^-)\ .\tag{418}$$

を得る．Ricci スカラー (388) を用いれば単純に

$$\delta^{(d)}S_{DFT}=-\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}(\delta d)\mathcal{R}\ .\tag{419}$$

とまとめられる．よって，ディラトンの運動方程式は

$$\mathcal{R}=0\ ,\tag{420}$$

で与えられる．

以上，この節の結果をまとめる．

二重場理論の運動方程式

二重場理論の作用 S_{DFT} の変分 $\delta E_A=E_B\Lambda^B{}_A,\delta d$ を実行すれば，Ricci テンソル $\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ad}$(387) と Ricci スカラー $\mathcal{R}$(388) を用いて

$$\delta S_{DFT}=\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\Big(-2\overset{+-}{\Lambda}{}^{ad}\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ad}-\delta d\mathcal{R}\Big)\ ,\tag{421}$$

となる．この計算から作用の $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変性が顕わに確かめられた．運動方程式は

$$\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ad}=0\ ,\ \mathcal{R}=0\ ,\tag{422}$$

で得られる．

この運動方程式に 5.9 節で導入した Ricci テンソルと Ricci スカラーが現れている．このことは Riemann テンソルが上手く定義できていることを示唆している．

5.11 ゲージ変換と作用のゲージ不変性の必要条件

5.10 節で運動方程式を導出するために，作用の一般の変分を行った．ここでは，一般化 Lie 微分によるゲージ変換によって二重場理論の作用 S_{DFT} が不変に保たれる条件を与える．ベクトル $V \in T\mathbb{M}$ を用いて，ゲージ変換は次で定義される．

$$\begin{aligned} \delta_V E_A &= [V, E_A] = E^B(\partial_B V_A - \partial_A V_B - V^C F_{CBA}) \,, \\ \delta_V d &= -\frac{1}{2}(\partial_A - F_A)V^A \,. \end{aligned} \tag{423}$$

ディラトンのゲージ変換性は (310) で既に議論した．5.10 節で用いた変分の計算を用いるには

$$\begin{aligned} \Lambda_{BA} &\to \partial_B V_A - \partial_A V_B - V^C F_{CBA} \,, \\ \delta d &\to -\frac{1}{2}(\partial_A - F_A)V^A \,, \end{aligned} \tag{424}$$

と置き換えればよい．実際にゲージ変換性を実行する．

$$\begin{aligned} \delta_V S_{DFT} &= \int dX \sqrt{\det\eta}\, e^{-2d} \\ &\quad \Big(-2(\overset{+}{\partial}_a \overset{-}{V}_b - \overset{-}{\partial}_b \overset{+}{V}_a - \overset{+}{V}{}^c \overset{++-}{F}{}_{cab} - \overset{-}{V}{}^c \overset{-+-}{F}{}_{cab}) \overset{+-}{\mathcal{R}}_{ad} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_A - F_A)V^A \mathcal{R} \Big) \\ &= \int dX \sqrt{\det\eta}\, e^{-2d} \\ &\quad \Big[-2\overset{+}{V}{}^c \Big((\overset{-}{\partial}_b - \overset{-}{F}_b) \overset{+-}{\mathcal{R}}{}_c{}^b - \overset{++-}{F}{}_{cab} \overset{+-}{\mathcal{R}}{}^{ab} + \frac{1}{4}\overset{+}{\partial}_c \mathcal{R} \Big) \\ &\quad + 2\overset{-}{V}{}^c \Big((\overset{+}{\partial}_a - \overset{+}{F}_a) \overset{+-}{\mathcal{R}}{}^a{}_c + \overset{-+-}{F}{}_{cab} \overset{+-}{\mathcal{R}}{}^{ab} - \frac{1}{4}\overset{-}{\partial}_c \mathcal{R} \Big) \Big] \,. \end{aligned} \tag{425}$$

一般に $\delta_V S_{DFT} \neq 0$ であるから，ゲージ変換によって二重場理論は不変ではない．ただし，二重場理論の作用は強い拘束条件の下で標準的な二重は理論 S_{sDFT} と一致するから，強い拘束条件の下でゲージ不変性が従う．

$$\delta_V S_{DFT} = 0 \text{ (強い拘束条件の下)} \,. \tag{426}$$

二重場理論の構成 (376) にはゲージ不変性は不要である．よって，ゲージ不変性が作用 S_{DFT} に存在していなくても問題ない．本節の結果をまとめる．

ゲージ不変性のための必要十分条件

作用 S_{DFT} のゲージ不変性のための必要十分条件はゲージパラメータ $V \in T\mathbb{M}$ を用いて

$$\begin{aligned} 0 &= \int dX \sqrt{\det\eta}\, e^{-2d} \\ &\quad \Big[-2\overset{+}{V}{}^c \Big((\overset{-}{\partial}_b - \overset{-}{F}_b) \overset{+-}{\mathcal{R}}{}_c{}^b - \overset{++-}{F}{}_{cab} \overset{+-}{\mathcal{R}}{}^{ab} + \frac{1}{4}\overset{+}{\partial}_c \mathcal{R} \Big) \\ &\quad + 2\overset{-}{V}{}^c \Big((\overset{+}{\partial}_a - \overset{+}{F}_a) \overset{+-}{\mathcal{R}}{}^a{}_c + \overset{-+-}{F}{}_{cab} \overset{+-}{\mathcal{R}}{}^{ab} - \frac{1}{4}\overset{-}{\partial}_c \mathcal{R} \Big) \Big] \,, \end{aligned} \tag{427}$$

と書くことができる．ただし，二重場理論にはゲージ不変性を要請していないため，この条件を課す必要はない．

5.12　5章のまとめ

最後に既存の研究と本章の結果の違いをまとめる．本章では，二重場理論の構成を3つの要請をもとに行った．それぞれの要請と役割は次の通り．

- Buscher 則により共変．
  - 座標の入れ替えによって理論が不変になるように $2D$ 次元の座標空間を導入した．
- $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換により不変．
  - この要請が最も重要である．$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変な作用を構成するために共変な微分演算子を構成し，作用を $I(\beta_+,\beta_-)$ の形まで決定した．
- WZW 二重場理論を含む．
  - 作用に含まれる定数 $\beta_\pm$ を決定した．

最後の仮定は WZW 二重場理論を参照しているが，理論に含まれる2つの定数を選ぶことにしか使われていないから，作用 S_{DFT} は基本的に2つ目の $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変性により決定されている．作用の具体的な形は

$$
\begin{aligned}
S_{DFT} \quad = \quad & \int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\Big[\frac{1}{4}F_{ABC}F_{A'B'C'}\eta^{AA'}\eta^{BB'}H^{CC'} \\
& -\frac{1}{12}F_{ABC}F_{A'B'C'}H^{AA'}H^{BB'}H^{CC'} \\
& +2\rho(E_A)(F_{A'})H^{AA'}-F_AF_{A'}H^{AA'} \\
& -\frac{1}{2}\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'}{}^{C}\eta^{AA'}H^{BB'}\Big]\,,
\end{aligned} \tag{428}
$$

で与えられる．この新たな二重場理論と従来の二重場理論の重要な相違点をまとめる．

- 従来の二重場理論は全てゲージ不変性とゲージ代数の閉包条件を第一原理として構成されており，作用の外から手で拘束条件を課す必要があった．それに対して，本章の構成法ではゲージ不変性を要請していないため，その様な拘束条件を課す必要がなくなった．この違いは6章で述べる二重場理論上のT双対性を議論する上で非常に重要な役割を果たす．
- これまで，定数ではない $O(D,D)$ 計量 η_{MN} を用いた二重場理論として WZW 二重場理論が提案されていた．しかし，WZW 二重場理論は特殊な η_{MN}(358) でのみ構成されており，一般の η_{MN} で適用可能か理解されていなかった．一方で，本章で構成した二重場理論は初めから η_{MN} の具体的な形を与えずに作用が決定されているため，一般の η_{MN} に対して適用可能であることが明らかである．
- WZW 二重場理論は摂動の3次までを使って，作用を構成する．そのため，より高次の摂動を計算した場合に新たな補正項を必要とする可能性があった．一方で，本章の構成法は摂動を用いずに理論を構成できているから新たな補正項が現れることはない．
- 従来の二重場理論は一般化ディラトンをウェイト付きのスカラーとして定義し，その変換性を通常のウェイト付きの Lie 微分と同じに取っていた．このように定義する根拠は十分に議論されておらず，超重力理論からの類推に過ぎなかった．そのため，一般化ディラトンの代数的な性質は明らかになっていなかった．一方で，本章における二重場理論の構成方法では

一般化ディラトンが発散の自由度として導入され，その変換性はスピノルの一般化 Lie 微分によって定義される．そのため，$O(D, D)$ 計量 η_{MN} が一般の関数となるような場合においてもディラトンの性質を自然に定義することができる．

これらの相違点は (366) の下で述べた WZW 二重場理論の問題点を解決するものである．

6　二重場理論の応用-T 双対性の導出-

5 章で拘束条件がなく，$O(D,D)$ 計量 η_{MN} が関数になる場合にも適用可能な新しい二重場理論を導入した．本章では，その応用として非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性が二重場理論の座標変換として実現できることを示す．

先行研究 [25] では WZW 二重場理論上により Poisson-Lie T 双対性を導出しようと試みられているが，二重場理論の閉包条件が座標変換で双対な理論に変換されないため，満足のいく導出を与えることができていない．実際，以下で説明するように，先行研究 [25] の論理では Poisson-Lie T 双対性で現れる背景時空の一方が超重力理論の解になっていたとしても，もう一方が解になるとは限らない．

先行研究 [25] の問題点　ここでは先行研究 [25] における Poisson-Lie T 双対性の議論の問題点を示す．まず，先行研究 [25] における論理を説明する．先行研究 [25] の議論は以下の (A)∼(D) の手順に従って行われる．

- (A) Drinfel'd Double $\mathcal{D}=\mathcal{G}\bowtie\bar{\mathcal{G}}$ を持つ空間上で WZW 二重場理論を構成する．ただし，$\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ はユニモジュラーである．
- (B) x 座標を持つ理論の構成．
  - (B1) 座標を $l(X)=\bar{g}(\bar{x})g(x)\in\mathcal{D}$ と置く．この座標上で物理的な場 U,d が x 依存性のみを持つことを仮定する．即ち，拘束条件 $\frac{\partial}{\partial\bar{x}_m}U=\frac{\partial}{\partial\bar{x}_m}d=0$ を満たす．
  - (B2) この理論が $(U(x),d(x))=(U_0,d_0)$:定数を解に持つことを仮定する．
  - (B3) このとき $U(x),d(x)$ に対する運動方程式は，場の再定義により $\hat{G}(x),\hat{B}(x),\hat{\phi}(x)$ に対する超重力理論の運動方程式と等価であることが示される．
  - (B4) よって，(U_0,d_0) から超重力理論の解 $(\star)$ を作ることができる[4]．

$$\begin{aligned}(\hat{G}+\hat{B})_{mn} &= \left(L^{-1}\frac{1}{\frac{1}{G_0+B_0}+\Pi}L^{-T}\right)_{mn},\\ \hat{\phi} &= d_0-\frac{1}{2}\log\det(1+(G_0+B_0)\Pi)+\frac{1}{4}\log\det G_0\ .\end{aligned}\qquad\cdots(\star)$$

- (C) $\bar{x}'$ 座標を持つ理論の構成．
  - (C1)$l(X(X'))=g(x')\bar{g}(\bar{x}')$ を満たすように座標変換を行う．この座標上で物理的な場 U,d が $\bar{x}'^m$ 依存性のみを持つことを仮定する．即ち，拘束条件 $\frac{\partial}{\partial x'^m}U=\frac{\partial}{\partial x'^m}d=0$ を満たす．
  - (C2) この理論が $(U(\bar{x}'),d(\bar{x}'))=(U_0,d_0)$:定数を解に持つことを仮定する．
  - (C3) このとき $U(\bar{x}'),d(\bar{x}')$ に対する運動方程式は，場の再定義により $\check{G}(\bar{x}'),\check{B}(\bar{x}'),\check{\phi}(\bar{x}')$ に対する超重力理論の運動方程式と等価であることが示される．

[4] L,Π などの定義は全て 3.4 節におけるものと同一である．

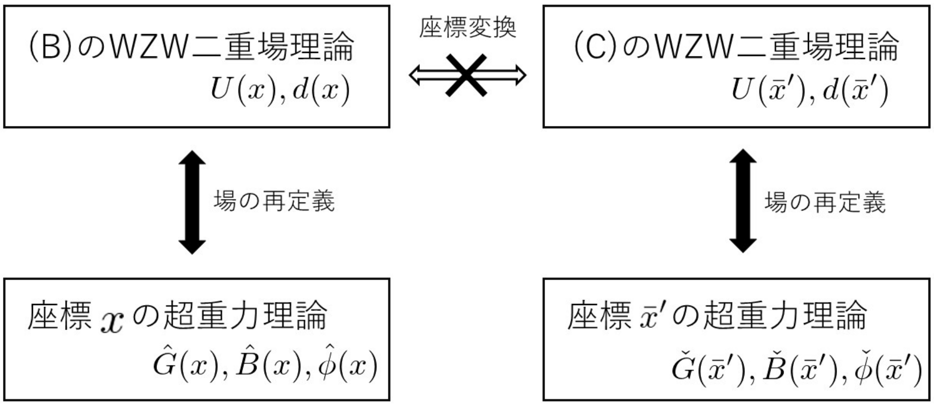

図 1: [25] における Poisson-Lie T 双対性の提案

– (C4) よって，(U_0, d_0) から超重力理論の解 $(\star\star)$ を作ることができる．

$$\begin{aligned}
(\check{G}+\check{B})^{mn} &= \left(\bar{L}^{-1}\frac{1}{G_0+B_0+\bar{\Pi}}\bar{L}^{-T}\right)^{mn}, \\
\check{\phi} &= d_0 - \frac{1}{2}\log\det(1+(G_0+B_0)\bar{\Pi}) + \frac{1}{4}\log\det G_0 \\
& \qquad \cdots(\star\star)
\end{aligned}$$

- (D) ここで得られた 2 つの超重力理論の解 $(\star)(\star\star)$ は Poisson-Lie T 双対性で得られる背景場と同じ形をしている．このことから二重場理論上の Poisson-Lie T 双対性であると提案する．

今，(B) の座標 X と (C) の座標 X' は座標変換 $X(X')$ の関係で与えられている．そのため，(B) の理論の解 (U_0, d_0) にも座標変換を行って (U_0, d_0) を得れば，(C) の理論の解が得られることが期待される．しかし，これは一般に正しくない．なぜなら，座標変換 $X(X')$ によって，(B) の拘束条件 $\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_m}U = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_m}d = 0$ が (C) の拘束条件 $\frac{\partial}{\partial x'^m}U = \frac{\partial}{\partial x'^m}d = 0$ に変換されないためである．即ち，(B) の理論に座標変換をしても (C) の理論は得られない．したがって，一般に (B2)(C2) における二重場理論の解の要請は互いに異なる条件を与える (図 1)．

以上の議論より (B2) の要請を満たして (C2) の要請を満たさないような (U_0, d_0) が存在してもよく，その様な場合には $(\star)$ のみが超重力理論の解で $(\star\star)$ が超重力理論の解にならない．そのため，Poisson-Lee T 双対性の主張である "一方 $(\star)$ が超重力理論の解ならば，他方 $(\star\star)$ も超重力理論の解になる" ということが [25] の方法では示されてはいないという問題点を持つ．

本章における非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性の導出方法　先行研究 [25] の問題点を解決する方法を考える．上の議論を振り返れば，(B)(C) の対応が座標変換で理解できれば (B2)(C2) の条件は (U_0, d_0) に対して同じ条件を与えることが証明できる．その障害となるのが (B) の拘束条件 $\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_m}U = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_m}d = 0$ と (C) の拘束条件 $\frac{\partial}{\partial x'^m}U = \frac{\partial}{\partial x'^m}d = 0$ であった．そこで，本章では 5 で議論した拘束条件が存在しない二重場理論を用いて Poisson-Lie T 双対性の議論を行う．ただし，拘束条件をなくすと (B)(C) それぞれの二重場理論と超重力理論が一般に等価にならないことに注意しなければならない．そのため，理論全体の等価性ではなく，超重力理論の解と二重場

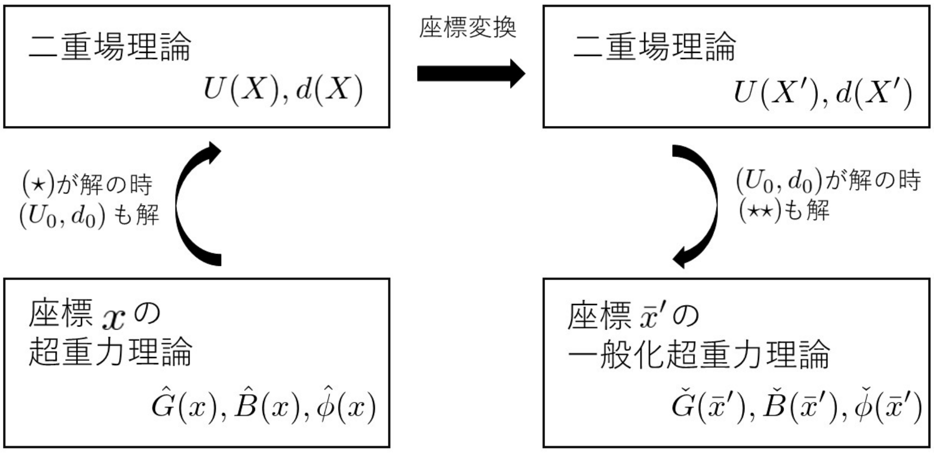

図 2: 拘束条件のない二重場理論による Poisson-Lie T 双対性の導出

理論の解の対応に注目して議論を行う．即ち，超重力理論の解 ($\star$) が得られたとき，(U_0, d_0) が二重場理論の解になることと座標変換後の二重場理論の解 (U_0, d_0) が得られたとき，($\star\star$) が一般化超重力理論の解になることを示す (図 2)．($\star\star$) が超重力理論の解から一般化超重力理論の解に拡張されているのは本章の議論が群 $\mathcal{G}$ がユニモジュラーでない場合にも拡張できるためであり，その様な場合には ($\star\star$) が一般化超重力理論の解になることが示される．

本章では次の 2 つを示す．

- 非アーベル的 T 双対性が二重場理論の座標変換であること．
  - 群 $\mathcal{G}$ 上で作られる超重力理論の解を考えたとき非アーベル的 T 双対性によって一般化超重力理論の解が得られることを示す．特に，$\mathcal{G}$ がユニモジュラーの時，超重力理論の解が得られる．
- Poisson-Lie T 双対性が二重場理論の座標変換であること．
  - 群 $\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \bar{\mathcal{G}}$ 上で構成される Poisson-Lie T 双対性を考えた時に，$\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}$ がユニモジュラーなら，超重力理論の解同士が結び付くことを示す．

二重場理論における T 双対性の導出の手順は次の通り．

二重場理論における T 双対性の導出

- 座標 x を持つ D 次元理論の解が Drinfel'd Double 上の二重場理論の解になることを示す．
- $2D$ 次元上の座標変換によって二重場理論の解を変換する．
- 座標変換後の二重場理論の解が座標 $\bar{x}'$ を持つ D 次元理論の解になることを示す．

この手順によって x 座標の D 次元理論の解から $\bar{x}'$ 座標の D 次元理論の解が得られる．その結果，非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性が導出できる．本章ではまず，Drinfel'd Double 上の二重場理論を構成し，その後で D 次元理論の解から解への対応として非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性を導出する．

6.1 Drinfel'd Double 上の二重場理論の構成

この節では Drinfel'd Double 上の二重場理論を構成する．2.1.1 節で与えたように，Drinfel'd Double $\mathcal{D}$ の Lie 代数 $\mathfrak{d}$ の基底を $\{T_A\}$ で与える．

$$
\begin{aligned}
[T_A, T_B] &= \bar{F}'_{AB}{}^C T_C \ , \\
[T_a, T_b] &= f_{ab}{}^c T_c \ , \ [T_a, T^b] = \bar{f}^{bc}{}_a T_c - f_{ac}{}^b T^c \ , \ [T^a, T^b] = \bar{f}^{ab}{}_c T^c \ , \\
\langle T_A, T_B \rangle &= \eta_{AB} \ .
\end{aligned} \tag{429}
$$

部分代数を $\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{T_a\}$, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathrm{span}\{T^a\}$ で与えて，$\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}$ から生成される Lie 群をそれぞれ $\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}$ と書く．この $\mathcal{D}, \mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}$ の関係を

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \bar{\mathcal{G}} \ , \tag{430}$$

と書く．それぞれの Lie 群の元は座標 $(x^m, \bar{x}_m)$ を用いて

$$l(x^m, \bar{x}_m) \in \mathcal{D} \ , \ g(x^m) \in \mathcal{G} \ , \ \bar{g}(\bar{x}_m) \in \bar{\mathcal{G}} \ , \tag{431}$$

と与えられる．この時,

$$l^{-1} dl = \bar{E}^{-1}{}_M{}^A dX^M T_A \ , \tag{432}$$

と置けば $\bar{E}_A = \bar{E}_A{}^M \partial_M$ に対して

$$[\bar{E}_A, \bar{E}_B]_L = \bar{F}'_{AB}{}^C \bar{E}_C \ , \tag{433}$$

を得る．この定義から $\bar{E}_A{}^M$ は群の元 l の関数になっている．

$$\bar{E}_A{}^M = \bar{E}_A{}^M(l(X)) \tag{434}$$

この基底 $\bar{E}_A$ に対して計量亜代数の括弧 $[\cdot,\cdot]$ を定義する．基底に対して Lie 括弧の構造定数 $F'_{AB}{}^C$ を用いて

$$[\bar{E}_A, \bar{E}_B] = \bar{F}'_{AB}{}^C \bar{E}_C \ , \tag{435}$$

と与える．即ち，基底 $\bar{E}_A$ 上で $\bar{\phi}'_{AB}{}^C = 0$ と取る．$\mathcal{L}'$(380) を用いて書けば

$$\mathcal{L}'(\bar{E}_A, \bar{E}_B) = [\bar{E}_A, \bar{E}_B] - [\bar{E}_A, \bar{E}_B]_L = \bar{\phi}'_{AB}{}^C \bar{E}_C = 0 \ . \tag{436}$$

となる．局所ローレンツ基底 E_A は

$$E_A = U_A{}^B(X) \bar{E}_B \ , \tag{437}$$

によって与えられる．この局所ローレンツ基底 E_A 上で定義される構造係数は

$$F_{ABC} = \langle [E_A, E_B], E_C \rangle \ , \tag{438}$$

$$\phi'_{ABC} = \langle \mathcal{L}'(E_A, E_B), E_C \rangle \ , \tag{439}$$

$$F_A = \phi'_{BA}{}^B + 2\rho(E_A)(d) \ , \tag{440}$$

で与えられる．また，測度は $(\det U_A{}^B)^2 = 1$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\mu &= dX \sqrt{\det \eta} e^{-2d} \\
&= dX \det(E^{-1}{}_M{}^A) e^{-2d} \\
&= dX \det(\bar{E}^{-1}{}_M{}^A) e^{-2d} \\
&= (l^{-1}dl)^1 \wedge (l^{-1}dl)^2 \wedge \cdots \wedge (l^{-1}dl)^{2D} e^{-2d} \ ,
\end{aligned} \tag{441}
$$

である．ここで $(l^{-1}dl)^A$ は

$$l^{-1}dl = (l^{-1}dl)^A T_A = E^{-1}{}_M{}^A(l) dX^M T_A \ , \tag{442}$$

で定義される．以上の結果から作用に用いられる構造係数は全て $\bar{E}_A{}^M(l(X)), U_A{}^B(X), d(X)$ の関数になっている．

$$\begin{aligned} F_{ABC} &= F_{ABC}\Big(\bar{E}(l(X)), U(X)\Big) \ , \\ \phi'_{ABC} &= \phi'_{ABC}\Big(\bar{E}(l(X)), U(X)\Big) \ , \\ F_A &= F_A\Big(\bar{E}(l(X)), U(X), d(X)\Big) \ , \\ \mu &= \mu\Big(\bar{E}(l(X)), d(X)\Big) \ . \end{aligned} \tag{443}$$

これらの構造係数を用いて作用 S_{DD} は

$$S_{DD} = I(0, 8c_0) \ , \tag{444}$$

と与えられる．ここで S_{DD} を作用に選んだのは後の議論で，自然に超重力理論や一般化超重力理論に簡約するためである．ここでの作用は D 次元理論の解から D 次元理論の解を生成するための道具でしかないため，次の 4 つの性質さえ満たしていればよい．

- $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変性を持つこと．
- 拘束条件がないこと．
- 超重力理論に簡約すること．
- 一般化超重力理論に簡約すること．

前章の議論から $I(\beta_+, \beta_-)$ は初めの 2 つを満たしており，当然，その特殊な場合の S_{DD}(444) も満たしている．

3 つ目の性質は

$$\begin{aligned} \eta_{MN} &= \begin{pmatrix} 0 & \delta^m{}_n \\ \delta_m{}^n & 0 \end{pmatrix} \ , \\ H_{MN} &= \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \ , \\ d &= \phi - \frac{1}{4}\log(\det G) \ , \end{aligned} \tag{445}$$

と場を再定義することによって満たされる．ただし，標準的な二重場理論における場の置き方 (195) に比べて，B 場を $B \mapsto -B$ と置いている．しかし，超重力理論の場合は作用に B 場の 2 次しか含まれないため，この符号の変化は影響しない．よって超重力理論に簡約する条件は 5.7 節で議論したものと変わらず，$-\beta_+ + \beta_- = 8c_0$ であればよい．これは S_{DD}(444) も満たしている．

4 つ目の性質は

$$\begin{aligned} \eta_{MN} &= \begin{pmatrix} 0 & \delta^m{}_n \\ \delta_m{}^n & 0 \end{pmatrix} \ , \\ H_{MN} &= \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \ , \\ d &= \phi - \frac{1}{4}\log(\det G) - I^m \bar{x}_m \ , \end{aligned} \tag{446}$$

と置けば満たされる．ただし，この置き方は標準的な (209) と比べると $(B, I) \to (-B, -I)$ と変更している．しかし，この変換によって一般化超重力理論 (205) は不変であるから，4.6 節の議論と同様に一般化超重力理論が得られる．

以上より S_{DD}(444) は必要な性質を全て満たす．

6.2 Drinfel'd Double 上の作用の簡約 (1)

本節では，T 双対性を与えるための準備として (444) で与えた Drinfel'd Double 上の作用 S_{DD} の座標を具体的に与えて，作用が “ほとんど”D 次元の理論に簡約される様子を見る．ここで “ほとんど” と付けているのは以下で議論するように物理的な場 U, d が $2D$ 次元の座標依存性を持つためである．本節の流れは次の通り．

Drinfel'd Double 上の作用の簡約 (1) の手順

- 新しい基底 $\bar{E}_N$ の導入．
  - 座標を $l(X) = \bar{g}(\bar{x})g(x)$ と置く．
  - 多脚場 $E_A{}^M$ を $O(D, D)$ 部分 $\hat{E}_A{}^M$ と残り $A_M{}^N$ に分割する．
  - 基底 $\bar{E}_M = A_M{}^N \partial_N$ 上の構造係数を求める．
- 作用に用いる構造係数の導出．
  - $\bar{E}_N$ 上の構造係数を求める．
  - 作用を $\hat{E}_A{}^N$ と $\bar{E}_N$ の構造係数で求める．

新しい基底 $\bar{E}_N$ の導入　$l \in \mathcal{D}$ の座標を $l(X) = \bar{g}(\bar{x})g(x)$ と置く．

$$
\begin{aligned}
l^{-1}dl &= g^{-1}\bar{g}^{-1}d(\bar{g}g) \\
&= g^{-1}(\bar{g}^{-1}d\bar{g} + dgg^{-1})g \\
&= g^{-1}(\bar{L}^{-1m}{}_a d\bar{x}_m T^a + R^{-1}{}_m{}^a dx^m T_a)g \\
&= \begin{pmatrix} d\bar{x}_m & dx^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1m}{}_a & \\ & R^{-1}{}_m{}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{-1}T^a g \\ g^{-1}T_a g \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d\bar{x}_m & dx^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1m}{}_a & \\ & R^{-1}{}_m{}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-T a}{}_b & -(a^{-T}\Pi)^{ab} \\ & a_a{}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^b \\ T_b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d\bar{x}_m & dx^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\bar{L}^{-1}a^{-T})^m{}_a & -(\bar{L}^{-1}a^{-T}\Pi)^{ab} \\ & L^{-1}{}_m{}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^b \\ T_b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} d\bar{x}_m & dx^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\bar{L}^{-1}R^{-T})^m{}_n & \\ & \delta_m{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{Tn}{}_a & \\ & L^{-1}{}_n{}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^a{}_b & -\Pi^{ab} \\ & \delta_a{}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^b \\ T_b \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{447}
$$

ここで $L, \Pi, a, \bar{L}$ などの行列は 3.4 節で定義したものと同じである．

故に $\bar{E}^{-1}{}_M{}^A$ は

$$
\bar{E}^{-1}{}_M{}^B = \begin{pmatrix} (\bar{L}^{-1}R^{-T})^m{}_n & \\ & \delta_m{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{Tn}{}_a & \\ & L^{-1}{}_n{}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^a{}_b & -\Pi^{ab} \\ & \delta_a{}^b \end{pmatrix} , \tag{448}
$$

となる．さらに局所ローレンツ基底 E_A と対応づける行列 U を定義する．

$$E_A = U_A{}^B \bar{E}_B \ , \ U_A{}^B = \begin{pmatrix} e^{-T} & 0 \\ eB & e \end{pmatrix} \ . \tag{449}$$

この時，一般化計量を考える．

$$E_M{}^A = \bar{E}_M{}^B U^{-1}{}_B{}^A \ , \tag{450}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
H_{MN} &= E_M{}^A H_{AB} E^B{}_N \\
&= \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1}R^{-T} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^T & \\ & L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\Pi \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ -B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^T & \\ & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & \\ & s \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} e & \\ & e^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & B \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ \Pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \\ & L^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1}\bar{L}^{-T} & \\ & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1}R^{-T} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^T & \\ & L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\Pi \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{-1} & G^{-1}B \\ -BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 1 & \\ \Pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \\ & L^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1}\bar{L}^{-T} & \\ & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1}R^{-T} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{G}^{-1} & \hat{G}^{-1}\hat{B} \\ -\hat{B}\hat{G}^{-1} & \hat{G} - \hat{B}\hat{G}^{-1}\hat{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1}\bar{L}^{-T} & \\ & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{451}$$

となって一般化計量 H_{MN} を得る．ここで

$$\hat{G}_{mn} + \hat{B}_{mn} = L^{-1}{}_m{}^a \Big(\frac{1}{\frac{1}{G+B} + \Pi} \Big)_{ab} L^{-Tb}{}_n \tag{452}$$

であって，Poisson-Lie T-duality で現れる背景時空である．さらに，$\hat{G}, \hat{B}$ に対応した多脚場を $\hat{E}_A{}^M$ と置くことにする．

$$\hat{H}_{MN} = \hat{E}^{-1}{}_M{}^A H_{AB} \hat{E}^{-TB}{}_N = \begin{pmatrix} \hat{G}^{-1} & \hat{G}^{-1}\hat{B} \\ -\hat{B}\hat{G}^{-1} & \hat{G} - \hat{B}\hat{G}^{-1}\hat{B} \end{pmatrix} \ , \tag{453}$$

$$\hat{\eta}_{MN} = \hat{E}^{-1}{}_M{}^A \eta_{AB} \hat{E}^{-TB}{}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{454}$$

さらに，$E_A{}^M, \hat{E}_A{}^M$ を結び付ける $A_M{}^N$ を定義する．

$$E_A{}^M = \hat{E}_A{}^N A_N{}^M \ , \ A_M{}^N = \begin{pmatrix} R^T\bar{L} & \\ & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{455}$$

$\hat{E}_A{}^N$ を用いて，基底 $\bar{E}_N$ を新たに定義する．

$$\bar{E}_N = \hat{E}^{-1}{}_N{}^A E_A = A_N{}^M \partial_M = \begin{pmatrix} R^T\bar{L} & \\ & 1 \end{pmatrix}_N{}^M \partial_M \ . \tag{456}$$

また，$\bar{E}_A$ は座標基底で

$$\partial_M = \bar{E}^{-1}{}_M{}^A \bar{E}_A \ , \tag{457}$$

と書けるから

$$
\begin{aligned}
\bar{E}_N &= A_N{}^M \partial_M \\
&= A_N{}^M \bar{E}_M{}^A \bar{E}_A \\
&= \begin{pmatrix} R^T \bar{L} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1} R^{-T} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^T & \\ & L^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\Pi \\ & 1 \end{pmatrix}_N{}^A \bar{E}_A \\
&= \begin{pmatrix} L^T & -L^T \Pi \\ & L^{-1} \end{pmatrix}_N{}^A \bar{E}_A \ ,
\end{aligned} \tag{458}
$$

が従う．具体的に $\bar{E}_N$ の各成分を書き下せば

$$
\begin{aligned}
\bar{E}^n &= L^{T n}{}_a \bar{E}^a - (L^T \Pi)^{na} \bar{E}_a \ , \\
\bar{E}_n &= L^{-1}{}_n{}^a \bar{E}_a \ , \\
\bar{E}^n &= (R^T \bar{L})^n{}_m \partial^m \ , \\
\bar{E}_n &= \partial_n \ ,
\end{aligned} \tag{459}
$$

を得る．

作用に用いる構造係数の導出　$\bar{E}_N$ の具体的な表式 (459) をもとに基底 $\bar{E}_N$ 上の構造係数を求める．まず，Lie 括弧を計算していく．

$$
\begin{aligned}
[\bar{E}_l, \bar{E}_m]_L &= [L^{-1}{}_l{}^a \bar{E}_a, L^{-1}{}_m{}^b \bar{E}_b]_L \\
&= \partial_l L^{-1}{}_m{}^b \bar{E}_b - \partial_m L^{-1}{}_l{}^a \bar{E}_a + L^{-1}{}_l{}^a L^{-1}{}_m{}^b f_{ab}{}^c \bar{E}_c \\
&= 0 \ .
\end{aligned} \tag{460}
$$

$$
\begin{aligned}
[\bar{E}_l, \bar{E}^m]_L &= [L^{-1}{}_l{}^a \bar{E}_a, L^{T m}{}_b \bar{E}^b - (L^T \Pi)^{mb} \bar{E}_b]_L \\
&= \partial_l L^{T m}{}_b \bar{E}^b - \partial_l (L^T \Pi)^{mb} \bar{E}_b \\
&\quad -(R^T \bar{L})^m{}_{m'} \partial^{m'} L^{-1}{}_l{}^a \bar{E}_a \\
&\quad +L^{-1}{}_l{}^a L^{T m}{}_b (\bar{f}^{bc}{}_a \bar{E}_c - f_{ac}{}^b \bar{E}^c) \\
&\quad -L^{-1}{}_l{}^a (L^T \Pi)^{mb} f_{ab}{}^c \bar{E}_c \\
&= \partial_l L^{T m}{}_b \bar{E}^b - \partial_l L^{T m}{}_b L^{-T b}{}_n (L^T \Pi)^{nc} \bar{E}_c - L^{T m}{}_c \partial_l \Pi^{cb} \bar{E}_b \\
&\quad +L^{-1}{}_l{}^a L^{T m}{}_b \bar{f}^{bc}{}_a \bar{E}_c - L^{-1}{}_l{}^a L^{T m}{}_b f_{ac}{}^b \bar{E}^c \\
&\quad -L^{-1}{}_l{}^a (L^T \Pi)^{mb} f_{ab}{}^c \bar{E}_c \\
&= \partial_l L^{T m}{}_c L^{-T c}{}_n (L^{T n}{}_b \bar{E}^b - (L^T \Pi)^{nc} \bar{E}_c) \\
&\quad -L^{-1}{}_l{}^a L^{T m}{}_b f_{ac}{}^b \bar{E}^c \\
&\quad +(-L^{T m}{}_a \partial_l \Pi^{ac} + L^{-1}{}_l{}^a L^{T m}{}_b \bar{f}^{bc}{}_a - L^{-1}{}_l{}^a (L^T \Pi)^{mb} f_{ab}{}^c) \bar{E}_c \\
&= \partial_l L^{T m}{}_c L^{-T c}{}_n \bar{E}^n \\
&\quad -L^{-1}{}_l{}^a L^{T m}{}_b f_{ac}{}^b (L^{-T c}{}_n \bar{E}^n + (\Pi L)^{cn} \bar{E}_n) \\
&\quad +(-L^{T m}{}_a \partial_l \Pi^{ac} + L^{-1}{}_l{}^a L^{T m}{}_b \bar{f}^{bc}{}_a - L^{-1}{}_l{}^a (L^T \Pi)^{mb} f_{ab}{}^c) L_c{}^n \bar{E}_n \ .
\end{aligned} \tag{461}
$$

ここで $d(g^{-1}\bar{t}^a g) = -[g^{-1}dg, g^{-1}\bar{t}^a g]$ から従う関係式

$$\partial_l \Pi^{ac} = L^{-1}{}_l{}^b(\bar{f}^{ac}{}_b - f_{db}{}^a \Pi^{cd} + f_{db}{}^c \Pi^{cd}) \ , \tag{462}$$

を用いれば

$$[\bar{E}_l, \bar{E}^m]_L = \partial_l L^{Tm}{}_c L^{-Tc}{}_n \bar{E}^n - L^{-1}{}_l{}^a L^{Tm}{}_b f_{ac}{}^b (L^{-Tc}{}_n \bar{E}^n) \ , \tag{463}$$

を得る．

$$\begin{aligned}
[\bar{E}^l, \bar{E}^m]_L &= [L^{Tl}{}_a \bar{E}^a - (L^T\Pi)^{la}\bar{E}_a, L^{Tm}{}_b \bar{E}^b - (L^T\Pi)^{mb}\bar{E}_b]_L \\
&= L^{Tl}{}_a L^{Tm}{}_b \bar{f}^{ab}{}_c \bar{E}^c - L^{Tl}{}_a (L^T\Pi)^{mb}(-\bar{f}^{ac}{}_b \bar{E}_c + f_{bc}{}^a \bar{E}^c) \\
&\quad -(L^T\Pi)^{la} L^{Tm}{}_b (\bar{f}^{bc}{}_a \bar{E}_c - f_{ac}{}^b \bar{E}^c) + (L^T\Pi)^{la}(L^T\Pi)^{mb} f_{ab}{}^c \bar{E}_c \\
&= (\bar{f}^{lm}{}_c - f_{pc}{}^l \Pi^{mp} + f_{kc}{}^m \Pi^{lp})\bar{E}^c \\
&\quad +(\bar{f}^{lc}{}_p \Pi^{mp} - \bar{f}^{mc}{}_p \Pi^{lp} + f_{pq}{}^c \Pi^{lp}\Pi^{mq})\bar{E}_c \\
&= (\bar{f}^{lm}{}_{n'} + 2 f_{n'p}{}^{[l}\Pi^{m]p})\bar{E}^{n'} \\
&\quad +(3 f_{pn'}{}^{[l}\Pi^{m|p}\Pi^{|n]n'} - 3\bar{f}^{[lm}{}_{n'}\Pi^{n]n'})\bar{E}_n \\
&= (\bar{f}^{lm}{}_{n'} + 2 f_{n'p}{}^{[l}\Pi^{m]p})\bar{E}^{n'} \ .
\end{aligned} \tag{464}$$

式が煩雑にならないように $f_{ab}{}^c, \bar{f}^{ab}{}_c, \Pi^{ab}$ の添え字に l, m, n, p, q を使っているものは $L^{Tm}{}_a, L^{-1}{}_m{}^a$ をかけたものとして定義している．例えば

$$f_{kp}{}^c = L^{-1}{}_k{}^a L^{-1}{}_p{}^b f_{ab}{}^c \ , \tag{465}$$

などである．最後の等式は $[g^{-1}\bar{t}^a g, g^{-1}\bar{t}^b g] = g^{-1}[\bar{t}^a, \bar{t}^b]g$ から導出できる

$$3 f_{b'c'}{}^{[a}\Pi^{b|b'}\Pi^{|c]c'} - 3\bar{f}^{[ab}{}_d \Pi^{c]d} = 0 \ , \tag{466}$$

を用いた．以上の計算より Lie 括弧の構造係数が得られた．

$$\begin{aligned}
\bar{F}'{}_{lm}{}^n &= 0 \ , \\
\bar{F}'{}_{lmn} &= 0 \ , \\
\bar{F}'{}_l{}^m{}_n &= \partial_l L_c{}^m L^{-1}{}_n{}^c - L^{-1}{}_l{}^a L_b{}^m f_{ac}{}^b L^{-1}{}_n{}^c \ , \\
\bar{F}'{}_l{}^{mn} &= 0 \ , \\
\bar{F}'^{lm}{}_n &= \bar{f}^{lm}{}_n + 2 f_{np}{}^{[l}\Pi^{m]p} \ , \\
\bar{F}'^{lmn} &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{467}$$

次に $\mathcal{L}'(\bar{E}_L, \bar{E}_M)$ を導出する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(\bar{E}_l, \bar{E}_m) &= \mathcal{L}'(L^{-1}{}_l{}^a \bar{E}_a, L^{-1}{}_m{}^b \bar{E}_b) \\
&= \partial L^{-1}{}_l{}^a \langle \bar{E}_a, L^{-1}{}_m{}^b \bar{E}_b \rangle \\
&= 0 \ .
\end{aligned} \tag{468}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(\bar{E}_l, \bar{E}^m) &= \mathcal{L}'(L^{-1}{}_l{}^a \bar{E}_a, L^{Tm}{}_b \bar{E}^b - (L^T\Pi)^{mb}\bar{E}_b) \\
&= \partial L^{-1}{}_l{}^a \langle \bar{E}_a, L^{Tm}{}_b \bar{E}^b - (L^T\Pi)^{mb}\bar{E}_b \rangle \\
&= \partial L^{-1}{}_l{}^a L^{Tm}{}_a \\
&= \partial_n L^{-1}{}_l{}^a L^{Tm}{}_a \bar{E}^n \ .
\end{aligned} \tag{469}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}'(\bar{E}^l, \bar{E}^m) &= \mathcal{L}'(L^{Tl}{}_a\bar{E}^a - (L^T\Pi)^{la}\bar{E}_a, L^{Tm}{}_b\bar{E}^b - (L^T\Pi)^{mb}\bar{E}_b) \\
&= \partial L^{Tl}{}_a \langle \bar{E}^a, L^{Tm}{}_b\bar{E}^b - (L^T\Pi)^{mb}\bar{E}_b\rangle \\
&\quad -\partial(L^T\Pi)^{la} \langle \bar{E}_a, L^{Tm}{}_b\bar{E}^b - (L^T\Pi)^{mb}\bar{E}_b\rangle \\
&= \partial L^{Tl}{}_a(-(L^T\Pi)^{ma}) - \partial(L^T\Pi)^{la}L^{Tm}{}_a \\
&= \partial_n L^{Tl}{}_a(-(L^T\Pi)^{ma})\bar{E}^n - \partial_n(L^T\Pi)^{la}L^{Tm}{}_a\bar{E}^n \\
&= \partial_n L^{Tl}{}_a(-(L^T\Pi)^{ma})\bar{E}^n - \partial_n L^{Tl}{}_b\Pi^{ba}L^{Tm}{}_a\bar{E}^n \\
&\quad -L^{Tl}{}_b\partial_n\Pi^{ba}L^{Tm}{}_a\bar{E}^n \\
&= -L^{Tl}{}_b\partial_n\Pi^{ba}L^{Tm}{}_a\bar{E}^n \\
&= -L^{Tl}{}_b L^{-1}{}_n{}^c(\bar{f}^{ba}{}_c - 2f_{dc}{}^{[b}\Pi^{a]d})L^{Tm}{}_a\bar{E}^n \\
&= -(\bar{f}^{lm}{}_n + 2f_{nn'}{}^{[l}\Pi^{m]n'})\bar{E}^n \ .
\end{aligned} \tag{470}
$$

以上より，$\bar{\phi}'_{LMN}$ が分かった．

$$
\begin{aligned}
\bar{\phi}'{}_{lm}{}^n &= 0 \ , \\
\bar{\phi}'{}_{lmn} &= 0 \ , \\
\bar{\phi}'{}_l{}^m{}_n &= \partial_n L^{-1}{}_l{}^a L_a{}^m \ , \\
\bar{\phi}'{}_l{}^{mn} &= 0 \ , \\
\bar{\phi}'{}^{lm}{}_n &= -(\bar{f}^{lm}{}_n + 2f_{nn'}{}^{[l}\Pi^{m]n'}) \\
&= -L_a{}^l L_b{}^m\partial_n\Pi^{ab} \ , \\
\bar{\phi}'{}^{lmn} &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{471}
$$

$\bar{F}'{}_{LMN}, \bar{\phi}'{}_{LMN}$ を用いて $\bar{F}_{ABC}$ を導出する．

$$
\bar{F}_{LMN} = \bar{F}'{}_{LMN} + \bar{\phi}'{}_{LMN} = 0 \ . \tag{472}
$$

最後に構造係数 $\bar{F}_N$ を求める．

$$
\begin{aligned}
\bar{F}_m &= \bar{\phi}'{}^l{}_{ml} + \bar{\phi}'{}_{lm}{}^l + 2\rho(\bar{E}_m)(d) \\
&= -\partial_l L^{-1}{}_m{}^a L_a{}^l + 2\partial_m d \\
&= -(\partial_l L^{-1}{}_m{}^a - \partial_m L^{-1}{}_l{}^a + f_{bc}{}^a L^{-1}{}_l{}^b L^{-1}{}_m{}^c)L_a{}^l \\
&\quad -(\partial_m L^{-1}{}_l{}^a - f_{bc}{}^a L^{-1}{}_l{}^b L^{-1}{}_m{}^c)L_a{}^l + 2\partial_m d \\
&= -(\partial_m L^{-1}{}_l{}^a - f_{bc}{}^a L^{-1}{}_l{}^b L^{-1}{}_m{}^c)L_a{}^l + 2\partial_m d \\
&= f_{ac}{}^a L^{-1}{}_m{}^c + 2\partial_m(d + \frac{1}{2}\log\det(L)) \\
&= \partial_m \log\det a + 2\partial_m(d + \frac{1}{2}\log\det(L)) \\
&= 2\partial_m(d + \frac{1}{2}\log\det(R))
\end{aligned} \tag{473}
$$

$$\begin{aligned}\bar{F}^m &= \bar{\phi}'^{lm}{}_l + \bar{\phi}'_l{}^{ml} + 2\rho(\bar{E}^m)(d) \\ &= -L_b{}^m(\bar{f}^{ab}{}_a - 2f_{da}{}^{[a}\Pi^{b]d}) + 2\rho(\bar{E}^m)(d) \\ &= -L_b{}^m \bar{f}^{ab'}{}_a a_{b'}{}^b + 2\rho(\bar{E}^m)(d) \\ &= -R_b{}^m \bar{f}^{ab}{}_a + 2\rho(\bar{E}^m)(d) \ .\end{aligned} \tag{474}$$

以上の計算より，作用で用いる構造係数 $F_{ABC}, F_A, \phi'_{ABC}$ を導出する．$E_A = \hat{E}_A{}^M \bar{E}_M$ であるから，基底変換をすると

$$\begin{aligned}F_{ABC} &= 3\hat{\Omega}_{[ABC]} + \hat{E}_A{}^L \hat{E}_B{}^M \hat{E}_C{}^N \bar{F}_{LMN} \\ &= 3\hat{\Omega}_{[ABC]} \ , \end{aligned} \tag{475}$$

$$F_A = \hat{\Omega}^B{}_{BA} + \hat{E}_A{}^N \bar{F}_N \ , \tag{476}$$

$$\phi'_{ABC} = \hat{\Omega}_{CAB} + \hat{E}_A{}^L \hat{E}_B{}^M \hat{E}_C{}^N \bar{\phi}'_{LMN} \ , \tag{477}$$

を得る．ここで $\hat{\Omega}_{ABC}$ は $\hat{E}_A{}^M$ の Weitzenböck 接続であり，

$$\hat{\Omega}_{ABC} = \hat{E}_A{}^L \rho(\bar{E}_L)(\hat{E}_B{}^M)\hat{E}_C{}^N \hat{\eta}_{MN} \ , \tag{478}$$

で定義される．さらに積分測度は

$$\begin{aligned}dXe^{-2d}\sqrt{\det\eta} &= dXe^{-2d}\sqrt{(\det \hat{E}^{-1}{}_L{}^A)^2(\det A^{-1}{}_M{}^N)^2} \\ &= dXe^{-2d}\det R^{-1}\det \bar{L}^{-1} \\ &= dXe^{-2(d+\frac{1}{2}\log\det R)}\det \bar{L}^{-1} \ ,\end{aligned} \tag{479}$$

で与えられる．

6.3 Drinfel'd Double 上の作用の簡約 (2)

本節では前節での計算を座標変換して

$$l(X) = l(X(X')) = g(x')\bar{g}(\bar{x}') \ , \tag{480}$$

と置いて同様の計算を行う．

新しい基底 $\tilde{E}_N$ の導入

$$l^{-1}dl = \begin{pmatrix} d\bar{x}'_m & dx'^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^m{}_n & \\ & (L^{-1}\bar{R}^{-T})_m{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1n}{}_a & \\ & \bar{L}^T{}_n{}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^a{}_b & \\ -\bar{\Pi}_{ab} & \delta_a{}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^b \\ T_b \end{pmatrix} \ . \tag{481}$$

故に $\tilde{E}^{-1}{}_M{}^A$ は

$$\tilde{E}^{-1}{}_M{}^B = \begin{pmatrix} \delta^m{}_n & \\ & (L^{-1}\bar{R}^{-T})_m{}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1n}{}_a & \\ & \bar{L}^T{}_n{}^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^a{}_b & \\ -\bar{\Pi}_{ab} & \delta_a{}^b \end{pmatrix} \ , \tag{482}$$

となる．

局所ローレンツ基底 E_A と対応づける行列 U は前節と同じものを用いる．

$$E_A = U_A{}^B \tilde{E}_B \ , \ U_A{}^B(X(X')) = \begin{pmatrix} e^{-T} & 0 \\ eB & e \end{pmatrix} \ . \tag{483}$$

この時，一般化計量を考える．

$$E_M{}^A = \tilde{E}_M{}^B U^{-1}{}_B{}^A \ , \tag{484}$$

であるから，

$$\begin{aligned} H_{MN} &= E_M{}^A H_{AB} E^B{}_N \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & L^{-1}\bar{R}^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1} & \\ & \bar{L}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ -\bar{\Pi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ -B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^T & \\ & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & \\ & s \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} e & \\ & e^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & B \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{\Pi} \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{L}^{-T} & \\ & \bar{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \bar{R}^{-1}L^{-T} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & L^{-1}\bar{R}^{-T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \check{G} - \check{B}\check{G}^{-1}\check{B} & -\check{B}\check{G}^{-1} \\ \check{G}^{-1}\check{B} & \check{G}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \bar{R}^{-1}L^{-T} \end{pmatrix} \ , \end{aligned} \tag{485}$$

となって一般化計量 H_{MN} を得る．ここで

$$\check{G}^{mn} + \check{B}^{mn} = \bar{L}^{-1m}{}_a \Big(\frac{1}{G + B + \bar{\Pi}} \Big)^{ab} \bar{L}^{-T}{}_b{}^n \tag{486}$$

であって，Poisson-Lie T-duality で現れる背景時空である．さらに，$\check{G}, \check{B}$ に対応した多脚場を $\check{E}_A{}^M$ と置くことにする．

$$\begin{aligned} \check{H}_{MN} &= \check{E}^{-1}{}_M{}^A H_{AB} \check{E}^{-T B}{}_N = \begin{pmatrix} \check{G} - \check{B}\check{G}^{-1}\check{B} & -\check{B}\check{G}^{-1} \\ \check{G}^{-1}\check{B} & \check{G}^{-1} \end{pmatrix} \ , \end{aligned} \tag{487}$$

$$\check{\eta}_{MN} = \check{E}^{-1}{}_M{}^A \eta_{AB} \check{E}^{-T B}{}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{488}$$

さらに，$E_A{}^M, \hat{E}_A{}^M$ を結び付ける $\tilde{A}_M{}^N$ を定義する．

$$E_A{}^M = \hat{E}_A{}^N \tilde{A}_N{}^M \ , \ \tilde{A}_M{}^N = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \bar{R}^T L \end{pmatrix} \ . \tag{489}$$

$\hat{E}_A{}^N$ を用いて，基底 $\tilde{E}_N$ を新たに定義する．

$$\tilde{E}_N = \hat{E}^{-1}{}_N{}^A E_A = \tilde{A}_N{}^M \partial_M = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \bar{R}^T L \end{pmatrix}_N{}^M \partial_M \ . \tag{490}$$

$$\tilde{E}_N = \begin{pmatrix} \bar{L}^{-1} & \\ -\bar{L}^T\bar{\Pi} & \bar{L}^T \end{pmatrix}_N{}^A \tilde{E}_A \ , \tag{491}$$

が従う．具体的に $\bar{E}_N$ の各成分を書き下せば

$$\begin{aligned} \tilde{E}^n &= \bar{L}^{-1n}{}_a \tilde{E}^a \ , \\ \tilde{E}_n &= \bar{L}^T{}_n{}^a \tilde{E}_a - (\bar{L}^T\bar{\Pi})_{na} \tilde{E}^a \ , \\ \tilde{E}^n &= \partial^n \ , \\ \tilde{E}_n &= (\bar{R}^T L)_n{}^m \partial_m \ , \end{aligned} \tag{492}$$

を得る．

作用に用いる構造係数の導出　$\bar{E}_N$ の具体的な表式 (492) をもとに基底 $\bar{E}_N$ 上の構造係数を求める．ここまでの計算を見れば，前節の計算と本節の計算は上付き添え字と下付き添え字の入れ替えによって完全に対応付くことが分かる．そのため，直ちに以下の構造係数の計算を実行することができる．

まず，Lie 括弧を計算していく．

$$[\tilde{E}^l, \tilde{E}^m]_L = 0 \ . \tag{493}$$

$$[\tilde{E}^l, \tilde{E}_m]_L = \partial^l \bar{L}^T{}_m{}^c \bar{L}^{-T}{}_c{}^n \tilde{E}_n - \bar{L}^{-1l}{}_a \bar{L}^T{}_m{}^b \bar{f}^{ac}{}_b (\bar{L}^{-T}{}_c{}^n \tilde{E}_n) \ , \tag{494}$$

$$[\tilde{E}_l, \tilde{E}_m]_L = (f_{lm}{}^{n'} + 2\bar{f}^{n'p}{}_{[l}\bar{\Pi}_{m]p})\tilde{E}_{n'} \ . \tag{495}$$

式が煩雑にならないように $f_{ab}{}^c, \bar{f}^{ab}{}_c, \bar{\Pi}_{ab}$ の添え字に l, m, n, p, q を使っているものは $\bar{L}^T{}_m{}^a, \bar{L}^{-1m}{}_a$ をかけたものとして定義している．例えば

$$\bar{f}^{kp}{}_c = \bar{L}^{-1k}{}_a \bar{L}^{-1p}{}_b \bar{f}^{ab}{}_c \ , \tag{496}$$

などである以上の計算より Lie 括弧の構造係数が得られた．

$$\begin{aligned}
\tilde{F}'^{lm}{}_n &= 0 \ , \\
\tilde{F}'^{lmn} &= 0 \ , \\
\tilde{F}'^l{}_m{}^n &= \partial^l \bar{L}^c{}_m \bar{L}^{-1n}{}_c - \bar{L}^{-1l}{}_a \bar{L}^b{}_m \bar{f}^{ac}{}_b \bar{L}^{-1n}{}_c \ , \\
\tilde{F}'^l{}_{mn} &= 0 \ , \\
\tilde{F}'_{lm}{}^n &= f_{lm}{}^n + 2\bar{f}^{np}{}_{[l}\bar{\Pi}_{m]p} \ , \\
\tilde{F}'_{lmn} &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{497}$$

次に $\mathcal{L}'(\bar{E}_L, \bar{E}_M)$ を導出する．

$$\mathcal{L}'(\tilde{E}^l, \tilde{E}^m) = 0 \ . \tag{498}$$

$$\mathcal{L}'(\tilde{E}^l, \tilde{E}_m) = \partial^n \bar{L}^{-1l}{}_a \bar{L}^T{}_m{}^a \tilde{E}_n \ . \tag{499}$$

$$\mathcal{L}'(\tilde{E}_l, \tilde{E}_m) = -(f_{lm}{}^n + 2\bar{f}^{nn'}{}_{[l}\bar{\Pi}_{m]n'})\tilde{E}_n \ . \tag{500}$$

以上より，$\tilde{\phi}'_{LMN}$ が分かった．

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}'^{lm}{}_n &= 0 \ , \\
\tilde{\phi}'^{lmn} &= 0 \ , \\
\tilde{\phi}'^l{}_m{}^n &= \partial^n \bar{L}^{-1l}{}_a \bar{L}^a{}_m \ , \\
\tilde{\phi}'^l{}_{mn} &= 0 \ , \\
\tilde{\phi}'_{lm}{}^n &= -(f_{lm}{}^n + 2\bar{f}^{nn'}{}_{[l}\bar{\Pi}_{m]n'}) \\
&= -\bar{L}^a{}_l \bar{L}^b{}_m \partial^n \bar{\Pi}_{ab} \ , \\
\tilde{\phi}'_{lmn} &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{501}$$

$\tilde{F}'_{LMN}, \tilde{\phi}'_{LMN}$ を用いて $\tilde{F}_{ABC}$ を導出する．

$$\tilde{F}_{LMN} = \tilde{F}'_{LMN} + \tilde{\phi}'_{LMN} = 0 \ . \tag{502}$$

最後に構造係数 $\bar{F}_N$ を求める．

$$\tilde{F}^m = 2\partial^m(d + \frac{1}{2}\log\det(\bar{R})) \ . \tag{503}$$

$$\tilde{F}_m = -\bar{R}^b{}_m f_{ab}{}^a + 2\rho(\bar{E}_m)(d) \ . \tag{504}$$

以上の計算より，作用で用いる構造係数 $F_{ABC}, F_A, \phi'_{ABC}$ を導出する．$E_A = \check{E}_A{}^M \tilde{E}_M$ であるから，基底変換をすると

$$\begin{aligned} F_{ABC} &= 3\check{\Omega}_{[ABC]} + \check{E}_A{}^L \check{E}_B{}^M \check{E}_C{}^N \tilde{F}_{LMN} \\ &= 3\check{\Omega}_{[ABC]} \ , \end{aligned} \tag{505}$$

$$F_A = \check{\Omega}^B{}_{BA} + \check{E}_A{}^N \tilde{F}_N \ , \tag{506}$$

$$\phi'_{ABC} = \check{\Omega}_{CAB} + \check{E}_A{}^L \check{E}_B{}^M \check{E}_C{}^N \tilde{\phi}'{}_{LMN} \ , \tag{507}$$

を得る．ここで $\check{\Omega}_{ABC}$ は $\hat{E}_A{}^M$ の Weitzenböck 接続であり，

$$\check{\Omega}_{ABC} = \check{E}_A{}^L \rho(\bar{E}_L)(\check{E}_B{}^M)\check{E}_C{}^N \check{\eta}_{MN} \ , \tag{508}$$

で定義される．さらに積分測度は

$$dXe^{-2d}\sqrt{\det\eta} = dXe^{-2(d+\frac{1}{2}\log\det\bar{R})}\det L^{-1} \ , \tag{509}$$

で与えられる．

6.4 二重場理論における非アーベル的 T 双対性

この節ではまず，非アーベル的 T 双対性を導出する．本節の結論として非アーベル的 T 双対性は座標変換 $X(X')$ と理解できることが示される．

$$\begin{aligned} l(X) &= \bar{g}(\bar{x})g(x) \ , \\ l(X(X')) &= g(x')\bar{g}(\bar{x}') \ . \end{aligned} \tag{510}$$

本節の手順は次の通り．

二重場理論における非アーベル的 T 双対性の導出

- 一方が可換の場合 $\bar{f}^{ab}{}_c = 0$ の構造係数の導出.
  - 一方が可換であるとき，前節までの計算の多くの項が 0 になり，表式が単純化される.
- $(U_A{}^B, d$:定数) が二重場理論の解になる場合の解析.
  - $l(X) = \bar{g}(\bar{x})g(x)$ と置いた場合を考える．$U_{0A}{}^B, d_0$:定数について作用の x 依存性のみを持つ変分で作用が不変であること

$$\hat{S}_{DD}[U_0 + \delta U(x), d_0 + \delta d(x)] - \hat{S}_{DD}[U_0, d_0] = 0 \ , \tag{511}$$

と全ての座標に依存する変分で作用が不変であること

$$\hat{S}_{DD}[U_0 + \delta U(X), d_0 + \delta d(X)] - \hat{S}_{DD}[U_0, d_0] = 0 \ , \tag{512}$$

が同じ条件を与えることを示す.
  - x 方向の変分で不変であることは $U_A{}^B(x), d(x)$ と置いた作用から作られる運動方程式の解であることと同値である．これを用いて，D 次元の座標 x 上の超重力理論に簡約できることを示す.
  - 以上の議論から，超重力理論の解から二重場理論の解 (*) が得られることが示される.
- 二重場理論上座標変換と双対作用
  - 二重場理論上で $l(X(X')) = g(x')\bar{g}(\bar{x}')$ となるように座標変換を行う．この座標変換によって上で述べた二重場理論の解 (*) が座標 X' 上の作用の解に変換される.
  - X' 座標上の作用の解が $\bar{x}'$ 座標を持つ D 次元理論の解にもなっていることを示す.
  - 以上の議論から，x 座標を持つ超重力理論の解から $\bar{x}'$ 座標を持つ D 次元理論の解を得ることができた．この 2 つの D 次元理論の解の関係が非アーベル的 T 双対性である.

一方が可換の場合 $\bar{f}^{ab}{}_c = 0$ の構造係数の導出　非アーベル的T双対性を導出するには $\bar{f}^{ab}{}_c = 0$ とすればよい．$\bar{f}^{ab}{}_c = 0$ のとき

$$\Pi^{ab} = 0 \tag{513}$$

である．座標 X での構造係数を書き下す.

$$\begin{aligned}
F_{ABC}(\bar{E}(l(X)), U(X)) &= 3\hat{\Omega}_{[ABC]} \ , & (514)\\
F_A(\bar{E}(l(X)), U(X), d(X)) &= \hat{\Omega}^B{}_{BA} + \hat{E}_A{}^N \bar{F}_N \ , & (515)\\
\phi'_{ABC}(\bar{E}(l(X)), U(X)) &= \hat{\Omega}_{CAB} + \hat{E}_A{}^L \hat{E}_B{}^M \hat{E}_C{}^N \bar{\phi}'_{LMN} \ , & (516)\\
\mu(\bar{E}(l(X)), d(X)) &= dX e^{-2(d+\frac{1}{2}\log\det L)} \det a^{-1} \ , & (517)
\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$
\begin{aligned}
\hat{\Omega}_{ABC} &= \hat{E}_A{}^L \rho(\bar{E}_L)(\hat{E}_B{}^M)\hat{E}_C{}^N \bar{\eta}_{MN} \ , && (518)\\
\bar{\phi}'_{lm}{}^n &= 0 \ ,\\
\bar{\phi}'_{lmn} &= 0 \ ,\\
\bar{\phi}'_l{}^m{}_n &= \partial_n L^{-1}{}_l{}^a L_a{}^m \ ,\\
\bar{\phi}'_l{}^{mn} &= 0 \ ,\\
\bar{\phi}'^{lm}{}_n &= 0 \ ,\\
\bar{\phi}'^{lmn} &= 0 \ , && (519)\\
\bar{F}_m &= 2\partial_m(d + \frac{1}{2}\log\det(R)) \ ,\\
\bar{F}^m &= 2\rho(\bar{E}^m)(d) \ . && (520)
\end{aligned}
$$

で与えられる．これらを作用 $S_{DD}(444)$ に代入して $U(X), d(X)$ に対する作用を得る．

$$
\hat{S}_{DD}[U(X), d(X)] \ , \tag{521}
$$

($U_A{}^B, d$: 定数) が二重場理論の解になる場合の解析　今，$(U_A{}^B, d) = (U_{0A}{}^B, d_0)$: 定数 の周りの x 依存性を持つ変分によって作用 S_{DD} が不変であることを仮定する．即ち，

$$
\hat{S}_{DD}[U_0 + \delta U(x), d_0 + \delta d(x)] - \hat{S}_{DD}[U_0, d_0] = 0 \ , \tag{522}
$$

を満たす場合を考える．このとき，座標 x と U_0, d_0 の関数 $C_{AB}(x, U_0, d_0), C(x, U_0, d_0)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
0 &= \hat{S}_{DD}[U_0 + \delta U(x), d_0 + \delta d(x)] - \hat{S}_{DD}[U_0, d_0]\\
&= \int dX \Big(\delta U^{AB}(x) C_{AB}(x, U_0, d_0) + \delta d(x) C(x, U_0, d_0)\Big) \ ,
\end{aligned} \tag{523}
$$

と書くことができる．これは作用に含まれる構造係数 (514)(515)(516) と測度 (517) に含まれる $\bar{x}$ 依存性が $U(X), d(X)$ から来るものだけであることから従う．

　このとき，全ての座標に依存した変分 $\delta U(X), \delta d(X)$ を考える．

$$
\hat{S}_{DD}[U_0 + \delta U(X), d_0 + \delta d(X)] - \hat{S}_{DD}[U_0, d_0] \ . \tag{524}
$$

$\bar{x}$ 依存性を加えたことによって $\rho(\bar{E}^m)(\delta U(X)), \rho(\bar{E}^m)(\delta d(X))$ が新たに作用の変分に寄与を与える．よって，関数 $C_{mAB}(x, U_0, d_0), C_m(x, U_0, d_0)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
& \hat{S}_{DD}[U_0 + \delta U(X), d_0 + \delta d(X)] - \hat{S}_{DD}[U_0, d_0]\\
=& \int dX \Big(\delta U^{AB}(X) C_{AB}(x, U_0, d_0) + \delta d(X) C(x, U_0, d_0)\Big)\\
& + \int \mu(x, d_0)\Big(\rho(\bar{E}^m)(\delta U^{AB}(X)) C_{mAB}(x, U_0, d_0) + \rho(\bar{E}^m)(\delta d(X)) C_m(x, U_0, d_0)\Big)\\
=& \int \mu(x, d_0)\Big(\delta U^{AB}(X)(-\rho(\bar{E}^m) + \bar{F}^m(d_0))(C_{mAB}(x, U_0, d_0))\\
& + \delta d(X)(-\rho(\bar{E}^m) + \bar{F}^m(d_0)) C_m(x, U_0, d_0)\Big)\\
=& \ 0 \ ,
\end{aligned} \tag{525}
$$

と計算できる．ここで $\bar{F}^m(d_0)=2\rho(\bar{E}^m)(d_0)=0$ である．

以上より，Drinfel'd Double の座標を $l(X)=\bar{g}(\bar{x})g(x)$ と置いた場合には

$$
\begin{aligned}
& \hat{S}_{DD}[U_0+\delta U(x),d_0+\delta d(x)]-\hat{S}_{DD}[U_0,d_0]=0 \\
\Longrightarrow\quad & \hat{S}_{DD}[U_0+\delta U(X),d_0+\delta d(X)]-\hat{S}_{DD}[U_0,d_0]=0\ , \qquad (526)
\end{aligned}
$$

が従う．逆も自明に成り立つ．即ち，U,d の座標依存性を x のみに制限した作用 $\hat{S}_{DD}[U(x),d(x)]$ で $(U,d)=(U_0,d_0)$ が解になることと元々の作用 $\hat{S}_{DD}[U(X),d(X)]$ で $(U,d)=(U_0,d_0)$ が解になることは同値である．

$\hat{S}_{DD}[U(x),d(x)]$ を考える．U,d に $\bar{x}$ 依存性がないから，全ての構造係数，測度には x 依存性しかない．故に D 次元上の理論に簡約される．作用で用いる構造係数は

$$
\begin{aligned}
F_{ABC}(\bar{E}(l(X)),U(X)) &= 3\hat{\Omega}_{[ABC]}\ , && (527)\\
F_A(\bar{E}(l(X)),U(X),d(X)) &= \hat{\Omega}^B{}_{BA}+\hat{E}_A{}^N\bar{F}_N\ , && (528)\\
\phi'_{ABC}(\bar{E}(l(X)),U(X)) &= \hat{\Omega}_{CAB}+\hat{E}_A{}^L\hat{E}_B{}^M\hat{E}_C{}^N\bar{\phi}'_{LMN}\ , && (529)\\
\mu(\bar{E}(l(X)),d(X)) &= dXe^{-2(d+\frac{1}{2}\log\det R)}=dXe^{-2\hat{d}}\ , && (530)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで

$$
\begin{aligned}
\hat{\Omega}_{ABC} &= \hat{E}_A{}^l(\partial_l\hat{E}_B{}^M)\hat{E}_C{}^N\hat{\eta}_{MN}\ , && (531)\\
\bar{\phi}'_{lm}{}^n &= 0\ ,\\
\bar{\phi}'_{lmn} &= 0\ ,\\
\bar{\phi}'_l{}^m{}_n &= \partial_nL^{-1}{}_l{}^aL_a{}^m\ ,\\
\bar{\phi}'_l{}^{mn} &= 0\ ,\\
\bar{\phi}'^{lm}{}_n &= 0\ ,\\
\bar{\phi}'^{lmn} &= 0\ , && (532)\\
\bar{F}_m &= 2\partial_m(d+\frac{1}{2}\log\det R)\\
&= 2\partial_m\hat{d}\ ,\\
\bar{F}^m &= 0\ . && (533)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\hat{d}=d+\frac{1}{2}\log\det R\ , \qquad (534)
$$

と置いた．これらの構造係数を用いて，作用を書く．

$$
\hat{S}_{DD}[U(x),d(x)]\ . \qquad (535)
$$

ここで $\hat{E}_A{}^M$ は (453)(454) で定義されていたことを思い出す．$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変性を用いて $\hat{E}_A{}^N$ は

$$
\hat{E}_A{}^N=\begin{pmatrix}\hat{e}^{-T} & 0\\ -\hat{e}\hat{B} & \hat{e}\end{pmatrix}\ , \qquad (536)
$$

と置くことができる．このとき，作用 $\hat{S}_{DD}$(535) に含まれる構造係数は $\hat{E}_A{}^M$ を多脚場として η_{MN}: 定数のときに与えた表式 (182)(181) に一致する．唯一，一致していないのは ϕ'_{ABC} である．しかし，この違いは作用に影響しない．なぜなら，ϕ'_{ABC} の具体形が

$$
\begin{aligned}
\phi'_{ABC} &= \hat{\Omega}_{CAB} + \hat{E}_A{}^L \hat{E}_B{}^M \hat{E}_C{}^N \bar{\phi}'_{LMN} \\
&= \hat{E}_C{}^n \partial_n \hat{E}_A{}^L E_B{}^M \bar{\eta}_{LM} + \hat{E}_A{}^l \hat{E}_{Bm} \hat{E}_C{}^n \partial_n L^{-1}{}_l{}^d L_d{}^m \ ,
\end{aligned}
\tag{537}
$$

であることから，作用に含まれる寄与が

$$
\phi'_{ABC}\phi'_{A'B'C'}\eta^{CC'} \propto \eta^{CC'} \hat{E}_C{}^n \hat{E}_{C'}{}^{n'} = 0 \ , \tag{538}
$$

となって消えているからである．よって，$\hat{S}_{DD}[U(x), d(x)]$ は $\hat{G}, \hat{B}, \hat{\phi}$ に対する超重力理論に一致する．

以上の議論により，次のことが言える．

超重力理論の解と二重場理論の解の関係

超重力理論において

$$
\begin{aligned}
\hat{G}_{mn} &= L^{-1}{}_m{}^a G_{0ab} L^{-Tb}{}_n \ , \\
\hat{B}_{mn} &= L^{-1}{}_m{}^a B_{0ab} L^{-Tb}{}_n \ , \\
\hat{\phi} &= d_0 - \frac{1}{2}\log\det a^{-1} + \frac{1}{4}\log\det G_0 \ ,
\end{aligned}
\tag{539}
$$

が解になる時，

$$
\begin{aligned}
U_A{}^B(X) &= \begin{pmatrix} e_0^{-T} & 0 \\ e_0 B_0 & e_0 \end{pmatrix} \ , \ (G_{0ab} = e_{0a}^{-1a'} s_{a'b'} e_0^{-Tb'}{}_b) \ , \\
d(X) &= d_0 \ ,
\end{aligned}
\tag{540}
$$

は $l(X) = \bar{g}(\bar{x})g(x)$ と置いた Drinfel'd Double 上の二重場理論 (521) の解になる．

二重場理論上座標変換と双対作用　ここまでで議論した作用とその運動方程式の解は $l(X) = \bar{g}(\bar{x})g(x)$ となる座標上で計算を行った．ここでは $l(X(X')) = g(x')\bar{g}(\bar{x}')$ と座標変換を行い，どのような理論の解に変換されるかを議論する．$l(X(X')) = g(x')\bar{g}(\bar{x}')$ と置いた場合の作用は 6.3 節において既に議論している．$\bar{f}^{ab}{}_c = 0$ を用いて作用に含まれる構造係数を列挙する．特に，以下では簡単のため

$$
\bar{g}(x') = \exp(\bar{t}^a \delta_a^m x_m) \ , \tag{541}
$$

と置いて計算を行う．このとき，

$$
\bar{L}^a{}_m = \delta^a{}_m \ , \ \bar{a}^a{}_b = \delta^a{}_b \ , \ \bar{\Pi}_{ab} = f_{ab}{}^c \delta_c^m \bar{x}_m \ , \tag{542}
$$

が従う．

$$
F_{ABC} = 3\check{\Omega}_{[ABC]} \ , \tag{543}
$$

$$
F_A = \check{\Omega}^B{}_{BA} + \check{E}_A{}^N \tilde{F}_N \ , \tag{544}
$$

$$
\phi'_{ABC} = \check{\Omega}_{CAB} + \check{E}_A{}^L \check{E}_B{}^M \check{E}_C{}^N \tilde{\phi}'_{LMN} \ , \tag{545}
$$

$$
\mu = dX' e^{-2d} \det L^{-1} \ . \tag{546}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\check{\Omega}_{ABC} &= \check{E}_A{}^L \rho(\tilde{E}_L)(\check{E}_B{}^M)\check{E}_C{}^N \check{\eta}_{MN} \ , \\
\tilde{\phi}'^{lm}{}_n &= 0 \ , \\
\tilde{\phi}'^{lmn} &= 0 \ , \\
\tilde{\phi}'^l{}_m{}^n &= 0 \ , \\
\tilde{\phi}'^l{}_{mn} &= 0 \ , \\
\tilde{\phi}'_{lm}{}^n &= -f_{lm}{}^n \\
&= -\delta^a{}_l \delta^b{}_m \partial^n \bar{\Pi}_{ab} \ , \\
\tilde{\phi}'_{lmn} &= 0 \ . \qquad (547) \\
\tilde{F}^m &= 2\partial^m d \ . \\
\tilde{F}_m &= -\delta^b{}_m f_{ab}{}^a + 2\rho(\tilde{E}_m)(d) \ . \qquad (548)
\end{aligned}
$$

これらの構造係数を作用 $S_{DD}(444)$ に代入して作用

$$\check{S}_{DD}[U(X'), d(X')] \ , \qquad (549)$$

を得る．一方で，座標 X における解 $U(X) = U_0, d(X) = d_0$ は座標依存性がないから座標変換によって不変である．

$$U(X(X')) = U_0 \ , \ d(X(X')) = d_0 \ . \qquad (550)$$

よってこの作用は

$$\check{S}_{DD}[U_0 + \delta U(X'), d_0 + \delta d(X')] - \check{S}_{DD}[U_0, d_0] = 0 \ , \qquad (551)$$

を満たす．特に変分を $\delta U(\bar{x}'), \delta d(x')$ に制限したとしても作用は不変である．

$$\check{S}_{DD}[U_0 + \delta U(\bar{x}'), d_0 + \delta d(\bar{x}')] - \check{S}_{DD}[U_0, d_0] = 0 \ . \qquad (552)$$

したがって，$U = U_0, d = d_0$ は作用 $\check{S}_{DD}[U(\bar{x}'), d(\bar{x}')]$ から得られる運動方程式の解になる．$U(\bar{x}'), d(\bar{x}')$ の下で構造係数を調べれば

$$
\begin{aligned}
F_{ABC} &= 3\check{\Omega}_{[ABC]} \ , \qquad (553) \\
F_A &= \check{\Omega}^B{}_{BA} + \check{E}_A{}^N \tilde{F}_N \ , \qquad (554) \\
\phi'_{ABC} &= \check{\Omega}_{CAB} + \check{E}_A{}^L \check{E}_B{}^M \check{E}_C{}^N \tilde{\phi}'_{LMN} \ , \qquad (555) \\
\mu &= dX' e^{-2d} \det L^{-1} \\
&= dX' e^{-2(d - \frac{1}{2}x^n \delta^b{}_n f_{ab}{}^a)} e^{-x^m \delta^c{}_m f_{dc}{}^d} \det L^{-1} \ , \qquad (556)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\check{\Omega}_{ABC} &= \check{E}_{Al}(\partial^l \check{E}_B{}^M)\check{E}_C{}^N \bar{\eta}_{MN} \ , \\
\bar{\phi}'^{lm}{}_n &= 0 \ , \\
\bar{\phi}'^{lmn} &= 0 \ , \\
\bar{\phi}'^l{}_m{}^n &= 0 \ , \\
\bar{\phi}'^l{}_{mn} &= 0 \ , \\
\bar{\phi}'_{lm}{}^n &= -f_{lm}{}^n \\
&= -\delta^a{}_l \delta^b{}_m \partial^n \bar{\Pi}_{ab} \ , \\
\bar{\phi}'_{lmn} &= 0 \ . \qquad (557) \\
\bar{F}^m &= 2\partial^m d \\
&= 2\partial^m (d - \frac{1}{2} x^n \delta^b{}_n f_{ab}{}^a) \ . \\
\bar{F}_m &= -\delta^b{}_m f_{ab}{}^a \\
&= 2\partial_m (d - \frac{1}{2} x^n \delta^b{}_n f_{ab}{}^a) \ . \qquad (558)
\end{aligned}
$$

これらを用いて作用をラグランジアン $\mathcal{L}'(\bar{x})$ を用いて与える．

$$
\check{S}_{DD}[U(\bar{x}'), d(\bar{x}')] = \int dx' \det L^{-1} \int d\bar{x}' e^{-2d} \check{\mathcal{L}}(\bar{x}') \ . \qquad (559)
$$

この作用の x' 依存性は測度に含まれる $\int dx' \det L^{-1}$ だけである．したがって，x' 依存性は運動方程式に影響を与えない．この性質を使って同じ運動方程式を与える作用 $\check{S}'_{DD}[U(\bar{x}'), d(\bar{x}')]$ を定義する．

$$
\begin{aligned}
\check{S}'_{DD}[U(\bar{x}'), d(\bar{x}')] &= \left(\int dx' e^{x^n \delta^b{}_n f_{ab}{}^a} \right) \int d\bar{x}' e^{-2d} \check{\mathcal{L}}(\bar{x}') \\
&= \int dX' e^{-2(d - \frac{1}{2} x^n \delta^b{}_n f_{ab}{}^a)} \mathcal{L}'(\bar{x}') \ . \qquad (560)
\end{aligned}
$$

この作用 $\check{S}'_{DD}[U(\bar{x}'), d(\bar{x}')]$ に対して $\check{E}_A{}^M, d$ を

$$
\begin{aligned}
\check{E}_A{}^M &= \begin{pmatrix} \check{e} & \check{e}\check{B} \\ & \check{e}^{-T} \end{pmatrix} \ , \ (\check{e}^{-1} s^{-1} \check{e}^{-T} = \check{G}) \ , \\
d &= \check{\phi} - \frac{1}{4} \log\det \check{G} \\
&= \check{\phi} - \frac{1}{4} \log\det \left(\frac{1}{G_0 + B_0 + (\bar{x}f)} G_0 \frac{1}{G_0 - B_0 - (\bar{x}f)} \right) \\
&= \check{\phi} - \frac{1}{2} \log\det \left(\frac{1}{G_0 + B_0 + (\bar{x}f)} \right) - \frac{1}{4} \log\det G_0 \ , \qquad (561)
\end{aligned}
$$

と置く．$\check{S}'_{DD}[U(\bar{x}'), d(\bar{x}')]$ を構成する構造係数は ϕ'_{ABC} を除き，$I_m = \frac{1}{2} x^n \delta^b{}_n f_{ab}{}^a$ と置いた時の一般化超重力理論のものと一致する．ϕ'_{ABC} の作用への寄与は

$$
\phi'_{ABC} \phi'_{A'B'C'} \eta^{CC'} \propto \check{E}_{Cl} \check{E}_{C'l'} \eta^{CC'} = \bar{\eta}_{ll'} = 0 \ , \qquad (562)
$$

より消えるから，$\check{S}'_{DD}[U(\bar{x}'), d(\bar{x}')]$ に含まれる構造係数は一般化超重力理論で現れるものと一致する．故に $I_n = \frac{1}{2} \delta^b{}_n f_{ab}{}^a$ が $\check{G}, \check{B}, \check{\phi}$ の Killing ベクトルならばこの理論は $\check{G}, \check{B}, \check{\phi}$ に対する一般化

超重力理論に帰着する．そこで実際に $I_n\partial^n$ が Killing ベクトルになっていることを示す．$\check{G},\check{B},\check{\phi}$ の解は

$$\begin{aligned}\check{G}^{mn}+\check{B}^{mn} &= \delta^m{}_a\Big(\frac{1}{G_0+B_0+(\bar{x}f)}\Big)^{ab}\delta_b{}^n\ ,\\ \check{\phi} &= d_0+\frac{1}{2}\log\det\Big(\frac{1}{G_0+B_0+(\bar{x}f)}\Big)+\frac{1}{4}\log\det G_0\ ,\end{aligned} \tag{563}$$

で与えられる．これを見れば，$\bar{x}$ 依存性は $\frac{1}{G_0+B_0+(\bar{x}f)}$ にのみ含まれる．よって，その逆行列が微分 $I_m\partial^m$ によってゼロになることを示せばよい．

$$\begin{aligned}I_m\partial^m(G_0+B_0+(\bar{x}f))_{ab} &= \frac{1}{2}\delta^c{}_m\partial^m(\bar{x}_nf_{dc}{}^d\delta^n{}_ef_{ab}{}^e)\\ &= \frac{1}{2}f_{dc}{}^df_{ab}{}^c\\ &= \frac{1}{2}(-f_{ac}{}^df_{bd}{}^c-f_{bc}{}^df_{da}{}^c)\\ &= 0\ .\end{aligned} \tag{564}$$

故に $I_n=\frac{1}{2}\delta^b{}_nf_{ab}{}^a$ が $\check{G},\check{B},\check{\phi}$ の Killing ベクトルであることが示された．以上より $\check{S}'_{DD}[U(X'),d(X')]$ は一般化超重力理論に帰着する．

　ただし，添え字の定義が先に定義した超重力理論と逆に定義されていることに注意．即ち，4.6 節の定義と一致されるためには

$$\check{e}^a{}_m\mapsto e_a{}^m\ ,\ \bar{x}_m\mapsto x^m\ , \tag{565}$$

などと読み替えればよい．

　特に，群 $\mathcal{G}$ がユニモジュラー (付録 sec:unimodular) なら $f_{ab}{}^a=0$ となるから

$$I_n=0\ , \tag{566}$$

が従う．このとき，一般化超重力理論は $\check{G},\check{B},\check{\phi}$ に対する超重力理論に帰着する．以上の議論より，次が従う．

二重場理論の座標変換と双対理論

$l(X)=\bar{g}(\bar{x})g(x)$ と置いた二重場理論において

$$
\begin{aligned}
U_A{}^B(X) &= \begin{pmatrix} e_0^{-T} & 0 \\ e_0 B_0 & e \end{pmatrix} , \ (G_{0ab} = e_{0a}^{-1a'} s_{a'b'} e_0^{-Tb'}{}_b) , \\
d(X) &= d_0 , \qquad (567)
\end{aligned}
$$

が解になるならば，座標変換 $l(X(X'))=g(x')\bar{g}(\bar{x}')$ を行った理論でも同様に解になる．さらに，$(\bar{x}f)_{ab}=\bar{x}_m\delta_c{}^m f_{ab}{}^c$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\check{G}^{mn}+\check{B}^{mn} &= \delta^m{}_a\Big(\frac{1}{G_0+B_0+(\bar{x}f)}\Big)^{ab}\delta_b{}^n , \\
\check{\phi} &= d_0+\frac{1}{2}\log\det\Big(\frac{1}{G_0+B_0+(\bar{x}f)}\Big)+\frac{1}{4}\log\det G_0 , \qquad (568)
\end{aligned}
$$

を考えると Killing ベクトル $I_n=\frac{1}{2}\delta^b{}_n f_{ab}{}^a$ を持つ一般化超重力理論の解になる．特に，$\mathcal{G}$ がユニモジュラーの時は $\check{G},\check{B},\check{\phi}$ に対する超重力理論に帰着する．

最終的に，超重力理論の解から一般化超重力理論，または超重力理論の解を得る規則を得ることができた．解同士の対応関係は結局，次で与えられる．

解から解への対応

G_0,B_0,d_0:定数について

$$
\begin{aligned}
\hat{G}_{mn} &= L^{-1}{}_m{}^a G_{0ab} L^{-Tb}{}_n , \\
\hat{B}_{mn} &= L^{-1}{}_m{}^a B_{0ab} L^{-Tb}{}_n , \\
\hat{\phi} &= d_0-\frac{1}{2}\log\det a^{-1}+\frac{1}{4}\log\det G_0 , \qquad (569)
\end{aligned}
$$

が超重力理論の解になる時，$(\bar{x}f)_{ab}=\bar{x}_m\delta_c{}^m f_{ab}{}^c$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\check{G}^{mn}+\check{B}^{mn} &= \delta^m{}_a\Big(\frac{1}{G_0+B_0+(\bar{x}f)}\Big)^{ab}\delta_b{}^n , \\
\check{\phi} &= d_0+\frac{1}{2}\log\det\Big(\frac{1}{G_0+B_0+(\bar{x}f)}\Big)+\frac{1}{4}\log\det G_0 , \qquad (570)
\end{aligned}
$$

は Killing ベクトル $I_n=\frac{1}{2}\delta^b{}_n f_{ab}{}^a$ を持つ一般化超重力理論の解になる．ディラトンの対応は

$$
e^{-2\check{\phi}}=e^{-2\hat{\phi}}\det(G_0+B_0+(\bar{x}f))\det a \qquad (571)
$$

で与えられる．

この結果で重要な事項は以下のとおりである．

- 群 $\mathcal{G}$ がユニモジュラーの時，ここで与えられた解の対応 $(\hat{G},\hat{B},\hat{\phi})\leftrightarrow(\check{G},\check{B},\check{\phi})$ は非アーベル的 T 双対性として知られるものである (92)(93)．したがって，本節では二重場理論の座標変換から非アーベル的 T 双対性を導出することができた．特に，ディラトンの変換は通常，古典論からは導出できず，経路積分からの体積要素の寄与を受けるものであるが，二重場理

論では古典論のままでディラトンの変換則が導出できている．

- 群 $\mathcal{G}$ がユニモジュラーでない場合，超重力理論の解の非アーベル的 T 双対性を考えると超重力理論の解にならず，一般化超重力理論の解を得られることが知られている [48]．本節では二重場理論を用いることで自然に超重力理論から一般化超重力理論を導出することに成功している．ディラトンの変換に関しても Poisson-Lie T 双対性を用いた研究 [49, 50] の結果と整合的である．ディラトンの変換は [49, 50] で経路積分によって導出されているが二重場理論においては経路積分を用いずに自然にディラトンの変換則を導出することができた．

6.5 二重場理論における Poisson-Lie T 双対性

前節では非アーベル的 T 双対性を二重場理論を用いて導出した．ここでは Poisson-Lie T 双対性について議論する．そのために，$l(X)=\bar{g}(\bar{x})g(x)$ の時の構造係数をもう一度確認する．

$$
\begin{aligned}
F_{ABC} &= 3\hat{\Omega}_{[ABC]}\ , && (572)\\
F_A &= \hat{\Omega}^B{}_{BA}+\hat{E}_A{}^N\bar{F}_N\ , && (573)\\
\phi'_{ABC} &= \hat{\Omega}_{CAB}+\hat{E}_A{}^L\hat{E}_B{}^M\hat{E}_C{}^N\bar{\phi}'_{LMN}\ , && (574)\\
\mu &= dXe^{-2(d+\frac{1}{2}\log\det R)}\det\bar{L}^{-1}\ , && (575)\\
\hat{\Omega}_{ABC} &= \hat{E}_A{}^L\rho(\bar{E}_L)(\hat{E}_B{}^M)\hat{E}_C{}^N\hat{\eta}_{MN}\ , && (576)\\
\bar{\phi}'_{lm}{}^n &= 0\ ,\\
\bar{\phi}'_{lmn} &= 0\ ,\\
\bar{\phi}'_l{}^m{}_n &= \partial_nL^{-1}{}_l{}^aL_a{}^m\ ,\\
\bar{\phi}'_l{}^{mn} &= 0\ ,\\
\bar{\phi}'^{lm}{}_n &= -L_a{}^lL_b{}^m\partial_n\Pi^{ab}\ ,\\
\bar{\phi}'^{lmn} &= 0\ , && (577)\\
\bar{F}_m &= 2\partial_m(d+\frac{1}{2}\log\det(R))\\
\bar{F}^m &= -R_b{}^m\bar{f}^{ab}{}_a+2\rho(\bar{E}^m)(d)\ , && (578)
\end{aligned}
$$

この構造係数を $S_{DD}(444)$ に代入して $U(X),d(X)$ に対する作用を得る．

$$\hat{S}_{DD}[U(X),d(X)]\ . \tag{579}$$

非アーベル的 T 双対性での議論と同様に，この作用が定数 U_0,d_0 について

$$\hat{S}_{DD}[U_0+\delta U(x),d_0+\delta d(x)]-\hat{S}_{DD}[U_0,d_0]=0\ , \tag{580}$$

を満たすことを仮定する．即ち，$(U,d)=(U_0,d_0)$ が $\hat{S}_{DD}[U(x),d(x)]$ の解になる場合を考える．

このとき，前節の議論と同様に変分を $2D$ 次元座標に依存させた $\delta U(X),\delta d(X)$ に持ち上げられるかを調べる．座標 x と U_0,d_0 の関数 $C_{AB}(x,U_0,d_0),C(x,U_0,d_0)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
0 &= \hat{S}_{DD}[U_0+\delta U(x),d_0+\delta d(x)]-\hat{S}_{DD}[U_0,d_0]\\
&= \int dX\Big(\delta U^{AB}(x)C_{AB}(x,U_0,d_0)+\delta d(x)C(x,U_0,d_0)\Big)\ ,
\end{aligned}
\tag{581}
$$

と書くことができる．

　このとき，全ての座標に依存した変分 $\delta U(X), \delta d(X)$ を考える．

$$\hat{S}_{DD}[U_0+\delta U(X), d_0+\delta d(X)] - \hat{S}_{DD}[U_0, d_0]\ . \tag{582}$$

$\bar{x}$ 依存性を加えたことによって $\rho(\bar{E}^m)(\delta U(X)), \rho(\bar{E}^m)(\delta d(X))$ が新たに作用の変分に寄与を与える．よって，関数 $C_{mAB}(x, U_0, d_0), C_m(x, U_0, d_0)$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\hat{S}_{DD}[U_0+\delta U(X), d_0+\delta d(X)] - \hat{S}_{DD}[U_0, d_0] \\
= &\int dX\Big(\delta U^{AB}(X) C_{AB}(x, U_0, d_0) + \delta d(X) C(x, U_0, d_0)\Big) \\
&+\int \mu(x, d_0)\Big(\rho(\bar{E}^m)(\delta U^{AB}(X)) C_{mAB}(x, U_0, d_0) + \rho(\bar{E}^m)(\delta d(X)) C_m(x, U_0, d_0)\Big) \\
= &\int \mu(x, d_0)\Big(\delta U^{AB}(X)(-\rho(\bar{E}^m) + \bar{F}^m(d_0))(C_{mAB}(x, U_0, d_0)) \\
&+\delta d(X)(-\rho(\bar{E}^m) + \bar{F}^m(d_0)) C_m(x, U_0, d_0)\Big) \\
= &\int \mu(x, d_0)\Big(\delta U^{AB}(X)(-R_b{}^m \bar{f}^{ab}{}_a)(C_{mAB}(x, U_0, d_0)) \\
&+\delta d(X)(-R_b{}^m \bar{f}^{ab}{}_a) C_m(x, U_0, d_0)\Big)\ ,
\end{aligned} \tag{583}$$

と計算できる．ここで $\bar{F}^m(d_0) = -R_b{}^m \bar{f}^{ab}{}_a$ である．したがって，一般に $\bar{f}^{ab}{}_a \neq 0$ の時 $\hat{S}_{DD}[U_0 + \delta U(X), d_0+\delta d(X)] - \hat{S}_{DD}[U_0, d_0] \neq 0$ となる．そこで，本節では

$$\bar{f}^{ab}{}_a = 0\ , \tag{584}$$

即ち，$\bar{\mathcal{G}}$ がユニモジュラーであることを要請する．

　$\bar{\mathcal{G}}$ がユニモジュラーであるとき $\hat{S}_{DD}[U(x), d(x)]$ は

$$\hat{G}+\hat{B} = L^{-1}\frac{1}{\frac{1}{G+B}+\Pi}L^{-T}\ , \tag{585}$$

$$\hat{\phi} = d + \frac{1}{2}\log\det R + \frac{1}{4}\log\det\hat{G}\ , \tag{586}$$

で定義される超重力理論になる．$U, \hat{E}$ の置き方は非アーベル的 T 双対性の場合と同じ．

　以上の議論より，次が従う．

座標 x の D 次元理論と二重場理論の解の関係

$\bar{\mathcal{G}}$ がユニモジュラーであるとき

$$\hat{G}+\hat{B} = \frac{1}{\frac{1}{G_0+B_0}+\Pi}\ , \tag{587}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\phi} = &\ d_0 + \frac{1}{2}\log\det a \\
&-\frac{1}{2}\log\det(1+(G_0+B_0)\Pi) + \frac{1}{4}\log\det G_0\ ,
\end{aligned} \tag{588}$$

が超重力理論の解になるなら $(U, d) = (U_0, d_0)$ は $l(X) = \bar{g}(\bar{x})g(x)$ と置いた時の二重場理論 $\hat{S}_{DD}[U(X), d(X)]$ の解になる．

次に二重場理論上で $l(X(X')) = g(x')\bar{g}(\bar{x}')$ となるように座標変換を行う．このときの構造係数を再び列挙する．

$$
\begin{aligned}
F_{ABC} &= 3\check{\Omega}_{[ABC]} \ , &(589)\\
F_A &= \check{\Omega}^B{}_{BA} + \check{E}_A{}^N \tilde{F}_N \ , &(590)\\
\phi'_{ABC} &= \check{\Omega}_{CAB} + \check{E}_A{}^L \check{E}_B{}^M \check{E}_C{}^N \tilde{\phi}'_{LMN} \ , &(591)\\
\mu &= dXe^{-2(d+\frac{1}{2}\log\det\bar{R})} \det L^{-1} \ , &(592)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\check{\Omega}_{ABC} &= \check{E}_A{}^L \rho(\bar{E}_L)(\check{E}_B{}^M)\check{E}_C{}^N \check{\eta}_{MN} \ , &(593)\\
\tilde{\phi}'^{lm}{}_n &= 0 \ ,\\
\tilde{\phi}'^{lmn} &= 0 \ ,\\
\tilde{\phi}'^l{}_m{}^n &= \partial^n \bar{L}^{-1l}{}_a \bar{L}^a{}_m \ ,\\
\tilde{\phi}'^l{}_{mn} &= 0 \ ,\\
\tilde{\phi}'_{lm}{}^n &= -(f_{lm}{}^n + 2\bar{f}^{nn'}{}_{[l}\bar{\Pi}_{m]n'})\\
&= -\bar{L}^a{}_l \bar{L}^b{}_m \partial^n \bar{\Pi}_{ab} \ ,\\
\tilde{\phi}'_{lmn} &= 0 \ . &(594)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}^m &= 2\partial^m(d + \frac{1}{2}\log\det(\bar{R})) \ . &(595)\\
\tilde{F}_m &= -\bar{R}^b{}_m f_{ab}{}^a + 2\rho(\bar{E}_m)(d) \ . &(596)
\end{aligned}
$$

この構造係数を $S_{DD}(444)$ に代入して $U(X), d(X)$ に対する作用を得る．

$$
\check{S}_{DD}[U(X'), d(X')] \ . \tag{597}
$$

解 (U_0, d_0) は座標変換で不変だから，$\check{S}_{DD}[U(X'), d(X')]$ においても解になっている．

$$
\check{S}_{DD}[U_0 + \delta U(X'), d_0 + \delta d(X')] - \check{S}_{DD}[U_0, d_0] = 0 \ . \tag{598}
$$

故に，変分の座標依存性を制限した

$$
\check{S}_{DD}[U_0 + \delta U(\bar{x}'), d_0 + \delta d(\bar{x}')] - \check{S}_{DD}[U_0, d_0] = 0 \ . \tag{599}
$$

も同様に成り立つ．このとき

$$
\begin{aligned}
\check{G} + \check{B} &= \bar{L}^{-1}\frac{1}{G + B + \bar{\Pi}}\bar{L}^{-T} \ , &(600)\\
\check{\phi} &= d + \frac{1}{2}\log\det\bar{R} + \frac{1}{4}\log\det\check{G} \ , &(601)
\end{aligned}
$$

と置くと，Killing ベクトル $I_m\partial^m = \bar{R}^b{}_m f_{ab}{}^a \partial^m$ を持つ一般化超重力理論になる．実は I_m が定数ではないから，標準的な二重場理論においてディラトンの再定義を行って I_m の寄与を取り込むことができない．このような状況の処方箋として修正二重場理論を用いることが提案されている．通常の議論では修正二重場理論を得るために

$$
\partial_m d \mapsto \partial_m d - I_m \ , \tag{602}
$$

のようにディラトンの微分にだけ再定義を行う．このような方法は非常に人工的であるが，一般化超重力理論が得られることが確認されている [11]．

最後に $I_m\partial^m = \frac{1}{2}\bar{R}^b{}_m f_{ab}{}^a\partial^m$ が実際に解

$$
\begin{aligned}
(\check{G}+\check{B})^{mn} &= \left(\bar{L}^{-1}\frac{1}{G_0+B_0+\bar{\Pi}}\bar{L}^{-T}\right)^{mn} , && (603)\\
\check{\phi} &= d+\frac{1}{2}\log\det\bar{R}+\frac{1}{4}\log\det\check{G} , && (604)
\end{aligned}
$$

の Killing ベクトルであることを示す．まず，$\check{G},\check{B}$ については基底付きで書くと

$$
\check{G}+\check{B} = \left(\frac{1}{G_0+B_0+\bar{\Pi}}\right)^{ab}(\bar{g}^{-1}d\bar{g})_a(\bar{g}^{-1}d\bar{g})_b , \qquad (605)
$$

である．$\bar{g}^{-1}d\bar{g}$ は $\bar{R}^b{}_m\partial^m$ で生成される左変換で不変だから，この Killing ベクトルで $\check{G},\check{B}$ が不変であることを示すには係数に $I_m\partial^m$ を作用させてゼロになるかを確認すればよい．

$$
\begin{aligned}
I_m\partial^m\Big(G_0+B_0+\bar{\Pi}\Big)_{ab} &= \frac{1}{2}\bar{R}^c{}_m f_{dc}{}^d\partial^m\bar{\Pi}_{ab}\\
&= \frac{1}{2}f_{dc}{}^d f_{a'b'}{}^c\bar{a}^{a'}{}_a\bar{a}^{b'}{}_b\\
&= \frac{1}{2}(-f_{a'c}{}^d f_{b'd}{}^c - f_{b'c}{}^d f_{da'}{}^c)\bar{a}^{a'}{}_a\bar{a}^{b'}{}_b\\
&= 0 . && (606)
\end{aligned}
$$

ディラトンについては $\bar{\mathcal{G}}$ がユニモジュラーであることを使えば

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi} &= d_0+\frac{1}{2}\log\det\bar{a}-\frac{1}{2}\log\det(1+(G_0+B_0)\bar{\Pi})+\frac{1}{4}\log\det G_0\\
&= d_0-\frac{1}{2}\log\det(1+(G_0+B_0)\bar{\Pi})+\frac{1}{4}\log\det G_0 , && (607)
\end{aligned}
$$

であるから，$I_m\partial^m\bar{\Pi}_{ab}=0$ であることからディラトンに対しても I_m は Killing ベクトルになっている．

以上の議論より，次が従う．

二重場理論上の Poisson-Lie T 双対性

Drinfel'd Double $\mathcal{D}=\mathcal{G}\bowtie\bar{\mathcal{G}}$ について $\bar{\mathcal{G}}$ がユニモジュラー，U_0, d_0 : 定数であるとき，

$$\begin{aligned}(\hat{G}+\hat{B})_{mn} &= \left(L^{-1}\frac{1}{\frac{1}{G_0+B_0}+\Pi}L^{-T}\right)_{mn} ,\\ \hat{\phi} &= d_0+\frac{1}{2}\log\det a\\ &\quad -\frac{1}{2}\log\det(1+(G_0+B_0)\Pi)+\frac{1}{4}\log\det G_0 ,\end{aligned} \tag{608}$$

が超重力理論の解なら

$$\begin{aligned}(\check{G}+\check{B})^{mn} &= \left(\bar{L}^{-1}\frac{1}{G_0+B_0+\bar{\Pi}}\bar{L}^{-T}\right)^{mn} ,\\ \check{\phi} &= d_0-\frac{1}{2}\log\det(1+(G_0+B_0)\bar{\Pi})+\frac{1}{4}\log\det G_0 ,\end{aligned} \tag{609}$$

は Killing ベクトル $I_m\partial^m=\frac{1}{2}\bar{R}^b{}_m f_{ab}{}^a\partial^m$ を持つ一般化超重力理論の解になる．ディラトンの対応は

$$e^{-2\hat{\phi}}=e^{-2\check{\phi}}\frac{\det(1+(G_0+B_0)\Pi)}{\det(1+(G_0+B_0)\bar{\Pi})}\det a^{-1} , \tag{610}$$

で与えられる．

以上の結果より，Drinfel'd Double $\mathcal{D}=\mathcal{G}\bowtie\bar{\mathcal{G}}$ 上の二重場理論を用いて Poisson-Lie T 双対性を導出することができた．

この結果について重要な点をまとめる．

- 本章の冒頭で述べた通り，従来の二重場理論を用いた Poisson-Lie T 双対性の提案 [25] は解同士の対応を保証するものではなく，Poisson-Lie T 双対性として知られる計量，B 場，ディラトンの形が見て取れるだけだった (図 1)．一方，本章の議論では解同士の対応であることを明らかにした上で Poisson-Lie T 双対性が導出されている (図 2)．故に，初めて二重場理論から Poisson-Lie T 双対性を導出したと言える．

- この構成方法では $\mathcal{G}$ がユニモジュラーでない場合に拡張できる．その場合，超重力理論の解が一般化超重力理論の解に対応付く．Poisson-Lie T 双対性によって，超重力理論の解が一般化超重力理論の解に対応することは具体的な例 [51] がいくつか示されているだけで一般論として成立することは証明がなかった．本章では $\mathcal{G}$ がユニモジュラーの場合に，超重力理論の解から一般化超重力理論の解に Poisson-Lie T 双対性で移り変わることを初めて一般的に示した．

- ディラトンの変換は通常，経路積分の体積要素からの寄与で決定される [49, 50]．本論文では二重場理論を用いることによって非常に簡単にディラトンの変換を導出でき，その結果は [49, 50] と整合的である．また，近年の研究 [52] においても同じ変換性が得られることが示されている．

- 両方の群 $\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ がユニモジュラーでない場合には本章の方法が使えない．しかし，群 $\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ がどちらもユニモジュラーでない場合に，どのような理論の解が Poisson-Lie T 双対性で対応するのかを明確に示した研究はなく，Poisson-Lie T 双対性が存在するかどうかも明らかではない．したがって，現状では群 $\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ がどちらもユニモジュラーの場合に Poisson-Lie T 双

対性が導出できなかった原因が二重場理論の方法の欠点なのか，Poisson-Lie T 双対性が存在しないのか断定することはできない．

7 L_∞ 代数と二重場理論

2.2 節で触れたように L_∞ 代数は閉弦の場の理論の代数として導入された [36]．L_∞ は物理的な場やゲージパラメータを含む次数 (degree) 付きの空間 $\mathbb{X}$ に対して次数 -1 の関数 $b_n : \mathbb{X}^n \to \mathbb{X}$ が定義された代数である．閉弦の場の理論においては任意の場 $B \in \mathbb{X}$ に対する b_1 の作用は BRST 演算子 Q と対応しており

$$b_1(B) = QB \ , \tag{611}$$

と与えられる [36, 37]．

一方で，二重場理論に対しても L_∞ 代数の構造があることが指摘された [38]．そのため，二重場理論においても BRST 演算子と類似の構造が存在することが期待され，研究が行われている．

二重場理論における L_∞ 代数の研究は，閉包条件を含む Courant 亜代数 (2.1.3 節) 上で議論がなされている．しかし，本論文で導出した拘束条件のない二重場理論では Courant 亜代数から Leibniz 則を落とした計量亜代数を用いたため，本節では計量亜代数に対する L_∞ を構成する．

計量亜代数に対する L_∞ 代数の研究は近年 [39] によって行われており，二重場理論に対するゲージ代数が議論されている．しかし，この議論は不十分であり，本章で後に述べる L_∞ 代数に含まれる運動方程式の構造が無視されている．

[39] において，運動方程式を理解できなかった理由は閉包条件がない上で標準的な二重場理論を考えると作用の $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変性が失われるためである．即ち，閉包条件がないために $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変性で消えるはずの物理的自由度が残り，物理的な場が上手く定義できなる．

したがって，この問題は閉包条件がなくても $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変な本論文の二重場理論を用いれば解決する．そこで本章では閉包条件のない二重場理論において L_∞ 代数を構成する．

7.1 L_∞ 代数と古典論

本節では二重場理論に L_∞ を適用する準備として L_∞ 代数と古典的な場の理論の対応の一般論について述べる．L_∞ 代数の記法は 2.2 節と同じものを用いる．

次数 0 の場 Ψ を考える．Ψ の空間を $\mathbb{X}$ と書く．この Ψ を用いて変形した括弧 $[\cdots]'_\infty$ を (52) と同様に定義する．

$$[B_1, \cdots, B_n]'_\infty = \sum_{p=0}^{\infty} [B_1, \cdots, B_n, \Psi^p]_\infty \ . \tag{612}$$

この Ψ に対するゲージ変換，運動方程式，作用を L_∞ 代数によって構成することができる．

ゲージ変換　ゲージパラメータ ξ, ξ_i を次数 1 の場として導入する．場 Ψ に対するゲージ変換を

$$\delta_\xi \Psi = [\xi]'_\infty = [\xi]_\infty + [\xi, \Psi]_\infty + \frac{1}{2}[\xi, \Psi^2]_\infty + \cdots \ , \tag{613}$$

と定義する．このとき，ゲージ代数を計算すれば

$$(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})\Psi = \delta_{[\xi_1,\xi_2]'_\infty}\Psi + [\xi_1, \xi_2, [\ \cdot\ ]'_\infty]'_\infty \ , \tag{614}$$

と与えられる．

運動方程式　Ψ の運動方程式をゲージ変換に “共変” な組み合わせとして導入する．ここで言う “共変” とは運動方程式のゲージ変換がゲージ変数と運動方程式自身の定数倍に線形であるという意味である．運動方程式 $\mathcal{F}$ として次を定義する．

$$\mathcal{F}(\Psi) = [\ \cdot\ ]'_\infty = b_0 + [\Psi]_\infty + \frac{1}{2!}[\Psi^2]_\infty + \cdots\ . \tag{615}$$

この運動方程式のゲージ変換は

$$\delta_\xi \mathcal{F} = [\delta_\xi \Psi]'_\infty = [\xi, \mathcal{F}]'_\infty\ , \tag{616}$$

となるから，実際に運動方程式が共変であることが従う．

L_∞ 代数上の内積と作用　L_∞ 代数上に次のような内積 $\langle\ ,\ \rangle_\infty : \mathbb{X}^2 \to \mathbb{X}$ が存在することを仮定する．任意の元 $B, B_i \in \mathbb{X}$ に対して

$$\begin{aligned} \langle B_1, B_2 \rangle_\infty &= (-1)^{(B_1+1)(B_2+1)} \langle B_2, B_1 \rangle_\infty\ , \\ \langle B, [B_1, \cdots, B_n]_\infty \rangle_\infty &= (-1)^{BB_1} \langle B_1, [B, B_2, \cdots, B_n]_\infty \rangle_\infty\ , \end{aligned} \tag{617}$$

を満たす．このとき，このとき，運動方程式 $\mathcal{F}$(615) に対応する作用 S_∞ を定義することができる．

$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle \Psi, [\Psi^n]_\infty \rangle_\infty\ . \tag{618}$$

この作用の変分を取れば

$$\delta S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \delta\Psi, [\Psi^n]_\infty \rangle_\infty = \langle \delta\Psi, \mathcal{F} \rangle_\infty\ . \tag{619}$$

となって運動方程式が得られることが分かる．さらにこの作用はゲージ変換 (613) で不変である．実際に作用のゲージ変換をすれば，

$$\delta_\xi S_\infty = \langle \delta_\xi \Psi, \mathcal{F} \rangle_\infty = \langle [\xi]'_\infty, [\ \cdot\ ]'_\infty \rangle_\infty = -\langle \xi, [[\ \cdot\ ]'_\infty]'_\infty \rangle = 0\ , \tag{620}$$

となってゲージ不変であることが確かめられた．

以上の議論より L_∞ 代数上の古典論をまとめる．

L_∞ 代数上の古典論

L_∞ 代数上の古典論は以下で構成される．

- 次数 0 の場 Ψ.
- ゲージ変換
$$\delta_\xi \Psi = [\xi]'_\infty \ . \tag{621}$$
- ゲージ代数
$$(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})\Psi = \delta_{[\xi_1,\xi_2]'_\infty}\Psi + [\xi_1, \xi_2, \mathcal{F}]'_\infty \ . \tag{622}$$
- 運動方程式
$$\mathcal{F}(\Psi) = [\ \cdot\ ]'_\infty \ . \tag{623}$$

さらに，L_∞ が内積 $\langle\ ,\ \rangle_\infty$(617) を持てば，作用が構成でき，その作用がゲージ不変であることが従う．

- 作用
$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \langle \Psi, [\Psi^n]_\infty \rangle_\infty \ . \tag{624}$$
- 作用のゲージ不変性
$$\delta_\xi S_\infty = 0 \ . \tag{625}$$

7.2 二重場理論における L_∞ 代数

本節では二重場理論において L_∞ 代数を構成する．

まず最初に二重場理論における場を確認する．二重場理論における物理的な自由度は一般化計量 H_{MN} と一般化ディラトン d である．一般化計量は具体的に

$$U_A{}^B = \begin{pmatrix} e^{-T} & 0 \\ -eB & e \end{pmatrix} \ , \tag{626}$$

を用いて

$$H_{MN} = \bar{E}_M^{-1A} U_A^{-1A'} H_{A'B'} U^{-TB'}{}_B \bar{E}^{-TB}{}_N \ , \tag{627}$$

と書くことができる．$\bar{E}_A{}^N$ は物理的な自由度を持たないから結局 $\bar{H}_{AB} = U_A^{-1A'} H_{A'B'} U^{-TB'}{}_B$ が一般化計量の物理的自由度を持つ．

$$\begin{aligned} \bar{H}_{AB} &= U_A^{-1A'} H_{A'B'} U^{-TB'}{}_B \\ &= \begin{pmatrix} G^{-1} & -G^{-1}B \\ BG^{-1} & G - BG^{-1}B \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{628}$$

よって，以下では物理的な場として $\bar{H}_{AB}, d$ をとる．

二重場理論のゲージ代数　次にゲージ変換 δ_ξ のゲージ代数を求める．(423) で与えたように二重場理論ゲージ変換 δ_ξ は

$$\begin{aligned}\delta_\xi E_A &= [\xi, E_A] = \{\{\not{D}, \xi\}, E_A\} \ , \\ \delta_\xi d &= -\frac{1}{2}(\partial_A - F_A)\xi^A \ ,\end{aligned} \tag{629}$$

で定義される．

これを用いて，一般化多脚場に作用した際のゲージ代数を求める．

$$\begin{aligned}(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})E_A &= \frac{1}{2}(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1}E_A - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2}E_A) - \frac{1}{2}(\delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2}E_A - \delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1}E_A) \\ &= -\frac{1}{2}\{\{\{\not{D}^2, \xi_1\}, \xi_2\}, E_A\} + \frac{1}{2}\{\{\not{D}, \{\{\not{D}, \xi_1\}, \xi_2\}\}, E_A\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\{\{\not{D}^2, \xi_2\}, \xi_1\}, E_A\} - \frac{1}{2}\{\{\not{D}, \{\{\not{D}, \xi_2\}, \xi_1\}\}, E_A\} \\ &= -\frac{1}{2}\{\{\{\not{D}^2, \xi_1\}, \xi_2\}, E_A\} + \{\{\not{D}, [\![\xi_1, \xi_2]\!]\}, E_A\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\{\{\not{D}^2, \xi_2\}, \xi_1\}, E_A\} \\ &= -\frac{1}{2}\{\{\{\not{D}^2, \xi_1\}, \xi_2\}, E_A\} + \delta_{[\![\xi_1, \xi_2]\!]}E_A \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\{\{\not{D}^2, \xi_2\}, \xi_1\}, E_A\} \ .\end{aligned} \tag{630}$$

ここで $[\![\cdot, \cdot]\!]$ は計量亜代数の反対称化で定義されており

$$[\![\xi_1, \xi_2]\!] = \frac{1}{2}([\xi_1, \xi_2] - [\xi_2, \xi_1]) \ , \tag{631}$$

である．

以上の計算より一般化多脚場上のゲージ代数が

$$(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})E_A = \delta_{[\![\xi_1, \xi_2]\!]}E_A + D_{\xi_1\xi_2 A}{}^B E_B \ , \tag{632}$$

と得られる．ここで $D_{\xi_1\xi_2 A}{}^B$ は $\not{D}^2$ に比例する関数で

$$D_{\xi_1\xi_2 A}{}^B E_B = -\frac{1}{2}\{\{\{\not{D}^2, \xi_1\}, \xi_2\}, E_A\} + \frac{1}{2}\{\{\{\not{D}^2, \xi_2\}, \xi_1\}, E_A\} \ , \tag{633}$$

で定義される．$U_A{}^B$ の変換としては

$$\begin{aligned}(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})U_A{}^C &= \delta_{[\![\xi_1, \xi_2]\!]}U_A{}^C + D_{\xi_1\xi_2 A}{}^B U_B{}^C \ , \\ (\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})U^{-1}{}_A{}^C &= \delta_{[\![\xi_1, \xi_2]\!]}U^{-1}{}_A{}^C + U^{-1}{}_A{}^B D_{\xi_1\xi_2 B}{}^C \ ,\end{aligned} \tag{634}$$

となる．これを用いれば $\bar{H}_{AB}$ 上のゲージ代数が

$$\begin{aligned}(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})\bar{H}_{AB} &= \delta_{[\![\xi_1, \xi_2]\!]}\bar{H}_{AB} + U_A^{-1A'} D_{\xi_1\xi_2 A'}{}^{A''} H_{A''B'} U^{-TB'}{}_B \\ &\quad + U_A^{-1A'} H_{A'B''} D_{\xi_1\xi_2 B'}{}^{B''} U^{-TB'}{}_B \ ,\end{aligned} \tag{635}$$

と得られる．

次に一般化ディラトン上のゲージ代数を考える．5.5 節における一般化ディラトンのゲージ変換の議論と同様に

$$(|0\rangle, g_1\hat{K}|0\rangle)_A = c_0 \int dx \sqrt{\det \eta}\, e^{-2d} g_1 \ , \tag{636}$$

の両辺をゲージ変換することによって導出することができる．ここで g_1 は場によらない任意関数である．まず，左辺のゲージ変換を考える．

$$
\begin{aligned}
(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1}-\delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})(|0\rangle, g_1\hat{K}|0\rangle)_A &= ((\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1}-\delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})|0\rangle, g_1\hat{K}|0\rangle)_A + (|0\rangle, g_1(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1}-\delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})\hat{K}|0\rangle)_A \\
&= (\{\{\not{\mathcal{D}},\xi_1\},\{\not{\mathcal{D}},\xi_2\}\}|0\rangle, g_1\hat{K}|0\rangle)_A + (|0\rangle, g_1\{\{\not{\mathcal{D}},\xi_1\},\{\not{\mathcal{D}},\xi_2\}\}\hat{K}|0\rangle)_A \\
&= \Big((\{\not{\mathcal{D}},[\![\xi_1,\xi_2]\!]\} - \frac{1}{2}\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_1\},\xi_2\} + \frac{1}{2}\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_2\},\xi_1\})|0\rangle, g_1\hat{K}|0\rangle\Big)_A \\
&\quad +\Big(|0\rangle, g_1(\{\not{\mathcal{D}},[\![\xi_1,\xi_2]\!]\} - \frac{1}{2}\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_1\},\xi_2\} + \frac{1}{2}\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_2\},\xi_1\})\hat{K}|0\rangle\Big)_A \\
&= \delta_{[\![\xi_1,\xi_2]\!]}(|0\rangle, g_1\hat{K}|0\rangle)_A - (\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_{[1}\},\xi_{2]}\}|0\rangle, g_1\hat{K}|0\rangle)_A \\
&\quad -(|0\rangle, g_1\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_{[1}\},\xi_{2]}\}\hat{K}|0\rangle)_A \\
&= -2c_0\int dx\sqrt{\det\eta}(\delta_{[\![\xi_1,\xi_2]\!]}d)e^{-2d}g_1 \\
&\quad -(\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_{[1}\},\xi_{2]}\}|0\rangle, g_1\hat{K}|0\rangle)_A - (|0\rangle, g_1\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_{[1}\},\xi_{2]}\}\hat{K}|0\rangle)_A \ .
\end{aligned}
\tag{637}
$$

一方で右辺のゲージ変換を行えば

$$
(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1}-\delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})c_0\int dx\sqrt{\det\eta}e^{-2d}g_1 = -2c_0\int dx\sqrt{\det\eta}((\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1}-\delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})d)e^{-2d}g_1\ , \tag{638}
$$

を得る．以上で δ_ξ のゲージ代数が定まった．

δ_ξ のゲージ代数

δ_ξ のゲージ代数は次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1}-\delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})\bar{H}_{AB} &= \delta_{[\![\xi_1,\xi_2]\!]}\bar{H}_{AB} + U_A^{-1A'}D_{\xi_1\xi_2A'}{}^{A''}H_{A''B'}U^{-TB'}{}_B \\
&\quad +U_A^{-1A'}H_{A'B''}D_{\xi_1\xi_2B'}{}^{B''}U^{-TB'}{}_B\ ,
\end{aligned}
\tag{639}
$$

$$
(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1}-\delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})d = \delta_{[\![\xi_1,\xi_2]\!]}d + D_{\xi_1\xi_2}\ . \tag{640}
$$

ここで $D_{\xi_1\xi_2A}{}^BE_B, D_{\xi_1\xi_2}$ は $\not{\mathcal{D}}^2$ に比例する関数で

$$
D_{\xi_1\xi_2A}{}^BE_B = -\frac{1}{2}\{\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_1\},\xi_2\},E_A\} + \frac{1}{2}\{\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_2\},\xi_1\},E_A\}\ , \tag{641}
$$

$$
\begin{aligned}
2c_0\int dx\sqrt{\det\eta}e^{-2d}g_1D_{\xi_1\xi_2} &= (\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_{[1}\},\xi_{2]}\}|0\rangle, g_1\hat{K}|0\rangle)_A \\
&\quad +(|0\rangle, g_1\{\{\not{\mathcal{D}}^2,\xi_{[1}\},\xi_{2]}\}\hat{K}|0\rangle)_A\ ,
\end{aligned}
\tag{642}
$$

により定義される．g_1 は任意関数である．

L_∞ 代数による運動方程式と摂動展開　L_∞ 代数上で運動方程式を議論する．一般論として L_∞ 代数における運動方程式は (615) で導入したように場のべき展開の形で書かれる．一方で二重場理論では $U_A{}^B$ の逆行列などが含まれるため，そのままではべき展開することができない．

そこで，$\bar{H}_{AB}$ と d を以下のように摂動展開する．

$$\begin{aligned} G_{ab} &= s_{ad}(e^c)^d{}_b \ , \\ B_{ab} &= b_{ab} \ , \\ d &= d_0 + d' \ , \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (643) \\ (644) \\ (645) \end{aligned}$$

ただし，$c^a{}_b, b_{ab}, d'$ は微小量である．以下ではこれらを場として抽象的に $\Psi = (c^a{}_b, b_{ab}, d')$ と書くことにする．ゲージ変換は $\bar{H}_{AB}, d'$ のゲージ変換から決定することができる．

$$\delta_\xi \Psi = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\delta_\xi \Psi)^{(p)} \ , \tag{646}$$

ここで $(\delta_\xi \Psi)^{(p)}$ は摂動の p 次．これらの場に対して，運動方程式を書き下すことができる．実際には

$$U_A{}^B = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}s^{-1}c^T} & 0 \\ -e^c b & e^{\frac{1}{2}cs^{-1}} \end{pmatrix} \tag{647}$$

を運動方程式に代入すればよい．$U_A{}^B$ の決め方には任意性があるが，この自由度は作用を不変に保つため，どのようにとっても系は不変である．運動方程式は

$$\begin{aligned} \overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab} &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \overset{+-}{\mathcal{R}}{}^{(p)}_{ab} \ , \\ \mathcal{R} &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \mathcal{R}^{(p)} \ , \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (648) \\ (649) \end{aligned}$$

と置く．$\mathcal{R}^{(p)}_{ab}, \mathcal{R}^{(p)}$ は摂動の p 次．

摂動上のゲージ代数　この摂動の場の上でゲージ代数を考える．もし，$D_{\xi_1\xi_2 A}{}^B = D_{\xi_1\xi_2} = 0$ ならば，摂動の場の上で $\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2} - \delta_{[\![\xi_1,\xi_2]\!]}$ が成立する．このことから摂動の場 $\Psi = (c, b, d')$ に対して $\{\{\not{\mathcal{D}}^2, \xi_1\}, \xi_2\} = 0$ の時に消える関数 $d^{(p)}_{\xi_1\xi_2}$ を用いて

$$(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2} - \delta_{[\![\xi_1,\xi_2]\!]})\Psi = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} d^{(p)}_{\xi_1\xi_2} \ , \tag{650}$$

と書くことができる．ここで $d^{(p)}$ は摂動の p 次．

L_∞ の構成　ここまでで二重場理論に L_∞ を導入する準備ができた．L_∞ 代数の定義される空間 $\mathbb{X}$ を与える．

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{X} & = & \mathbb{X}_2 & \oplus & \mathbb{X}_1 & \oplus & \mathbb{X}_0 & \oplus & X_{-1} \\ & & \| & & \| & & \| & & \| \\ & & C^\infty(\mathbb{M}) & & T\mathbb{M} & & (\text{摂動の場}) & & \{b_0, \text{運動方程式}\} \\ & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ & & g_i & & \xi_i & & c_{ab}, b_{ab}, d' & & b_0, \overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab}, \mathcal{R} \end{array} \tag{651}$$

$\mathbb{X}_n$ の n は各空間の次数を表す．この上で L_∞ 代数の関数 b_n を定義する．まず，ゲージ変換，運動方程式によって決定している部分を見る．二重場理論のゲージ変換 (646) は

$$\delta_\xi \Psi = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\delta_\xi \Psi)^{(p)} \ , \tag{652}$$

と書ける一方で L_∞ 代数のゲージ変換 (621) では

$$\delta_\xi \Psi = [\xi]'_\infty = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} b_{p+1}(\xi, \Psi^p) \ . \tag{653}$$

よって，$p \geq 0$ について

$$b_{p+1}(\xi, \Psi^p) = (\delta_\xi \Psi)^{(p)} \ , \tag{654}$$

と決定する．運動方程式に関しては二重場理論からは (648)(649) で決まっている．

$$\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab} \ = \ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \overset{+-}{\mathcal{R}}{}^{(p)}_{ab} \ , \tag{655}$$

$$\mathcal{R} \ = \ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \mathcal{R}^{(p)} \ . \tag{656}$$

一方で L_∞ 代数では (623) より

$$\mathcal{F}(\Psi) = [\ \cdot\ ]'_\infty = b_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} b_p(\Psi^p) \ , \tag{657}$$

であるから b_p は $p \geq 1$ に対して

$$b_p(\Psi^p) = \overset{+-}{\mathcal{R}}{}^{(p)}_{ab} \oplus \mathcal{R}^{(p)} \tag{658}$$

である．

残りの b_n は計量亜代数の代数構造が自然に含まれるように決定する．(622) と (650) を比較する．

$$(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2})\Psi = \delta_{[\xi_1,\xi_2]'_\infty}\Psi + [\xi_1, \xi_2, \mathcal{F}]'_\infty \ . \tag{659}$$

$$(\delta_{\xi_2}\delta_{\xi_1} - \delta_{\xi_1}\delta_{\xi_2} - \delta_{[\![\xi_1,\xi_2]\!]})\Psi = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} d^{(p)}_{\xi_1\xi_2} \ . \tag{660}$$

二重場理論の代数構造は，運動方程式に寄らずに決定している．そこで，

$$b_2(\xi_1, \xi_2) \ = \ [\![\xi_1, \xi_2]\!] \ , \tag{661}$$

$$b_{2+p}(\xi_1, \xi_2, \Psi^p) \ = \ 0 \ , \ (p \geq 1) \tag{662}$$

$$b_{3+p}(\xi_1, \xi_2, b_0, \Psi^p) \ = \ d^{(p)}_{\xi_1\xi_2} \ , \ (p \geq 0) \tag{663}$$

$$b_{3+p}(\xi_1, \xi_2, (\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab} \oplus \mathcal{R}), \Psi^p) \ = \ 0 \ , \ (p \geq 0) \tag{664}$$

と与えることにする．さらに，Dirac 生成演算子を用いて

$$b_1(g_1) \ = \ \{\not{\mathcal{D}}, g_1\} \tag{665}$$

$$b_2(\xi, g_1) \ = \ \frac{1}{2}\{\{\not{\mathcal{D}}, g_1\}, \xi\} \tag{666}$$

$$b_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \ = \ -\frac{1}{2}\{\xi_{[1}, \{\{\not{\mathcal{D}}, \xi_2\}, \xi_{3]}\}\} \tag{667}$$

と決定する．さらに運動方程式のゲージ変換 (616) を思い出せば

$$\delta_\xi \mathcal{F} = [\delta_\xi \Psi]'_\infty = [\xi, \mathcal{F}]'_\infty \ , \tag{668}$$

であった．これより，二重場理論の運動方程式 $\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab} \oplus \mathcal{R}$ の変換は

$$\delta_\xi(\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab} \oplus \mathcal{R}) = [\xi, \overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab} \oplus \mathcal{R}]'_\infty + [\xi, b_0]'_\infty \ , \tag{669}$$

によって与えられる．このことから，

$$b_{2+p}(\xi, b_0, \Psi^p) \ , \ (p \geq 0) \tag{670}$$

は運動方程式のゲージ変換の共変性の破れを表す項である．

残りの b_n がどのように決まるか見るために，次数に着目する．例えば，$b_2(g_1, g_2)$ は全体で次数が 3 になるため $\mathbb{X}$ 上に存在できず，自明に 0 になる．b_n $B_i \in \mathbb{X}$ に対して

$$\mathrm{deg} b_n(B_1, \cdots, B_n) = -1 + \sum_i \mathrm{deg}(B_i) \ , \tag{671}$$

であるから，b_n の引数に $\mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_0$ を取る場合には

$$b_{1+p}(g_1, \Psi^p) \ , \ b_{1+p}(\xi, \Psi^p) \ , \ b_{2+p}(g_1, \xi, \Psi^p) \ , \ b_{2+p}(\xi_1, \xi_2, \Psi^p) \ , \ b_{3+p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \Psi^p) \ , \ (p \geq 0) \ , \tag{672}$$

以外は全て 0 になる．この中で，ここまでの議論に現れていない組み合わせを全て 0 に置く．

$$\begin{aligned} b_{1+p}(g_1, \Psi^p) &= 0 \ , \ (p \geq 1) && (673) \\ b_{2+p}(\xi, g_1, \Psi^p) &= 0 \ , (p \geq 1) && (674) \\ b_{3+p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \Psi^p) &= 0 \ .(p \geq 1) && (675) \end{aligned}$$

このとき，b_0 を含み，$\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab}, \mathcal{R}$ を含まない組み合わせは恒等式 (40) を用いて導出することができる．恒等式によって b_0 が含まれる項を導出できることは，恒等式を具体的に書き下した (44)(45)(46)(47) が b_0 を含まない項から b_0 を 1 つ含む項を作る式と見なせば明らかである．

$$\begin{aligned} b_2(b_0, g_1) &= -(\delta_{\{\not{D}, g_1\}} \Psi)^{(0)} \ , && (676) \\ b_3(g_1, g_2, b_0) &= -\frac{1}{2}\{\{\not{D}^2, g_1\}, g_2\} - \frac{1}{2}\{\{\not{D}^2, g_2\}, g_1\} \ , && (677) \\ b_3(b_0, \xi, g_1) &= -\{\{\not{D}^2, g_1\}, \xi\} \ , && (678) \\ b_4(b_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= -\{\{\{\not{D}^2, \xi_{[1}\}, \xi_2\}, \xi_{3]}\} \ , && (679) \\ b_4(b_0, \xi_1, \xi_2, g_1) &= 0 \ , && (680) \\ b_5(b_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= \{\{\{\{\not{D}^2, \xi_{[1}\}, \xi_2\}, \xi_3\}, \xi_{4]}\} && (681) \end{aligned}$$

これらの関数は $b_2(b_0, g_1)$ を除き，$\not{D}^2$ で構成されていることが見て取れる．

$b_2(b_0, g_1)$ に関しても，実は $\not{D}^2$ に依存した項であることが示せる．そのために一般化多脚場と一般化ディラトンのゲージ変換をゲージ変数 $\{\not{D}, g_1\}$ によって実行することを考える．

$$\begin{aligned} \delta_{\{\not{D}, g_1\}} E_A &= \{\{\not{D}, \{\not{D}, g_1\}\}, E_A\} = \{\{\not{D}^2, g_1\}, E_A\} \ , && (682) \\ \delta_{\{\not{D}, g_1\}} c_0 \int dx \sqrt{\det \eta} e^{-2d} g_2 &= (\{\not{D}, \{\not{D}, g_1\}\} |0\rangle , g_2 \hat{K} |0\rangle)_A + (|0\rangle , g_2 \{\not{D}, \{\not{D}, g_1\}\} \hat{K} |0\rangle)_A \\ &= (\{\not{D}^2, g_1\} |0\rangle , g_2 \hat{K} |0\rangle)_A + (|0\rangle , g_2 \{\not{D}^2, g_1\} \hat{K} |0\rangle)_A \ . && (683) \end{aligned}$$

このことから，$\{\not{D}^2, g_1\} = 0$ ならば

$$b_2(b_0, g_1) = -(\delta_{\{\not{D}, g_1\}} \Psi)^{(0)} = 0 \tag{684}$$

となる．故に $b_2(b_0, g_1)$ についても $\not{D}^2$ から構成される項である．

したがって，(670) (663) (678)(679)(680) (681)(684) より次のことが分かる．

b_0 の役割

二重場理論の L_∞ 代数について少なくとも $\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab}, \mathcal{R}$ を含まない部分に関しては，b_0 が運動方程式の共変性の破れと $\not{D}^2$ から作られる．

摂動を抽象的に計算できるのはここまでである．運動方程式の共変性の破れや $\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab}, \mathcal{R}$ を含む L_∞ 代数は運動方程式の具体的な形がなければ計算できない．そのため，さらに進んだ議論は今後の研究課題である．

以上の議論より，本節では以下のことが結論される．

- 二重場理論を L_∞ に自然に埋め込むためには $b_0 \neq 0$ が必要である．この結果は，計量亜代数の L_∞ についての先行研究 [39] と整合的である．
- 先行研究 [39] では運動方程式の議論がなされていない．これは標準的な二重場理論の作用が閉包条件がないと $O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変性を持たないため物理的な自由度が定義できず，摂動展開できないためである．本節では抽象的にではあるものの運動方程式が含まれる L_∞ 代数の構成方法を述べた．
- $\overset{+-}{\mathcal{R}}_{ab}, \mathcal{R}$ を含まない部分に関しては，b_0 が運動方程式の共変性の破れと $\not{D}^2$ から作られることを示した．運動方程式の共変性については具体的に摂動展開をしなければ，十分な理解ができないが，このことは b_0 が $\not{D}^2$ から構成できることを示唆している．

また，L_∞ 代数には内積の構造 (617) がある．二重場理論においてこの内積を具体的に構成することに成功していないが，今後の研究においてこの内積が構成できれば，自然に作用を導出できる可能性がある．

その際の運動方程式は

$$\mathcal{F} = b_0 + \overset{+-}{\mathcal{R}} \oplus \mathcal{R} , \tag{685}$$

となるから，$b_0 = 0$ のときに $\overset{+-}{\mathcal{R}} \oplus \mathcal{R}$ の作用がゲージ不変になることを示すことができるようになる．このことは標準的な二重場理論が閉包条件を満たすときにゲージ不変になることと整合的であるため，今後の研究で自然に L_∞ 代数によって二重場理論が記述できることが期待される．

8 二重場理論の作用:R-R セクター

ここまでの議論は NS-NS セクターに対してのみに限って議論を行った．しかし，超重力理論のボゾンセクターには NS-NS セクターの他に R-R セクターが存在する．故に，二重場理論に対しても R-R セクターが存在することが期待される．

二重場理論における R-R セクターの作用の構成は η_{MN} : 定数である標準的な二重場理論に対しては既に行われている [53]．この作用は，強い拘束条件 (178) の下で構成されている．

一方，η_{MN} が定数でない場合には WZW 二重場理論の文脈で提案がなされている [25]．WZW 二重場理論においても強い拘束条件を下に構成されている．そのため，6 章で行った T 双対性の議論を直接適用できない

そこで本章では，拘束条件のない R-R セクターの作用を Dirac 生成演算子 (253) を用いて構成する．

8.1 標準的な二重場理論における R-R セクターの作用

標準的な二重場理論における R-R セクターの作用は座標基底 ∂_N 上で構成される．座標基底の内積を用いて Clifford バンドルの基底 Γ_N を定義する．

$$\{\gamma_M, \gamma_N\} = 2\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^m{}_n \\ \delta_m{}^n & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{686}$$

Clifford バンドルの表現空間としてスピノル空間を与える．スピノルの真空 $|0^{(M)}\rangle$ は

$$\gamma_n |0^{(M)}\rangle = 0 \ , \ \ \langle 0^{(M)}|0^{(M)}\rangle = 1 \ , \tag{687}$$

で定義される．スピノル演算子 $A_+^{(M)}, K^{(M)}$ として

$$\begin{aligned} A_+^{(M)}\gamma_M A_+^{(M)-1} &= \gamma_M^\dagger \ , & (688)\\ K^{(M)}\gamma_M K^{(M)-1} &= H_M{}^N\gamma_N \ , & (689) \end{aligned}$$

を定義すれば，R-R セクターの作用 S^{RR}_{sDFT} は

$$S^{RR}_{sDFT} = \frac{1}{8}\int dX(\gamma^M\partial_M\chi^{(M)})^\dagger A_+^{(M)}K^{(M)}\gamma^N\partial_N\chi^{(M)} \ , \tag{690}$$

によって与えられる．ここで $O(D,D)$ スピノル場 $\chi^{(M)}$ は R-R セクターの場で Majorana Weyl スピノルである．

$$\begin{aligned} B_+^{(M)-1}\chi^{(M)*} &= \chi^{(M)} \ , & (691)\\ \bar{\gamma}^{(M)}\chi &= \mp\chi \ . & (692) \end{aligned}$$

$B_+^{(M)}, \bar{\gamma}^{(M)}$ は

$$\begin{aligned} B_+^{(M)}\gamma_M B_+^{(M)-1} &= \gamma_M^* \ , & (693)\\ \{\bar{\gamma}, \gamma_M\} &= 0 \ , & (694)\\ \bar{\gamma}^\dagger &= \bar{\gamma} \ , & (695)\\ \bar{\gamma}|0^M\rangle &= |0^{(M)}\rangle \ , & (696) \end{aligned}$$

を満たす．ここで (692) の符号は $-$ が IIA 型，$+$ が IIB 型になる．また，自己双対条件として

$$K^{(M)}\gamma^M\partial_M\chi = -\gamma^M\partial_M\chi \ , \tag{697}$$

が課される．

この作用を成分表示する．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}B_{mn}\gamma^{mn}}\gamma^M\partial_M\chi = \sum_{p=1}^{D}\frac{1}{\sqrt{2}^p p!}F^{RR}_{m_1\cdots m_p}\gamma^{m_1\cdots m_p}\left|0\right\rangle \ , \tag{698}$$

と定義すれば，作用は

$$S^{RR}_{sDFT} = -\frac{1}{4}\int dX\sqrt{\det g}\sum_{p=1}^{D}\frac{1}{p!}g^{m_1n_1}\cdots g^{m_pn_p}F^{RR}_{m_1\cdots m_p}F^{RR}_{n_1\cdots n_p} \ , \tag{699}$$

で与えられる．

この作用 S^{RR}_{sDFT} から超重力理論を得るには，NS-NS セクターの議論と同様に半分の座標 $\tilde{x}$ 依存性がないことを要請し，場を再定義すれば良いことが示されている [53]．

8.2 Dirac 生成演算子を用いた作用

本節では Dirac 生成演算子 (253) を用いて，拘束条件のない二重場理論の R-R セクターを構成する．二重場理論の作用には NS-NS セクターと同様に次の 2 つの性質があることを要請する．

二重場理論の R-R セクターに対する要請

- 作用に $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変性がある．
- 座標基底における $O(D,D)$ 計量と構造係数 ${\phi'_{LM}}^N$ が

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & {\delta^m}_n \\ {\delta_m}^n & 0 \end{pmatrix} \ , \ {\phi'_{LM}}^N = 0 \ , \tag{700}$$

ならば，標準的な二重場理論の作用 S^{RR}_{sDFT}(690) に一致する．

今，二重場理論には通常の Dirac 演算子によく似た演算子としてスピノル空間 $\mathbb{S}$ 上に Dirac 生成演算子 (253) が定義されている．Dirac 生成演算子は基底によらずに定義されているため，当然 $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変である．そこで，スピノル $\chi\in\mathbb{S}$ に Dirac 生成演算子を作用させて，内積を考えれば作用が得られることが期待される．二重場理論には A-内積 (853) と AK-内積 (862) が存在するから作用の候補としては

$$(\not{\mathcal{D}}\chi,\not{\mathcal{D}}\chi)_A \ , \ (\not{\mathcal{D}}\chi,\not{\mathcal{D}}\chi)_{AK} \ , \tag{701}$$

の 2 つが存在する．前者は $O(D,D)$ 不変，後者は $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変である．もし，$O(D,D)$ 不変な作用を採用すると一般化計量 H_{MN} の変分がこの作用に寄与を与えない．即ち，R-R セクターに対して計量と B 場の寄与が存在しないことになり，通常の R-R セクターの性質と異なる．そこで，本節では AK-内積を使った後者を作用として採用する．

二重場理論の R-R セクターの作用

二重場理論の R-R セクターの作用は

$$S_{DFT}^{RR} = \beta_{RR}(\not{\mathcal{D}}\chi, \not{\mathcal{D}}\chi)_{AK} \ , \tag{702}$$

で定義する．ここで β_{RR} は定数．ただし，χ は Majorana-Weyl スピノルで自己双対条件を満たす．即ち

$$\begin{aligned} B_+^{-1}\chi^* &= \chi \ , & (703)\\ \bar{\gamma}\chi &= \mp\chi \ , & (704)\\ K\not{\mathcal{D}}\chi &= -\not{\mathcal{D}}\chi \ , & (705) \end{aligned}$$

を満たす．$-$ が IIA 型，$+$ が IIB 型である．

8.3 標準的な二重場理論の R-R セクターへの簡約

本節では二重場理論の R-R セクターの作用 (702) が，標準的な二重場理論の仮定

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^m{}_n \\ \delta_m{}^n & 0 \end{pmatrix} \ , \ \phi'_{LM}{}^N = 0 \ , \tag{706}$$

の下で二重場理論の作用に一致することを示す．

一般化多脚場 $E_A{}^N$ は

$$E_A{}^M\eta_{MN}E^{TN}{}_B = \eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^a{}_b \\ \delta_a{}^b & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{707}$$

を満たすから，$O(D,D)$ 行列である．そのため $O(D,D)$ 行列 $O_A{}^B$ として

$$O_A{}^BE_B{}^N = \delta_A{}^N \ , \tag{708}$$

を満たすものが存在する．この $O_A{}^B$ を用いて新たに基底 $\breve{E}_A$ を定義する．

$$\breve{E}_A = O_A{}^BE_B = \delta_A{}^M\partial_M \ . \tag{709}$$

$\breve{E}_A$ は ∂_M の足を $\delta_A{}^M$ で読み替えただけであるが，スピノル表現を考える際に混乱を避けるために新しい基底として導入している．

また，$E_A{}^M$ の具体形 (197) を思い出せば

$$O_A{}^B = O_{2A}{}^CO_{1C}{}^B \ , \ O_2 = \begin{pmatrix} \delta^a{}_c & 0 \\ -o^{(2)}_{ac} & \delta_a{}^c \end{pmatrix} \ , \ O_1 = \begin{pmatrix} o^{(1)-Tc}{}_b & 0 \\ 0 & o^{(1)}{}_c{}^b \end{pmatrix} \ , \tag{710}$$

と置くことができる．この O_1, O_2 のスピノル表現を

$$\begin{aligned} S_{O_1} &= e^{-\frac{1}{2}\lambda^1{}_a{}^b\gamma^a{}_b} \ , \ ((e^{\lambda^1})_a{}^b = o^{(1)}{}_a{}^b) \ , & (711)\\ S_{O_2} &= e^{\frac{1}{4}o^{(2)}_{ab}\gamma^{ab}} \ , & (712) \end{aligned}$$

で定義する．この S_{O_1}, S_{O_2} は

$$S_{O_1}\gamma_A S_{O_1}^{-1} = O_{1A}{}^B\gamma_B \ , \ S_{O_2}\gamma_A S_{O_2}^{-1} = O_{2A}{}^B\gamma_B \ , \tag{713}$$

を満たす．故に $O_A{}^B$ に対するスピノル表現 S_O が与えられる．

$$S_O = S_{O_1}S_{O_2} \ , \ S_O\gamma_A S_O^{-1} = O_A{}^B\gamma_B \ . \tag{714}$$

スピノル演算子による Dirac 生成演算子

スピノル演算子 S_O を用いれば

$$(e^d S_O)^{-1}\not{D}(e^d S_O) = \gamma^A\delta_A{}^N\partial_N \ , \tag{715}$$

となる．

以下その証明を与える．まず，共変微分の変換 $O_A{}^{A'}S_O^{-1}\nabla_{E_{A'}}S_O$ を考える．スカラー f_1 に対して

$$\begin{aligned}
\{O_A{}^{A'}S_O^{-1}\nabla_{E_{A'}}S_O, \gamma_B\} &= O_A{}^{A'}S_O^{-1}\{\nabla_{E_{A'}}, S_O\gamma_B S_O^{-1}\}S_O \\
&= O_A{}^{A'}S_O^{-1}\{\nabla_{E_{A'}}, O_B{}^{B'}\gamma_{B'}\}S_O \\
&= O_A{}^{A'}S_O^{-1}(\rho(E_{A'})(O_B{}^{B'})\gamma_{B'} + O_B{}^{B'}W_{A'B'}{}^C\gamma_C)S_O \\
&= O_A{}^{A'}(\rho(E_{A'})(O_B{}^{B'})O^{-1}{}_{B'}{}^C + O_B{}^{B'}W_{A'B'}{}^C O^{-1}{}_{C'}{}^C)\gamma_C \\
&= \breve{W}_{AB}{}^C\gamma_C \ . \qquad (716) \\
\{O_A{}^{A'}S_O^{-1}\nabla_{E_{A'}}S_O, f_1\} &= O_A{}^{A'}S_O^{-1}\{\nabla_{E_{A'}}, f_1\}S_O \\
&= O_A{}^{A'}S_O^{-1}\rho(E_{A'})(f_1)S_O \\
&= \rho(\breve{E}_A)(f_1) \ . \qquad (717)
\end{aligned}$$

よって，$O_A{}^{A'}S_O^{-1}\nabla_{E_{A'}}S_O$ のスカラー部分のみ求めればよい．そこで，一般に $e^{\Lambda_{AB}\gamma^{AB}}$ による共変微分の変換 $e^{-\Lambda_{AB}\gamma^{AB}}\nabla_{E_A}e^{\Lambda_{AB}\gamma^{AB}}$ はスカラー部分を変えないことを示す．まず，微分演算子部分は

$$\begin{aligned}
e^{-\Lambda_{AB}\gamma^{AB}}\partial_{E_C}e^{\Lambda_{A'B'}\gamma^{A'B'}} &= \partial_{E_C} + [-\Lambda_{A_1B_1}\gamma^{A_1B_1}, \partial_{E_C}] \\
&\quad + \frac{1}{2}[-\Lambda_{A_2B_2}\gamma^{A_2B_2}, [\Lambda_{A_1B_1}\gamma^{A_1B_1}, \partial_{E_C}]] + \cdots \\
&= \partial_{E_C} + \rho(E_C)(\Lambda_{A_1B_1})\gamma^{A_1B_1} \\
&\quad + \frac{1}{2}[-\Lambda_{A_2B_2}\gamma^{A_2B_2}, \rho(E_C)(\Lambda_{A_1B_1})\gamma^{A_1B_1}] + \cdots \ ,
\end{aligned} \tag{718}$$

と変換する．また，2 つの γ^{AB} の括弧を計算してみれば

$$\{\gamma^{AB}, \gamma^{CD}\} = -4\eta^{A[C|}\gamma^{B|D]} + 4\eta^{B[C|}\gamma^{A|D]} \ , \tag{719}$$

となって，常に γ^{AB} の形で閉じることが分かる．したがって，$\nabla_{E_A} = \partial_A - \frac{1}{4}W_{ABC}\gamma^{BC}$ を S_O で変換をしてもスカラー部分は現れない．以上の結果より

$$O_A{}^{A'}S_O^{-1}\nabla_{E_{A'}}S_O = \partial_{\breve{E}_A} - \breve{W}_{ABC}\gamma^{BC} \ , \tag{720}$$

が従う．これを用いて Dirac 生成演算子の変換を求めることができる．

$$
\begin{aligned}
S_O^{-1}\not{D}S_O &= S_O^{-1}\frac{1}{2}\gamma^A\nabla_{E_A}S_O \\
&= \frac{1}{2}\gamma^D O_D{}^A S_O^{-1}\nabla_{E_A}S_O \\
&= \frac{1}{2}\gamma^D(\partial_{\breve{E}_D} - \breve{W}_{DBC}\gamma^{BC}) \\
&= \frac{1}{2}\gamma^D\partial_{\breve{E}_D} - \frac{1}{24}\breve{F}_{DBC}\gamma^{DBC} - \frac{1}{4}\gamma^B\breve{F}_B \ . \qquad (721)
\end{aligned}
$$

ここに現れた $\breve{F}_{ABC}, \breve{F}_A$ は $F_{LMN} = 0, F_M = 2\rho(E_M)(d)$ であることと $\breve{E}_A{}^M = O_A{}^B E_A{}^M = \delta_A{}^M$ を用いれば容易に導出でき，

$$
\breve{F}_{ABC} = 0 \ , \ \breve{F}_A = 2\rho(\breve{E}_A)(d) \ , \qquad (722)
$$

と得られる．以上より，Dirac 生成演算子のスピノル演算子による変換は

$$
S_O^{-1}\not{D}S_O = \frac{1}{2}\gamma^A\delta_A{}^M\partial_M - \frac{1}{2}\gamma^A\delta_A{}^M\rho(E_M)(d) \ , \qquad (723)
$$

と求められる．最後にディラトンの寄与を取り除くために e^d で挟めば

$$
(e^d S_O)^{-1}\not{D}(e^d S_O) = \gamma^A\delta_A{}^N\partial_N \ , \qquad (724)
$$

が得られる．以上で (715) が証明された．

次に (715) を用いて作用を変形する．

$$
\not{D}_0 := (e^d S_O)^{-1}\not{D}(e^d S_O) = \gamma^A\delta_A{}^N\partial_N \ , \qquad (725)
$$

と置く．

$$
\begin{aligned}
S_{DFT}^{RR} &= \beta_{RR}(\not{D}\chi, \not{D}\chi)_{AK} \\
&= \beta_{RR}(\not{D}\chi)^\dagger\hat{A}_+\hat{K}\not{D}\chi \\
&= \beta_{RR}((e^d S_O)\not{D}_0(e^d S_O)^{-1}\chi)^\dagger\hat{A}_+\hat{K}(e^d S_O)\not{D}_0(e^d S_O)^{-1}\chi \\
&= \beta_{RR}(S_{O_2}\not{D}_0\breve{\chi})^\dagger e^d S_{O_1}^\dagger\hat{A}_+\hat{K}(e^d S_{O_1}S_{O_2})\not{D}_0\breve{\chi} \\
&= \beta_{RR}(S_{O_2}\not{D}_0\breve{\chi})^\dagger e^{2d}\hat{A}_+ S_{O_1}^{-1}\hat{K}S_{O_1}(S_{O_2}\not{D}_0\breve{\chi}) \ . \qquad (726)
\end{aligned}
$$

ただし，$\breve{\chi} = (e^d S_O)^{-1}\chi$ とおいた．

この作用を標準的な二重場理論 (699) と比較するために，成分表示を与える．

$$
\sqrt{2}S_{O_2}\not{D}_0\breve{\chi} = \sum_{p=1}^{D}\frac{1}{\sqrt{2}^p p!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\gamma^{a_1\cdots a_p}\left|0\right\rangle \ . \qquad (727)
$$

このように取ったのは (698) と非常に良い対応があるからである．

$$
\sqrt{2}S_{O_2}\not{D}_0\breve{\chi} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}B_{mn}\delta_a^m\delta_b^n\gamma^{ab}}\gamma^A\delta_A{}^M\partial_M\breve{\chi} \ . \qquad (728)
$$

さて，作用 S_{DFT}^{RR} を成分表示する．

$$
\begin{aligned}
S_{DFT}^{RR} &= \beta_{RR}(S_{O_2}\not{\partial}_0\breve{\chi})^\dagger e^{2d}\hat{A}_+ S_{O_1}^{-1}\hat{K}S_{O_1}(S_{O_2}\not{\partial}_0\breve{\chi}) \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}\Big(\sum_{p=1}^{D}\frac{1}{\sqrt{2}^p p!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\gamma^{a_1\cdots a_p}|0\rangle\Big)^\dagger e^{2d}\hat{A}_+ S_{O_1}^{-1}\hat{K}S_{O_1} \\
&\quad \Big(\sum_{q=1}^{D}\frac{1}{\sqrt{2}^q q!}\breve{F}^{RR}_{b_1\cdots b_q}\gamma^{b_1\cdots b_q}|0\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}\sum_{p,q=1}^{D}\frac{1}{\sqrt{2}^{p+q}p!q!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\breve{F}^{RR}_{b_1\cdots b_q}\langle 0|e^{2d}\gamma^{a_1\cdots a_p\dagger}\hat{A}_+ S_{O_1}^{-1}\hat{K}S_{O_1}\gamma^{b_1\cdots b_q}|0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}\sum_{p,q=1}^{D}\frac{1}{\sqrt{2}^{p+q}p!q!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\breve{F}^{RR}_{b_1\cdots b_q}\langle 0|e^{2d}\hat{A}_+\gamma^{a_p\cdots a_1}S_{O_1}^{-1}\hat{K}S_{O_1}\gamma^{b_1\cdots b_q}|0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}\sum_{p,q=1}^{D}\frac{1}{\sqrt{2}^{p+q}p!q!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\breve{F}^{RR}_{b_1\cdots b_q}\langle 0|e^{2d}\hat{A}_+ S_{O_1}^{-1}\hat{K}S_{O_1}\gamma_{c_p\cdots c_1}g^{c_1a_1}\cdots g^{c_pa_p}\gamma^{b_1\cdots b_q}|0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}\sum_{p=1}^{D}\frac{1}{p!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\breve{F}^{RR}_{c_1\cdots c_p}g^{c_1a_1}\cdots g^{c_pa_p}\langle 0|S_{O_1}^\dagger e^{2d}\hat{A}_+\hat{K}S_{O_1}|0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}\sum_{p=1}^{D}\frac{1}{p!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\breve{F}^{RR}_{c_1\cdots c_p}g^{c_1a_1}\cdots g^{c_pa_p}\sqrt{|\det g_{mn}|}e^{2d}\langle 0|\hat{A}_+\hat{K}|0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}c_0\int dX\sqrt{\det\eta}e^{-2d}\sum_{p=1}^{D}\frac{1}{p!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\breve{F}^{RR}_{c_1\cdots c_p}g^{c_1a_1}\cdots g^{c_pa_p}\sqrt{|\det g_{mn}|}e^{2d} \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}c_0\int dX\sqrt{|\det g_{mn}|}\sum_{p=1}^{D}\frac{1}{p!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\breve{F}^{RR}_{c_1\cdots c_p}g^{c_1a_1}\cdots g^{c_pa_p}\ .
\end{aligned}
\tag{729}
$$

ここで g^{ab} は

$$
g^{ab} = g^{mn}\delta^a_m\delta^b_n\ , \tag{730}
$$

で定義される．また，

$$
S_{O_1}|0\rangle = |\det g_{mn}|^{\frac{1}{4}}|0\rangle\ , \tag{731}
$$

以上の結果より作用は $\beta_{RR} = \frac{1}{2c_1}$ に選べば

$$
S_{DFT}^{RR} = -\frac{1}{4}\int dX\sqrt{|\det g_{mn}|}\sum_{p=1}^{D}\frac{1}{p!}\breve{F}^{RR}_{m_1\cdots m_p}\breve{F}^{RR}_{n_1\cdots n_p}g^{m_1n_1}\cdots g^{m_pn_p}\ , \tag{732}
$$

で与えられる．ここで $\breve{F}^{RR}_{m_1\cdots m_p} = \breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\delta^{a_1}_{m_1}\cdots\delta^{a_p}_{m_p}$ で定義される．また，$\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}$ は

$$
\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}B_{mn}\delta^m_a\delta^n_b\gamma^{ab}}\gamma^A\delta_A{}^M\partial_M\breve{\chi} = \sum_{p=1}^{D}\frac{1}{\sqrt{2}^p p!}\breve{F}^{RR}_{a_1\cdots a_p}\gamma^{a_1\cdots a_p}|0\rangle\ , \tag{733}
$$

で与えられる．したがって，$\gamma^A\delta_A{}^M \leftrightarrow \gamma^M$ と対応付ければこの作用は標準的な二重場理論の R-R セクター (698)(699) と完全に一致する．故に，R-R セクターの作用 (702) は標準的な二重場理論の R-R セクターを含む．

この議論から β_{RR} が決定した．

定数 β_{RR} の決定

二重場理論の R-R セクターとして導入した作用 (702) は定数 β_{RR} を

$$\beta_{RR} = -\frac{1}{2c_0} \ , \tag{734}$$

と決定すれば，標準的な二重場理論における R-R セクターの作用 (699) を含む．

以上より，二重場理論の R-R セクターの構成ができた．

$$S^{RR}_{DFT} = -\frac{1}{2c_0}(\not{D}\chi, \not{D}\chi)_{AK} = -\frac{1}{2c_0}(\not{D}\chi)^{\dagger}\hat{A}_+\hat{K}\not{D}\chi \ . \tag{735}$$

この作用は標準的な二重場理論の R-R セクターへ簡約することができる．標準的な二重場理論については超重力理論に簡約できることが示されているため [53]，ここで導入した R-R セクターの作用 S^{RR}_{DFT} は超重力理論に簡約可能である．

8.4 R-R セクターにおける $O(1,9) \times O(9,1)$ 不変性

本節では NS-NS セクターに存在した局所ローレンツ不変性である $O(1,9) \times O(9,1)$ 不変性を R-R セクターの作用 S^{RR}_{DFT}(735) において議論する．その結果，$O(1,9) \times O(9,1)$ のうち時間部分の交換 $\gamma^0 \Rightarrow \pm\gamma_0$ を伴う連結成分に対しては作用が符号を変えてしまい，不変に保たれないことが確認できる．

まず，$O(1,9) \times O(9,1)$ 変換を議論しやすくするために $O(1,9), O(9,1)$ で独立に回転する基底 $\hat{\Gamma}_A = (\hat{\Gamma}^a, \hat{\Gamma}_a)$ を用いる．

$$\begin{pmatrix} \hat{\Gamma}^a \\ \hat{\Gamma}_a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \delta^a{}_b & s^{ab} \\ -s_{ab} & \delta_a{}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^a \\ \gamma_a \end{pmatrix} \ . \tag{736}$$

付録 B におけるスピノル表現の構成も同じ基底を用いている．この基底上の一般の $O(1,9)\times O(9,1)$ 変換は

$$\hat{\Gamma}_A = \begin{pmatrix} a^a{}_b & 0 \\ 0 & d_a{}^b \end{pmatrix}{}_A{}^B \hat{\Gamma}_B \ , \ (as^{-1}a^T = s^{-1}, dsd^T = s) \ , \tag{737}$$

で与えられる．

$O(1,9) \times O(9,1)$ のうち単位元近傍の変換は

$$\hat{\Gamma}'_A = \exp(\Lambda\eta^{-1})_A{}^B\hat{\Gamma}_B \ , \ (\Lambda_{AB} + \Lambda_{BA} = 0, \Lambda_A{}^C H_{CB} + H_A{}^C \Lambda^T_{CB} = 0) \ , \tag{738}$$

と書くことができる．この変換のスピノル表現は $S^{(\pm)}_\Lambda$ の 2 つ存在して

$$S^{(\pm)}_\Lambda = \pm\exp(-\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB}) \ , \tag{739}$$

$$S^{(\pm)}_\Lambda \hat{\Gamma}_A S^{(\pm)-1}_\Lambda = \exp(\Lambda\eta^{-1})_A{}^B\hat{\Gamma}_B \ , \tag{740}$$

で与えられる．

単位元近傍の $O(1,9) \times O(9,1)$ のスピノル表現 $S^{(\pm)}_\Lambda$ を用いて R-R セクターを

$$\not{D}\chi \to S^{(\pm)}_\Lambda \not{D}\chi \ , \tag{741}$$

と変換した時に作用 $S^{RR}_{DFT}(735)$ は不変である．

$$
\begin{aligned}
(S^{RR}_{DFT})' &= -\frac{1}{2c_0}(S^{(\pm)}_\Lambda \not{D}\chi)^\dagger \hat{A}_+ \hat{K} S^{(\pm)}_\Lambda \not{D}\chi \\
&= -\frac{1}{2c_0}\Big(\pm\exp(-\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB})\not{D}\chi\Big)^\dagger \hat{A}_+ \hat{K}\Big(\pm\exp(-\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'})\not{D}\chi\Big) \\
&= -\frac{1}{2c_0}(\not{D}\chi)^\dagger \exp(-\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB})^\dagger \hat{A}_+ \hat{K}\exp(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'})\not{D}\chi \\
&= -\frac{1}{2c_0}(\not{D}\chi)^\dagger \hat{A}_+ \exp(-\frac{1}{4}\Lambda^T_{AB}\hat{\Gamma}^{AB})\hat{K}\exp(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'})\not{D}\chi \\
&= -\frac{1}{2c_0}(\not{D}\chi)^\dagger \hat{A}_+ \hat{K}\exp(-\frac{1}{4}\Lambda^T_{AB}H^A{}_{A''}H^B{}_{B''}\hat{\Gamma}^{A''B''})\exp(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'})\not{D}\chi \\
&= -\frac{1}{2c_0}(\not{D}\chi)^\dagger \hat{A}_+ \hat{K}\exp(-\frac{1}{4}\Lambda_{A''B''}\hat{\Gamma}^{A''B''})\exp(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'})\not{D}\chi \\
&= -\frac{1}{2c_0}(\not{D}\chi)^\dagger \hat{A}_+ \hat{K}\not{D}\chi \ . \qquad (742)
\end{aligned}
$$

したがって，$O(1,9)\times O(9,1)$ 変換のうち，$S^{(\pm)}_\Lambda$ の積で書くことができる単位元に連結な成分による変換では作用は不変である．

次に非連結成分に関して調べる．そのために離散変換

$$
\hat{\Gamma}_A \Rightarrow -\hat{\Gamma}_A \ , \ (A : \mathrm{fix}) \qquad (743)
$$

を考える．今，$\hat{\Gamma}_A$ が 20 個あるからこの離散変換も 20 個定義できる．この変換を $O^{(a)}, O_{(a)}$ の 10 個ずつ各々以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
O^{(a)aC}\hat{\Gamma}_C &= -\hat{\Gamma}^a \ , && (744)\\
O^{(a)}{}_B{}^C\hat{\Gamma}_C &= \hat{\Gamma}_B, \ (\hat{\Gamma}_B \neq \hat{\Gamma}^a) \ , && (745)\\
O_{(a)a}{}^C\hat{\Gamma}_C &= -\hat{\Gamma}_a \ , && (746)\\
O_{(a)B}{}^C\hat{\Gamma}_C &= \hat{\Gamma}_B \ , \ (\hat{\Gamma}_B \neq \hat{\Gamma}_a) \ . && (747)
\end{aligned}
$$

これらの変換のマヨラナ表現 $S^{(\pm)}_{O^{(a)}}, S^{(\pm)}_{O_{(a)}}$ は以下で与えることができる．

$$
\begin{aligned}
S^{(\pm)}_{O^{(0)}} &= \pm\sigma_2\otimes\sigma_3^{\otimes 9} && (748)\\
S^{(\pm)}_{O^{(1)}} &= \pm i\sigma_1\otimes\sigma_3^{\otimes 9} && (749)\\
S^{(\pm)}_{O^{(2)}} &= \pm i1\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3^{\otimes 8} && (750)\\
S^{(\pm)}_{O^{(3)}} &= \pm i1\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3^{\otimes 8} && (751)\\
S^{(\pm)}_{O^{(4)}} &= \pm i1^{\otimes 2}\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3^{\otimes 7} && (752)\\
S^{(\pm)}_{O^{(5)}} &= \pm i1^{\otimes 2}\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3^{\otimes 7} && (753)\\
S^{(\pm)}_{O^{(6)}} &= \pm i1^{\otimes 3}\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3^{\otimes 6} && (754)\\
S^{(\pm)}_{O^{(7)}} &= \pm i1^{\otimes 3}\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3^{\otimes 6} && (755)\\
S^{(\pm)}_{O^{(8)}} &= \pm i1^{\otimes 4}\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3^{\otimes 5} && (756)\\
S^{(\pm)}_{O^{(9)}} &= \pm i1^{\otimes 4}\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3^{\otimes 5} && (757)\\
S^{(\pm)}_{O_{(0)}} &= \pm i1^{\otimes 5}\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3^{\otimes 4} && (758)\\
S^{(\pm)}_{O_{(1)}} &= \pm 1^{\otimes 5}\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3^{\otimes 4} && (759)\\
S^{(\pm)}_{O_{(2)}} &= \pm 1^{\otimes 6}\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3^{\otimes 4} && (760)\\
S^{(\pm)}_{O_{(3)}} &= \pm 1^{\otimes 6}\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3^{\otimes 3} && (761)\\
S^{(\pm)}_{O_{(4)}} &= \pm 1^{\otimes 7}\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3^{\otimes 2} && (762)\\
S^{(\pm)}_{O_{(5)}} &= \pm 1^{\otimes 7}\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3^{\otimes 2} && (763)\\
S^{(\pm)}_{O_{(6)}} &= \pm 1^{\otimes 8}\otimes\sigma_2\otimes\sigma_3 && (764)\\
S^{(\pm)}_{O_{(7)}} &= \pm 1^{\otimes 8}\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3 && (765)\\
S^{(\pm)}_{O_{(8)}} &= \pm 1^{\otimes 9}\otimes\sigma_2 && (766)\\
S^{(\pm)}_{O_{(9)}} &= \pm 1^{\otimes 9}\otimes\sigma_1 && (767)
\end{aligned}
$$

これらの演算子による変換は以下を満たす．

$$
\begin{aligned}
S^{(\pm)}_{O^{(0)}}{}^{\dagger}\hat{A}_+\hat{K}S^{(\pm)}_{O^{(0)}} &= -\hat{A}_+\hat{K} && (768)\\
S^{(\pm)}_{O^{(n)}}{}^{\dagger}\hat{A}_+\hat{K}S^{(\pm)}_{O^{(n)}} &= \hat{A}_+\hat{K}\ ,\ (n\neq 0)\ , && (769)\\
S^{(\pm)}_{O_{(0)}}{}^{\dagger}\hat{A}_+\hat{K}S^{(\pm)}_{O_{(0)}} &= -\hat{A}_+\hat{K} && (770)\\
S^{(\pm)}_{O_{(n)}}{}^{\dagger}\hat{A}_+\hat{K}S^{(\pm)}_{O_{(n)}} &= \hat{A}_+\hat{K}\ ,\ (n\neq 0)\ . && (771)\\
& && (772)
\end{aligned}
$$

したがって，ここで考えた 20 個の離散変換のうち $O^{(0)}, O_{(0)}$ に対応する 2 つの変換

$$\not{D}\chi\to S^{(\pm)}_{O^{(0)}}\not{D}\chi\ ,\not{D}\chi\to S^{(\pm)}_{O_{(0)}}\not{D}\chi\ , \tag{773}$$

によって作用の符号が $S^{RR}_{DFT}\to -S^{RR}_{DFT}$ と変わる．$O(1,9), O(9,1)$ は各々$O^{(0)}, O_{(0)}$ によって異な

る連結成分に移る[5]．したがって，$O(1,9)\times O(9,1)$ のうち $O^{(0)},O_{(0)}$ を含まない連結成分，または $O^{(0)},O_{(0)}$ の両方を含む連結成分でのみ作用は不変である．

ただし，R-R セクターの解は自己双対条件が課されることを考慮すれば運動方程式の解 $\not{D}\chi=F_{sol}$ が得られたときに任意の $C\in O(1,9)\times O(9,1)$ に対してそのスピノル表現 $S_C^{(\pm)}$ を用いて $\not{D}\chi=S_C^{(\pm)}F_{sol}$ も解になる．以下では (i)C が $O^{(0)}$ を含む場合，(ii)C が $O_{(0)}$ を含む場合の 2 つに分けて議論する．

(i)C が $O^{(0)}$ を含む場合

S_C は $O^{(0)},O_{(0)}$ の両方を含む連結成分 C' を用いて

$$S_C=S_{C'}S^{(+)}_{O_{(0)}}\ , \tag{774}$$

と分解できる．一方で，$\hat{K}$ は $S_{O_{(n)}}$ を用いて

$$\hat{K}=-S^{(+)}_{O_{(9)}}S^{(+)}_{O_{(8)}}\cdots S^{(+)}_{O_{(0)}}\ , \tag{775}$$

と書くことができる．これを使えば

$$\begin{aligned}S_CF_{sol} &= S_{C'}S_{O_{(0)}}F_{sol}\\ &= -S_{C'}S^{(+)\ -1}_{O_{(1)}}S^{(+)\ -1}_{O_{(2)}}\cdots S^{(+)\ -1}_{O_{(9)}}\hat{K}F_{sol}\\ &= S_{C'}S^{(+)\ -1}_{O_{(1)}}S^{(+)\ -1}_{O_{(2)}}\cdots S^{(+)\ -1}_{O_{(9)}}F_{sol}\ ,\end{aligned} \tag{776}$$

上の作用の対称性についての議論によって $\not{D}\chi\to S_{C'}S^{(+)\ -1}_{O_{(1)}}S^{(+)\ -1}_{O_{(2)}}\cdots S^{(+)\ -1}_{O_{(9)}}\not{D}\chi$ の変換によって作用は不変であるから $\not{D}\chi=S_CF_{sol}$ は運動方程式の解になる．

(ii)C が $O_{(0)}$ を含む場合

S_C は $O^{(0)},O_{(0)}$ を含まない連結成分 C' を用いて

$$S_C=S_{C'}S^{(+)}_{O_{(0)}}\ , \tag{777}$$

と分解できる．以降は (i) の場合と全く同様に

$$\begin{aligned}S_CF_{sol} &= S_{C'}S_{O_{(0)}}F_{sol}\\ &= -S_{C'}S^{(+)\ -1}_{O_{(1)}}S^{(+)\ -1}_{O_{(2)}}\cdots S^{(+)\ -1}_{O_{(9)}}\hat{K}F_{sol}\\ &= -S_{C'}S^{(+)\ -1}_{O_{(1)}}S^{(+)\ -1}_{O_{(2)}}\cdots S^{(+)\ -1}_{O_{(9)}}F_{sol}\ ,\end{aligned} \tag{778}$$

と書くことができることから，S_CF_{sol} は運動方程式の解になる．

自己双対条件に関しては C によって符号が変わる可能性がある．

$$\hat{K}S_CF_{sol}=\pm S_CF_{sol}\ , \tag{779}$$

となる．ただし，元々 $\hat{K}$ の符号には任意性があるから重要な違いではない．

[5] ローレンツ群 $O(1,3)$ と対応付ければ $O^{(0)},O_{(0)}$ はそれぞれ時間反転に対応する変換である．

最後に本節の結果をまとめる．

R-R セクターの $O(1,9)\times O(9,1)$ 変換に関して

- R-R セクターの作用 (735) は $C\in O(1,9)\times O(9,1)$ による R-R セクターの変換

$$\not{D}\chi \to S_C\not{D}\chi \tag{780}$$

　のうち，C が $O^{(0)},O_{(0)}$ を含まない連結成分，または $O^{(0)},O_{(0)}$ の両方を含む連結成分に属する場合のみ作用は不変である．特に，$C\in O(1,9)\times O(9,1)$ が単位元を含む連結成分に属する場合は作用は不変である．

- R-R セクターが $\not{D}\chi=F_{sol}$ を解に持つ時は一般の $C\in O(1,9)\times O(9,1)$ に対して

$$\not{D}\chi = S_C F_{sol}\ , \tag{781}$$

　も解になる．

8.5 RR セクターにおける Poisson-Lie T 双対性

6 章において NS-NS セクターの非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性を二重場理論を用いて導出した．本節では残りのボソン部分である R-R セクターに対して，本章で導入した作用 S^{RR}_{DFT}(735) を用いて Poisson-Lie T 双対性を導出する．

R-R セクターの次元簡約 (1)

まず，座標 $X^M=(\bar{x}_m,x^m)$ のうち x^m の座標依存性を持つ作用を得ることを考える．(710) と同様に $\hat{O}$ を定義する．

$$\delta_A{}^M=\hat{O}_{2A}{}^C\hat{O}_{1C}{}^B\begin{pmatrix}\hat{e}^{-T}{}^b{}_n & 0\\ 0 & \hat{e}_b{}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n{}_m & 0\\ \hat{B}_{nm} & 1_n{}^m\end{pmatrix}\ . \tag{782}$$

ここで $\hat{e},\hat{B}$ は Poisson-Lie T 双対性に現れる多脚場と B 場で

$$\hat{e}^{-1}s\hat{e}^{-T}+\hat{B}=L^{-1}\frac{1}{\frac{1}{G_0+B_0}+\Pi}L^{-T}\ , \tag{783}$$

である．$\hat{O}_1,\hat{O}_2$ は多脚場からの寄与と B 場からの寄与であり次の形をとる．

$$\hat{O}_2=\begin{pmatrix}\delta^a{}_c & 0\\ -\hat{o}^{(2)}_{ac} & \delta_a{}^c\end{pmatrix}\ ,\ \hat{O}_1=\begin{pmatrix}\hat{o}^{(1)-T}{}^c{}_b & 0\\ 0 & \hat{o}^{(1)}{}_c{}^b\end{pmatrix}\ . \tag{784}$$

この $\hat{O}_1$ のスピノル表現 $S_{\hat{O}_1}$ と (575) (578) に現れるディラトン $\hat{d}=d+\frac{1}{2}\log\det R$ を用いて R-R セクター $\hat{F}_{a_1\cdots a_p}$ を

$$\hat{F}=\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}}p!}\hat{F}_{a_1\cdots a_p}\gamma^{a_1\cdots a_p}\left|0\right\rangle=e^{-\hat{d}}S^{-1}_{\hat{O}_1}\not{D}\chi\ , \tag{785}$$

と与える．この $\hat{F}_{a_1\cdots a_p}$ を用いて，R-R セクターの作用を与えれば，

$$
\begin{aligned}
S_{RR} &= \beta_{RR}(\not{D}\chi,\not{D}\chi)_{AK} \\
&= \beta_{RR}(e^{\hat{d}}S_{\hat{O}_1}\hat{F},e^{\hat{d}}S_{\hat{O}_1}\hat{F})_{AK} \\
&= \beta_{RR}(e^{\hat{d}}S_{\hat{O}_1}\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}n!}}\hat{F}_{a_1\cdots a_n}\gamma^{a_1\cdots a_n}\left|0\right\rangle,e^{\hat{d}}S_{\hat{O}_1}\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}n!}}\hat{F}_{b_1\cdots b_n}\gamma^{b_1\cdots b_n}\left|0\right\rangle)_{AK} \\
&= \beta_{RR}(S_{\hat{O}_1}\hat{F}_{a_1\cdots a_n}\gamma^{a_1\cdots a_n}\left|0\right\rangle,e^{2\hat{d}}S_{\hat{O}_1}\frac{1}{2^{n+1}n!}\hat{F}_{b_1\cdots b_n}\gamma^{b_1\cdots b_n}\left|0\right\rangle)_{AK} \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}(S_{\hat{O}_1}\left|0\right\rangle,S_{\hat{O}_1}\left|0\right\rangle)_{AK}e^{2\hat{d}}\hat{G}^{a_1b_1}\cdots\hat{G}^{a_nb_n}\hat{F}_{a_1\cdots a_n}\hat{F}_{b_1\cdots b_n} \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}(\left|0\right\rangle,\left|0\right\rangle)_{AK}\sqrt{\det\hat{G}_{ab}}e^{2\hat{d}}\hat{G}^{a_1b_1}\cdots\hat{G}^{a_nb_n}\hat{F}_{a_1\cdots a_n}\hat{F}_{b_1\cdots b_n} \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}c_0\int dX\sqrt{\det\eta_{MN}}e^{-2d}\sqrt{\det\hat{G}_{ab}}e^{2\hat{d}}\hat{G}^{a_1b_1}\cdots\hat{G}^{a_nb_n}\hat{F}_{a_1\cdots a_n}\hat{F}_{b_1\cdots b_n} \\
&= -\frac{1}{4}\int dX\det R^{-1}\det\bar{L}^{-1}e^{-2d}\sqrt{\det\hat{G}_{ab}}e^{2\hat{d}}\hat{G}^{a_1b_1}\cdots\hat{G}^{a_nb_n}\hat{F}_{a_1\cdots a_n}\hat{F}_{b_1\cdots b_n} \\
&= -\frac{1}{4}\int dX\det\bar{L}^{-1}\sqrt{\det\hat{G}_{ab}}\hat{G}^{a_1b_1}\cdots\hat{G}^{a_nb_n}\hat{F}_{a_1\cdots a_n}\hat{F}_{b_1\cdots b_n}\ ,
\end{aligned}
\tag{786}
$$

を得る．ここで

$$\hat{G}_{ab}=\delta_a^m\delta_b^n\hat{G}_{mn} \tag{787}$$

である．$\hat{F}_{a_1\cdots a_p}$ が x^m 依存性のみを持つ場合には $\bar{x}_m$ が積分測度にしか寄与を持たず $\int d\bar{x}\det\bar{L}^{-1}$ が分離する．この寄与は NS-NS セクターでも現れており，作用全体が $\int d\bar{x}\det\bar{L}^{-1}$ 倍されるだけで運動方程式への寄与はない．また，$\int d\bar{x}\det\bar{L}^{-1}$ は NS-NS セクターにおいても現れていた係数であり，即ち，NS-NS セクターとの相対係数も正しく得られる．

ここで 6 章と同様に二重場理論上での R-R セクターの解が定数 $F^{(0)}_{a_1\cdots a_p}$ を用いて

$$\not{D}\chi=\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}p!}}F^{(0)}_{a_1\cdots a_p}\gamma^{a_1\cdots a_p}\left|0\right\rangle=:F^{(0)}\ , \tag{788}$$

で与えられることを仮定する．ただし，$F^{(0)}$ は自己双対条件を満たす．

$$F^{(0)}=-\hat{K}F^{(0)}\ . \tag{789}$$

このとき，$\hat{F}_{a_1\cdots a_p}$ の解は

$$\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}p!}}\hat{F}_{a_1\cdots a_p}\gamma^{a_1\cdots a_p}\left|0\right\rangle=e^{-\hat{d}}S^{-1}_{\hat{O}_1}F^{(0)}\ , \tag{790}$$

によって与えられる．この表式は B 場からの寄与が分離されていない．そこで，群の構造 ${L_a}^m,\Pi^{ab}$ などを用いてこの表式を書き換えることを考える．Poisson-Lie T 双対性における多脚場の議論 (455) より多脚場の解は以下で与えられる．

$${\hat{E}_A}^N=\begin{pmatrix}e_0^{-T}&0\\0&e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\B_0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\Pi\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L^{-T}&0\\0&L\end{pmatrix}\ , \tag{791}$$

また，$\hat{C}=O(1,9)\times O(9,1)$ を用いて 10 次元の多脚場 ${\hat{e}_a}^m$ と B 場 $\hat{B}_{mn}$ が顕わな形で書き変えれば

$${\hat{E}_A}^N=\hat{C}\begin{pmatrix}\hat{e}^{-T}&0\\0&\hat{e}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\\hat{B}&1\end{pmatrix}\ , \tag{792}$$

を得る．この多脚場に対して $\hat{O}_A{}^B\hat{E}_B{}^N=\delta_A{}^N$ を満たすように $\hat{O}_A{}^B$ を次で与える．

$$\hat{O}=\hat{O}_L\hat{O}_\Pi\hat{O}_0=\hat{O}_2\hat{O}_1\hat{C}^{-1}\ . \tag{793}$$

ここで $\hat{O}_L,\hat{O}_\Pi$ はそれぞれ L,Π により決定する部分であり，$\hat{O}_0$ は e_0,B_0 により決定する定数行列である．対応するスピノル演算子は

$$S_{\hat{O}}=S_0S_\Pi S_L=S_{\hat{C}}^{-1}S_{\hat{O}_1}S_{\hat{O}_2}\ , \tag{794}$$

と定義する．このスピノル演算子の関係を用いて $\hat{F}_{a_1\cdots a_p}$ の表式を B 場の寄与 $S_{\hat{O}_2}$ が顕わな形に書き変える．

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}}p!}\hat{F}_{a_1\cdots a_p}\gamma^{a_1\cdots a_p}|0\rangle &= e^{-\hat{d}}S_{\hat{O}_1}^{-1}F^{(0)}\\ &= e^{-\hat{d}}S_{\hat{O}_2}S_L^{-1}S_\Pi^{-1}S_0^{-1}S_{\hat{C}}^{-1}F^{(0)}\ .\end{aligned} \tag{795}$$

$\hat{C}\in O(1,9)\times O(9,1)$ であることを思い出せば，前節の議論から $\not{D}\chi=F^{(0)}$ が解ならば，$\not{D}\chi=S_{\hat{C}}F^{(0)}$ も解である．したがって，$F^{(0)}\to S_{\hat{C}}F^{(0)}$ と書き換えても $\hat{F}_{a_1\cdots a_p}$ の解である．最終的に $\hat{F}_{a_1\cdots a_n}$ の解として

$$\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}}p!}\hat{F}_{a_1\cdots a_p}\gamma^{a_1\cdots a_p}|0\rangle = e^{-\hat{d}}S_{\hat{O}_2}S_L^{-1}S_\Pi^{-1}S_0^{-1}F^{(0)}\ , \tag{796}$$

を得る．

R-R セクターの次元簡約 (2)

次に，双対座標 $\bar{x}_m$ にのみ依存する作用を導出する．R-R セクター $\check{F}^{a_1\cdots a_p}$ を

$$\check{F}=\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}}p!}\check{F}^{a_1\cdots a_p}\gamma_{a_1\cdots a_p}\hat{K}|0\rangle=e^{-\check{d}}S_{\check{O}_1}^{-1}\hat{K}\not{D}\chi\ , \tag{797}$$

と与える．ここで $\check{O}_1$ は上の議論同様に

$$\delta_A{}^M=\check{O}_{2A}{}^C\check{O}_{1C}{}^B\begin{pmatrix}\check{e}^b{}_n & 0\\ 0 & \check{e}^{-T}{}_b{}^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n{}_m & \check{B}^{nm}\\ 0 & 1_n{}^m\end{pmatrix}\ , \tag{798}$$

で定義される．このとき作用は

$$
\begin{aligned}
S_{RR} &= \beta_{RR}(\not{D}\chi,\not{D}\chi)_{AK} \\
&= -\beta_{RR}(\hat{K}\not{D}\chi,\hat{K}\not{D}\chi)_{AK} \\
&= -\beta_{RR}(e^{\check{d}}S_{\check{O}_1}\check{F},e^{\check{d}}S_{\check{O}_1}\check{F})_{AK} \\
&= -\beta_{RR}(e^{\check{d}}S_{\check{O}_1}\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}n!}}\check{F}^{a_1\cdots a_n}\gamma_{a_1\cdots a_n}\hat{K}\left|0\right\rangle, e^{\check{d}}S_{\check{O}_1}\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}n!}}\check{F}^{b_1\cdots b_n}\gamma_{b_1\cdots b_n}\hat{K}\left|0\right\rangle)_{AK} \\
&= -\beta_{RR}(S_{\check{O}_1}\check{F}^{a_1\cdots a_n}\gamma_{a_1\cdots a_n}\hat{K}\left|0\right\rangle, e^{2\check{d}}S_{\check{O}_1}\frac{1}{2^{n+1}n!}\check{F}^{b_1\cdots b_n}\gamma_{b_1\cdots b_n}\hat{K}\left|0\right\rangle)_{AK} \\
&= -\frac{1}{2}\beta_{RR}(S_{\check{O}_1}\hat{K}\left|0\right\rangle, S_{\check{O}_1}\hat{K}\left|0\right\rangle)_{AK}e^{2\check{d}}\check{G}_{a_1b_1}\cdots\check{G}_{a_nb_n}\check{F}^{a_1\cdots a_n}\check{F}^{b_1\cdots b_n} \\
&= -\frac{1}{2}\beta_{RR}(\hat{K}\left|0\right\rangle, \hat{K}\left|0\right\rangle)_{AK}\sqrt{\det\check{G}^{ab}}e^{2\check{d}}\check{G}_{a_1b_1}\cdots\check{G}_{a_nb_n}\check{F}^{a_1\cdots a_n}\check{F}^{b_1\cdots b_n} \\
&= \frac{1}{2}\beta_{RR}c_0\int dX\sqrt{\det\eta_{MN}}e^{-2d}\sqrt{\det\check{G}^{ab}}e^{2\check{d}}\check{G}_{a_1b_1}\cdots\check{G}_{a_nb_n}\check{F}^{a_1\cdots a_n}\check{F}^{b_1\cdots b_n} \\
&= -\frac{1}{4}\int dX\det L^{-1}\det\bar{R}^{-1}e^{-2d}\sqrt{\det\check{G}^{ab}}e^{2\check{d}}\check{G}_{a_1b_1}\cdots\check{G}_{a_nb_n}\check{F}^{a_1\cdots a_n}\check{F}^{b_1\cdots b_n} \\
&= -\frac{1}{4}\int dX\det L^{-1}\sqrt{\det\check{G}^{ab}}\check{G}_{a_1b_1}\cdots\check{G}_{a_nb_n}\check{F}^{a_1\cdots a_n}\check{F}^{b_1\cdots b_n}\ ,
\end{aligned}
\tag{799}
$$

と与えられる．したがって，$\check{F}^{a_1\cdots a_p}$ が 10 次元の作用に現れる R-R セクターである．上の議論同様に $\not{D}\chi = F^{(0)}$ が解になる時，B 場の寄与が顕わな表式に書き換える．

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}p!}}\check{F}^{a_1\cdots a_p}\gamma_{a_1\cdots a_p}\hat{K}\left|0\right\rangle &= e^{-\check{d}}S_{\check{O}_1}^{-1}\hat{K}F^{(0)} \\
&= e^{-\check{d}}S_{\check{O}_2}S_{\bar{L}}^{-1}S_{\bar{\Pi}}^{-1}S_0^{-1}S_{\check{C}}^{-1}\hat{K}F^{(0)}\ .
\end{aligned}
\tag{800}
$$

前節の議論より $\not{D}\chi = F^{(0)}$ が解ならば $\not{D}\chi = \hat{K}^{-1}S_{\check{C}}F^{(0)}$ も解である．故に結局

$$
\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}p!}}\check{F}^{a_1\cdots a_p}\gamma_{a_1\cdots a_p}\hat{K}\left|0\right\rangle = e^{-\check{d}}S_{\check{O}_2}S_{\bar{L}}^{-1}S_{\bar{\Pi}}^{-1}S_0^{-1}F^{(0)}\ , \tag{801}
$$

が解として得られる．

R-R セクターの Poisson-Lie T 双対性

Drinfel'd Double $\mathcal{D} = \mathcal{G}\bowtie\bar{\mathcal{G}}$ を考える．ただし，$\bar{\mathcal{G}}$ はユニモジュラーであるとする．このとき，超重力理論の R-R セクターの解 $\hat{F}_{a_1\cdots a_n}$ が

$$
\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}p!}}\hat{F}_{a_1\cdots a_p}\gamma^{a_1\cdots a_p}\left|0\right\rangle = e^{-\hat{d}}S_{\hat{O}_2}S_{L}^{-1}S_{\Pi}^{-1}S_0^{-1}F^{(0)}\ , \tag{802}
$$

で与えられることを仮定する．また，自己双対条件から $\hat{K}F^{(0)} = \pm F^{(0)}$ が成立している．このとき，(583) と同様の議論を繰り返せば $\not{D}\chi = S_{\hat{C}}F^{(0)}$ が二重場理論の解になる．自己双対条件を満たす二重場理論の解は $O(1,9)\times O(9,1)$ 変換をしても解になるから $\not{D}\chi = F^{(0)}$ も解になる．さらに Poisson-Lie T 双対性に伴う座標変換 $l(X) = \bar{g}(\bar{x})g(x), l(X(X')) = g(x')\bar{g}(\bar{x}')$ を実行しても定

数 $F^{(0)}_{a_1\cdots a_n}$ は変換を受けないから $\not{D}\chi = F^{(0)}$ は座標変換後も解になる．ただし，真空 $|0\rangle$ は座標変換によって異なる真空になっており，

$$\begin{aligned} & \langle 0|\hat{A}_+\hat{K}|0\rangle = c_0 \int dX \sqrt{\det\eta(X)}e^{-2\hat{d}} \\ \Rightarrow \quad & \langle 0|\hat{A}_+\hat{K}|0\rangle = c_0 \int dX' \sqrt{\det\eta(X')}e^{-2\check{d}} \end{aligned} \tag{803}$$

と変換を受けていることに注意．このとき，$\not{D}\chi = \hat{K}^{-1}S_{\check{C}}F^{(0)}$ も同様に二重場理論の解になる．最後に次元簡約を実行すれば，一般化超重力理論の解として

$$\sum_{p=0}^{10}\frac{1}{\sqrt{2^{p+1}}p!}\check{F}^{a_1\cdots a_p}\gamma_{a_1\cdots a_p}\hat{K}\,|0\rangle \quad = \quad e^{-\check{d}}S_{\check{O}_2}S^{-1}_{\bar{L}}S^{-1}_{\bar{\Pi}}S^{-1}_{0}F^{(0)}\ , \tag{804}$$

が得られる．この結果は [51] で提案されている表式と整合的である．

9　結論

9.1　本研究による結果

本研究における結果をまとめる．主要な成果は次の 2 つである．

- 二重場理論の計量 η_{MN} が一般の座標依存性を持つ場合に作用を構成することを可能にした．
- 非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性が二重場理論を用いて導出可能であることを明らかにした．

以下ではこの 2 つについてまとめる．

二重場理論の作用の構成に関して　従来の標準的な二重場理論においてはゲージ代数の閉包条件を第一原理として作用の構成が行われており，それによって場に対しては非自明な拘束条件が課されていた．それに対して本研究では局所ローレンツ不変性 ($O(1, D-1) \times O(D-1, 1)$ 不変性) を第一原理として採用し，ゲージ不変性やゲージ代数の閉包条件は課さなかった．その結果，作用が射影された Lichnerowicz 公式で導出可能であることを示した．標準的な二重場理論との重要な相違点は次のとおりである．

1. 閉包条件を要請しないこと．

   標準的な二重場理論では作用の外から手で閉包条件を課しており，拘束条件を生成する機構が作用に存在していない．加えて，閉包条件が非自明な拘束条件を与えるために，場が属する空間も十分に定義されていなかった．本研究においては閉包条件を要請していないため，これらの問題が初めから存在しない．また，拘束条件が必要ないことは二重場理論上で座標変換を自由に行えることを意味しており，この性質によって二重場理論を用いた非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性が可能となった．

2. 一般化ディラトンの導入方法の違い．

   標準的な二重場理論では一般化ディラトンはウェイト付きのスカラーとしてゲージ変換性や作用への寄与などを決定していた．一方で，本研究では発散の自由度 (もしくは Dirac 生成演算子に含まれる構造係数 F_A の自由度) が一般化 Lichnerowics 公式によってスカラーで与えられることに着目し，このスカラーを一般化ディラトンと同定した．この手法はディラトンの代数的な解釈を与えたことに加えて η_{MN} に座標依存性があっても同様に実行することができることが利点である．

3. 作用の決定に関して．

   本研究では，Dirac 生成演算子の 2 乗の構造を使って作用を定義するという仮定の下で作用の自由度が 2 つの定数 (β_+, β_-) しかないことを示し，その自由度を系統的に扱った．この定数は超重力理論に簡約することを要請すれば，$-\beta_+ + \beta_- = 8c_0^{-1}$($c_0$: スピノルの規格化定数) まで決定される．さらに，WZW 二重場理論を含むことを要請すれば，$\pm\beta_\pm = -4c_0^{-1}$ と決定できた．

4. 計量 η_{MN} について．

   標準的な二重場理論では η_{MN} が定数の場合にのみ構成されていた．また，η_{MN} が座標依存性を持つ場合には WZW 二重場理論が提案されていたが，実際の構成は特殊な

η_{MN} でのみ計算されており，一般の η_{MN} に拡張できる保証はなかった．これに対して，本研究では η_{MN} の具体的な形に依らない構成方法を行っており，η_{MN} が一般の関数の場合にも作用を定義することができた．

このようにして構成された新たな二重場理論は η_{MN} が一般の関数の場合にも適用可能な作用を持つ．これまで，一般の η_{MN} を系統的に扱った研究は存在せず，故に，本研究において初めて任意の η_{MN} に対して作用を構成することができた．このような関数の η_{MN} を持つ二重場理論は次に述べる非アーベル的 T 双対性や Poisson-Lie T 双対性で現れるため非常に重要な拡張である．

二重場理論を用いた非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性に関して　二重場理論を用いた Poisson-Lie T 双対性を試みた先行研究 [25] は閉包条件が座標変換によって T 双対な理論に変換されないため，Poisson-Lie T 双対性が二重場理論の座標変換であると主張するには不完全であった (図 1)．そのため，先行研究 [25] の議論では Poisson-Lie T 双対性で対応する 2 つの背景場に関して一方が超重力理論の解であったとしても他方が超重力理論の解になることが保証されていなかった．

一方，本研究で構成した二重場理論は閉包条件が課されていないため，非アーベル的 T 双対性や Poisson-Lie T 双対性を二重場理論上の座標変換によって導出することができた．その結果，非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性について以下のことを示すことができた．

1. 非アーベル的 T 双対性に関して

   群 $\mathcal{G}$ 上の背景場 (569) が超重力理論の解になるならば，(570) で書かれる背景場が一般化超重力理論の解になることを示した．特に，群 $\mathcal{G}$ がユニモジュラーならば (570) は超重力理論の解になる．この 2 つの背景場の対応は非アーベル的 T 双対性で与えられているものと同じ形であることが確認できたため，非アーベル的 T 双対性が二重場理論を用いて導出できたと言える．

2. Poisson-Lee T 双対性に関して

   Drinfel'd Double$\mathcal{D} = \mathcal{G} \bowtie \bar{\mathcal{G}}$ における Poisson-Lie T 双対性で現れる 2 つの背景場 (608)(609) を考える．このとき，$\bar{\mathcal{G}}$ がユニモジュラーであれば (608) が超重力理論の解になる時，(609) は一般化超重力理論の解になることを示した．特に $\mathcal{G}$ もユニモジュラーならば (609) は超重力理論の解になる．即ち，Poisson-Lie T 双対性を二重場理論を用いて導出することができた．

非アーベル的 T 双対性に現れる群がユニモジュラーでない場合には経路積分の議論により超重力理論の解が一般化超重力理論の解に移ることが先行研究 [48] によって示されている．この先行研究の非アーベル的 T 双対性に関する結果を本論文では二重場理論を用いて導出することに成功した．一方で，Poisson-Lie T 双対性の場合には群がユニモジュラーでないときに超重力理論の解と一般化超重力理論の解が対応する例がいくつか知られていただけで，一般的な証明がなかった．本研究は Poisson-Lie T 双対性で現れる 2 つの群のうち一方のみがユニモジュラーでない場合に，超重力理論の解から一般化超重力理論の解が構成可能であることを明らかにした．

9.2　議論と今後の展望

最後に議論と今後の展望を述べる．

二重場理論の作用の決定に関して　本論文において，二重場理論の作用は $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変性を第一原理として構成した．しかし，この要請だけでは作用に任意定数 β_+,β_- が残り，超重力理論を含むことを要請したとしても，一意に決定することができなかった．そこで本論文では WZW 二重場理論が含まれることを要請して $\pm\beta_\pm=-4c_0^{-1}$ に決定した．一方で，非アーベル的 T 双対性や Poisson-Lie T 双対性の議論では $\beta_+=0,\beta_-=8c_0^{-1}$ と選んで議論を行った．T 双対性の議論は超重力理論の解から一般化超重力理論の解への対応を見るための道具でしかないものの WZW 二重場理論と異なる作用を取る必要があることは不自然であるため，両者を統一的に理解する手法が存在することが期待される．よって，β_+,β_- を決定するための要請の精査は今後の課題である．

ユニモジュラーでない場合の Poisson-Lie T 双対性に関して　本論文では Poisson-Lie T 双対性が持つ Drinfel'd Double $\mathcal{D}=\mathcal{G}\bowtie\bar{\mathcal{G}}$ の部分群 $\bar{G}$ がユニモジュラーでない場合に Poisson-Lie T 双対性を導出できた．しかし，$\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ の両方がユニモジュラーでない場合には Poisson-Lie T 双対性が導出できなかった．この理由が二重場理論による導出の欠点なのか，そもそも $\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ の両方がユニモジュラーでない場合には Poisson-Lie T 双対性が存在しないのか判断することができていない．この状況は経路積分を使った方法などでも同様で，Poisson-Lie T 双対性がユニモジュラーでない群を持つ場合にどのような理論の解同士が対応するのかを明確に示した論文はない．そのため，$\mathcal{G},\bar{\mathcal{G}}$ の両方がユニモジュラーでない場合の解析は今後の課題である．

L_∞ 代数に関して　L_∞ 代数に二重場理論を埋め込む試みは運動方程式以外の部分に関しては完了しており，$b_n(b_0,\cdot)\propto \not{\mathcal{D}}^2$ の対応が 7.2 節の計算によって示唆されている．一方で，L_∞ 代数では b_0 はゲージ代数の閉包条件や運動方程式のゲージ変換による共変性の破れを表している．そのため，$\not{\mathcal{D}}^2$ を用いて統一的にゲージ代数の閉包条件や運動方程式のゲージ変換による共変性を議論できるようになることが期待される．また，$b_0=0$ であるとき L_∞ の関数 b_1 は BRST 演算子に対応することが知られており，$b_1(b_1(\cdot))\propto b_2(b_0,\cdot)$ より b_0 は BRST 演算子が冪零 (nilpotent) であることを保証する．二重場理論では $b_0\neq 0$ であるからそのまま BRST 演算子を構成することは出来ないが，冪零を破るように BRST 演算子を拡張した類似の代数構造として記述できることが期待され，その様な代数の構築が今後の課題である．

R-R セクターに関して　Dirac 生成演算子を用いて構成した二重場理論の R-R セクターは標準的な二重場理論を含むことを示した．しかし，一般の場合には多脚場 ${E_A}^N$ が $O(D,D)$ 行列にならないために同様の計算を行うことが困難である．したがって，運動方程式の解などを具体的に議論するためには R-R セクターの解析が必要であり，今後の課題である．

二重場理論の問題点と現状に関して　本論文の初めに述べたように，二重場理論を用いて弦理論の新たな余剰次元を提案するためには少なくとも次の 4 つの問題点を解決しなければならなかった．

(1) 二重場理論の場が属する空間の定義が不十分であること．
標準的な二重場理論にはゲージ代数が閉じるための条件として閉包条件と呼ばれる拘束条件が場に課されている．この閉包条件を課した後の場がどのような空間に属するかは明確に与えられておらず，数学的に定義が不十分である．また，作用の中に拘束条件を生成するラグランジュ未定乗数などの機構が存在せず，作用の外から手で拘束条件を課している．そのため，量子論を議論する際に場の配位を明確に定義できず，経路積分をどのような関数系にわたって実行すべきか決定することができない．

(2) 二重場理論に含まれる計量 η_{MN} が一般の座標依存性を持つ場合に構成できていないこと．
既存の二重場理論が持つ計量 η_{MN} は特殊な座標依存性を持つ場合にのみ構成されている．S^1 よりも複雑な空間を結び付ける拡張された T 双対性 (非アーベル的 T 双対性，Poisson-Lie T 双対性) を二重場理論で議論する際には，異なる座標依存性を持つ η_{MN} を用いなくてはならない．よって，η_{MN} がより一般の座標依存性を持つ二重場理論の構成が拡張された T 双対性の議論には必要である．

(3) 20 次元時空の幾何学である二重場理論から 10 次元時空の幾何学を得る機構が明らかでないこと．
二重場理論は 20 次元時空上の幾何学であるが，弦理論は 10 次元時空上に存在する．そのため，弦理論と対応させるためには二重場理論の場から 10 次元時空上の計量や反対称テンソル場を得る必要がある．

(4) 二重場理論と量子論の関係が明らかでないこと．
二重場理論は古典的な議論にとどまっており，量子的な記述は成功していない．

これらの問題点のうち (1)(2) を受けて本論文の前半で述べた新たな二重場理論を構成した．その結果，場に拘束条件がない二重場理論が構成可能であることを示し，(1) の問題点を回避した．場に拘束条件がなくなったことによって，形式的には経路積分を全空間で定義できるようになったが，このまま単純に量子論を議論しても 20 次元時空上の理論であることからゴーストが消えない等の問題が発生することが予想され，(4) の量子論との関係については解決には至っていない．また，この新たな二重場理論の構成は計量 η_{MN} の座標依存性に関係なく行うことができ，(2) の問題点を解決している．

本論文の後半で行った二重場理論を用いた非アーベル的 T 双対性と Poisson-Lie T 双対性の導出は 20 次元時空上の幾何学である二重場理論の解と 10 次元時空上の幾何学である超重力理論や一般化超重力理論の解の非自明な対応を与えている．そのため，今後 (3) の問題点である 20 次元時空上の場から 10 次元時空上の場を得る機構に対して手がかりを与えることが期待される．

本論文の終わりに議論している閉弦の場の理論の代数である L_∞ 代数と二重場理論の関係は最後の問題点 (4) に対するアプローチの 1 つである．閉弦の場の理論においては L_∞ 代数が BRST 演算子を含むため，二重場理論においても BRST 演算子に類似した演算子を定義し，量子論との関係を与える手がかりになると期待される．

したがって，二重場理論が持つ 4 つの問題点のうち (1)(2) は本論文で解決しており，(3) については非自明な例を与えた．最後の (4) については手がかりとなることが期待される代数構造を部分的に構成した．問題点 (3)(4) に対するより進んだ研究は今後の課題である．

以上の問題が解決すれば，二重場理論が持つ巻き付き数に共役な双対座標の自由度を用いて新たな構造を持った余剰次元を構成できることが予想される．標準的な二重場理論においては双対座標の自由度を用いて余剰次元に T-fold のような新たな構造を導入することが試みられており，超重力理論のコンパクト化からは得られない新たな余剰次元の構造が質量に寄与を持つことで弦理論の質量のない粒子が新たに質量を獲得することが示唆されている [6, 14, 15, 16, 17]．本論文内では触れていないが，ここでコンパクト化に用いられた手法は一般化 Scherk-Schwarz 次元簡約 (Generalized Scherk-Schwarz reduction) と呼ばれるもので，超重力理論における捩じれたトーラス (twisted torus) へのコンパクト化で用いられる Scherk-Schwarz 次元簡約 [54] の一般化になっている．二重場理論においてコンパクト化の方法を拡張できる理由は双対座標の自由度が増えているためにその方向に捩じってコンパクト化することが可能になるためである．しかし，標準的な二重場理論では拘束条件の存在によって弦理論との対応を議論することができず，弦理論の新

たな余剰次元として提案するには至っていない．一方，問題点 (3)(4) が解決すれば，量子論との関係が明らかな下で二重場理論から余剰次元を構成できるようになるため，弦理論の余剰次元の新たな自由度を提案することが可能になると期待される．

謝辞

本論文の作成に当たり，指導教官の綿村哲先生には大変多くのあたたかいご指導をいただきました．心からの感謝を申し上げます．また，同じ研究グループの Carow-Watamura Ursula さんには日頃から議論をしていただき，多数の助言をいただきました．深く感謝いたします．また，同じ研究グループの金子幸雄さん，金子智一さん，竹澤昇平さん，矢野太郎さんには有意義な議論をいただきました．誠に感謝いたします．同期の関谷秀介さん，富塚健志さん，松川幸平さん，西岡敏郎さん，長谷川直人さんには研究の議論に加えて精神的にも良い刺激をたくさんいただきました．心より感謝いたします．また，研究室のスタッフや学生の方々にも多くの助言をいただきました．誠に感謝いたします．また，東日本大震災で被災してから，ここでは挙げきれないほど非常にたくさんの方々の支援をいただき，これまで研究を続けてくることができました．心より感謝申し上げます．最後に，これまで長きにわたり，私を温かく見守り続けてくれた母と弟，そして今は亡き父に心から感謝します．

A　一般化された発散とラプラシアン

ここでは一般の線形空間 L 上で定義される発散を定義する．

A.1　$T\mathbb{M}$ 上の発散

まず，発散の性質を確認するために，接ベクトル空間 $T\mathbb{M}$ における通常の発散を与える．共変微分 $\nabla^{T\mathbb{M}}$(254) を用いた発散 $div_{\nabla^{T\mathbb{M}}}: T\mathbb{M} \to C^\infty(\mathbb{M})$ は $V \in T\mathbb{M}$ に対して

$$div_{\nabla^{T\mathbb{M}}} V = \langle \nabla^{T\mathbb{M}}_{E_A} V, E^A \rangle \ , \tag{805}$$

で定義される．成分で具体的に見てみれば

$$div_{\nabla^{T\mathbb{M}}} V = (\partial_A - W^B{}_{BA}) V^A \tag{806}$$

と書くことができるから，実際に通常の発散と同じ形が得られることが分かる．この発散は $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ に対して

$$div_{\nabla^{T\mathbb{M}}} fV = \rho(V)(f) + f div_{\nabla^{T\mathbb{M}}} V \ , \tag{807}$$

を満たす．ここで ρ は anchor 写像で $\rho(V)(f) = V^A \partial_A f$ である．そこで，この性質を一般の発散 $div: T\mathbb{M} \to C^\infty(\mathbb{M})$ の定義として用いる．

$$div fV = \rho(V)(f) + f div V \ . \tag{808}$$

この発散 div と div_∇ の差は線形写像になる．

$$(div - div_{\nabla^{T\mathbb{M}}}) fV = f(div - div_{\nabla^{T\mathbb{M}}}) V \ . \tag{809}$$

したがって，div はベクトル $U \in T\mathbb{M}$ を用いて

$$div = div^U_{\nabla^{T\mathbb{M}}} = div_{\nabla^{T\mathbb{M}}} - \iota_U \ , \tag{810}$$

と書くことができる. ここで ι_U は内部積で

$$\iota_U V = \langle U, V \rangle \ , \tag{811}$$

と定義される．

A.2　一般の線形空間 L 上のラプラシアン

一般の線形空間 L 上のラプラシアン Δ^L を定義する．このとき用いる発散 $div: T\mathbb{M} \otimes L \to L$ は前節の定義 (808) と同様に $V \otimes a \in T\mathbb{M} \otimes L$ に対して

$$div(fV \otimes a) = \rho(V)(f) a + f div(V \otimes a) \ , \tag{812}$$

と定義する．

$T\mathbb{M} \otimes L$ 上の発散 $div_\nabla : T\mathbb{M} \otimes L \to L$ を与える．

$$div_\nabla = \iota_{E^A} \nabla^{T\mathbb{M} \otimes L}_{E_A} \ . \tag{813}$$

ここで，$\nabla^{T\mathbb{M}\otimes L}$ は L 上の共変微分 ∇^L を用いて

$$\nabla^{T\mathbb{M}\otimes L}(V\otimes a)=(\nabla^{T\mathbb{M}}V)\otimes a+V\otimes\nabla^L a\ , \tag{814}$$

で定義される．また，$W\in T\mathbb{M}$ について ι_W は内部積で

$$\iota_W(V\otimes a)=\langle W,V\rangle\, a\ , \tag{815}$$

と定義される．この div_∇ は発散の公理 (812) を満たす．よって，一般の発散との差は

$$(div-div_\nabla)(fV\otimes a)=f(div-div_\nabla)(V\otimes a)\ , \tag{816}$$

となって線形写像になる．故に一般の発散 div は前節同様に

$$div=div_\nabla^U=div_\nabla-\iota_U\ , \tag{817}$$

と与えることができる．

この発散 div を用いて一般の線形空間 L 上のラプラシアン $\Delta^L:L\to L$ を定義する．

$$\begin{aligned}\Delta^L &= div_\nabla(E^A\otimes\nabla^L_{E_A})\\ &= (\nabla^L_{E^A}-W_B{}^{BA}-U^A)\nabla^L_{E_A}\ .\end{aligned} \tag{818}$$

ここで W_{ABC} はスピン接続で

$$\nabla^{T\mathbb{M}}_{E_A}E_B=W_{AB}{}^C E_C\ , \tag{819}$$

で定義される．

B　スピノル表現

ここでは，具体的に $SO(10,10)$ のスピノル表現を与える．Clifford 代数は

$$\{\gamma_A,\gamma_B\}=2\eta_{AB}=\begin{pmatrix}0 & 2\delta^a{}_b\\ 2\delta_a{}^b & 0\end{pmatrix}, \tag{820}$$

によって与えていたが，ここでは対角化して

$$\{\hat\Gamma_A,\hat\Gamma_B\}=2\hat\eta_{AB}=\begin{pmatrix}2s^{ab} & 0\\ 0 & -2s_{ab}\end{pmatrix}, \tag{821}$$

を考える．$\hat\Gamma_A$ は

$$\begin{pmatrix}\hat\Gamma^a\\ \hat\Gamma_a\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\delta^a{}_b & s^{ab}\\ -s_{ab} & \delta_a{}^b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma^a\\ \gamma_a\end{pmatrix}\ , \tag{822}$$

によって定義される．この基底において一般化計量は変わらず

$$\hat H_{AB}=\begin{pmatrix}s^{ab} & 0\\ 0 & s_{ab}\end{pmatrix}\ , \tag{823}$$

と与えられる．

具体的な表現を Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \tag{824}$$

を用いて以下で定義する．

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^0 &= i\sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}^1 &= \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}^2 &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}^3 &= \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}^4 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}^5 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}^6 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}^7 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}^8 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}^9 &= \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1^{\otimes 5} \\
\hat{\Gamma}_0 &= (\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \\
\hat{\Gamma}_1 &= i(\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \\
\hat{\Gamma}_2 &= i(\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \\
\hat{\Gamma}_3 &= i(\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \\
\hat{\Gamma}_4 &= i(\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \otimes 1 \\
\hat{\Gamma}_5 &= i(\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \otimes 1 \\
\hat{\Gamma}_6 &= i(\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes 1 \\
\hat{\Gamma}_7 &= i(\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes 1 \\
\hat{\Gamma}_8 &= i(\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \\
\hat{\Gamma}_9 &= i(\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \ .
\end{aligned} \tag{825}$$

部分代数 $SO(1,9), SO(9,1)$ の Clifford 代数をそれぞれ $\Gamma^a, \bar{\Gamma}_a$ のようにハットなしで定義する．

$$\hat{\Gamma}^a = \Gamma^a \otimes 1^{\otimes 5} \ , \ \hat{\Gamma}_a = (\sigma_3)^{\otimes 5} \otimes \Gamma_a \ . \tag{826}$$

この上で作用の構成に必要な行列を様々定義する．

まず，Γ^a, Γ_a のエルミート共役を生成する $A_+, \bar{A}_-$ を与える．

$$A_+ = \sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \ , \tag{827}$$

$$\bar{A}_- = i\sigma_2 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3 \ . \tag{828}$$

$A_+, \bar{A}_-$ は共役変換を

$$\begin{aligned}
A_+ \Gamma^a A_+^{-1} &= \Gamma^{a\dagger} \ , \\
\bar{A}_- \bar{\Gamma}_a \bar{A}_-^{-1} &= -\bar{\Gamma}_a^\dagger \ ,
\end{aligned} \tag{829}$$

と生成する．この 2 つの $A_+, \bar{A}_-$ を用いて $\hat{\Gamma}_A$ に作用する $\hat{A}_+$ を

$$\hat{A}_+ = A_+ \otimes \bar{A}_- \ , \tag{830}$$

で定義する．$\hat{A}_+$ は

$$\hat{A}_+ \hat{\Gamma}_A \hat{A}_+^{-1} = \Gamma_A^{\dagger} \ , \tag{831}$$

を満たす．

次に Γ^a, Γ_a の複素共役を生成する行列 $B_+, \bar{B}_+$ を与える．

$$\begin{aligned} B_+ &= \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \ , \\ \bar{B}_+ &= 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 \ . \end{aligned} \tag{832}$$

これらは

$$\begin{aligned} B_+ \Gamma^a B_+^{-1} &= \Gamma^{a*} \ , \\ \bar{B}_+ \bar{\Gamma}_a \bar{B}_+^{-1} &= \bar{\Gamma}_a^* \ , \end{aligned} \tag{833}$$

を満たす．$\hat{\Gamma}_A$ に作用する $\hat{B}_+$ を

$$\hat{B}_+ = B_+ \otimes \bar{B}_+ \ , \tag{834}$$

によって定義する．この $\hat{B}_+$ は

$$\hat{B}_+ \hat{\Gamma}_A \hat{B}_+^{-1} = \hat{\Gamma}_A^* \ , \tag{835}$$

を満たす．部分代数 $\gamma^a, \bar{\gamma}_a$ の Majorana スピノルの基底を

$$B_+^{-1} e_\alpha^* = e_\alpha \ , \ \bar{B}_+^{-1} e_{\bar{\alpha}}^* = e_{\bar{\alpha}} \ , \tag{836}$$

で与える．$\hat{\Gamma}_A$ 全体の Majorana 基底は

$$\hat{B}_+^{-1} e_{\hat{\alpha}}^* = e_{\hat{\alpha}} \ , \tag{837}$$

を満たす．この基底は積状態で書ける．

$$e_{\hat{\alpha}} = e_\beta \otimes e_{\bar{\gamma}} \ . \tag{838}$$

$\mathbb{S}$ 上の任意の Majorana スピノル φ は実係数 φ^α を用いて

$$\varphi = \varphi^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}} \tag{839}$$

と書くことができる．

$\Gamma^a, \bar{\Gamma}_a, \hat{\Gamma}_A$ のそれぞれと反可換な $\Gamma_\chi, \bar{\Gamma}_\chi, \hat{\Gamma}_\chi$ を

$$\begin{aligned} \Gamma_\chi &= \sigma_3^{\otimes 5} \\ \bar{\Gamma}_\chi &= \sigma_3^{\otimes 5} \\ \bar{\Gamma}_\chi &= \Gamma_\chi \otimes \bar{\Gamma}_\chi \end{aligned} \tag{840}$$

により定義する．これらは

$$\begin{aligned} \{\Gamma_\chi, \Gamma^a\} &= 0 \\ \{\bar{\Gamma}_\chi, \bar{\Gamma}_a\} &= 0 \\ \{\hat{\Gamma}_\chi, \hat{\Gamma}_A\} &= 0 \end{aligned} \tag{841}$$

を満たす．

最後に一般化計量 $\hat{H}_{AB}$ のスピノル表現 $\hat{K}$ を与える．

$$\begin{aligned} \hat{K} &= 1^{\otimes 5} \otimes \sigma_3^{\otimes 5} \ , \\ \hat{K}\hat{\gamma}_A\hat{K}^{-1} &= \hat{\gamma}_B H^B{}_A \ . \end{aligned} \tag{842}$$

B.1 Majorana 表現

ここでは上で導入した表現上で Majorana 表現を構成した場合の性質を調べる．基底 $e_{\hat{\alpha}}$ に対して内積を $S_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ と置く．

$$S_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = e^{\dagger}_{\hat{\alpha}} e_{\hat{\beta}} \ . \tag{843}$$

この $S_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ の性質を調べる．

$$\begin{aligned} S^*_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} &= (e^{\dagger}_{\hat{\alpha}} e_{\hat{\beta}})^* \\ &= e^{\dagger}_{\hat{\beta}} e_{\hat{\alpha}} \\ &= S_{\hat{\beta}\hat{\alpha}} \ . \end{aligned} \tag{844}$$

基底の Majorana 性を用いて

$$\begin{aligned} S_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} &= e^{\dagger}_{\hat{\alpha}} e_{\hat{\beta}} \\ &= e^T_{\hat{\alpha}} B^T_+ B^{-1}_+ e^*_{\hat{\beta}} \\ &= e^T_{\hat{\alpha}} e^*_{\hat{\beta}} \\ &= e^{\dagger}_{\hat{\beta}} e_{\hat{\alpha}} \\ &= S_{\hat{\beta}\hat{\alpha}} \ , \end{aligned} \tag{845}$$

を得る．よって，$S_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ は実対称行列である．スピノルの添え字 α, β の上げ下げは $S_{\alpha\beta}$ を用いる．

$\hat{\Gamma}_A$ のスピノル添え字の表現を考える．Majorana 表現の基底は $\hat{\Gamma}_A{}^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}}$ で与えられる．

$$\hat{\Gamma}_A e_{\hat{\alpha}} = \hat{\Gamma}_A{}^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}} e_{\hat{\beta}} \ . \tag{846}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{A\hat{\alpha}\hat{\beta}} &= e^{\dagger}_{\hat{\alpha}} \hat{\Gamma}_A e_{\hat{\beta}} \\ &= e^T_{\hat{\alpha}} B^T_+ \hat{\Gamma}_A B^{-1}_+ e^*_{\hat{\beta}} \\ &= e^T_{\hat{\alpha}} \hat{\Gamma}^*_A e^*_{\hat{\beta}} \\ &= (e^{\dagger}_{\hat{\alpha}} \hat{\Gamma}_A e_{\hat{\beta}})^* \\ &= \hat{\Gamma}^*_{A\hat{\alpha}\hat{\beta}} \ . \end{aligned} \tag{847}$$

よって，$\hat{\Gamma}_A{}^{\hat{\beta}}{}_{\hat{\alpha}}$ は実行列である．

$\hat{A}_+$ については

$$\begin{aligned} \hat{A}^*_{+\hat{\alpha}\hat{\beta}} &= (e^{\dagger}_{\hat{\alpha}} \hat{A}_+ e_{\hat{\beta}})^* \\ &= e^{\dagger}_{\hat{\beta}} \hat{A}^{\dagger}_+ e_{\hat{\alpha}} \\ &= -e^{\dagger}_{\hat{\beta}} \hat{A}_+ e_{\hat{\alpha}} \\ &= -\hat{A}_{+\hat{\beta}\hat{\alpha}} \ , \end{aligned} \tag{848}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{A}_{+\hat{\alpha}\hat{\beta}} &= e^{\dagger}_{\hat{\alpha}}\hat{A}_{+}e_{\hat{\beta}} \\
&= e^{T}_{\hat{\alpha}}B^{T}_{+}\hat{A}_{+}B^{-1}_{+}e^{*}_{\hat{\beta}} \\
&= -e^{T}_{\hat{\alpha}}\hat{A}_{+}e^{*}_{\hat{\beta}} \\
&= -e^{\dagger}_{\hat{\beta}}\hat{A}^{T}_{+}e_{\hat{\alpha}} \\
&= -e^{\dagger}_{\hat{\beta}}\hat{A}_{+}e_{\hat{\alpha}} \\
&= -\hat{A}_{+\hat{\beta}\hat{\alpha}}\ ,
\end{aligned} \tag{849}
$$

と計算できる．故に $\hat{A}_{+\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ は実反対称行列である．同様に $\hat{K}$ については

$$
\begin{aligned}
\hat{K}^{*}{}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} &= (e^{\dagger}_{\hat{\alpha}}\hat{K}e_{\hat{\beta}})^{*} \\
&= e^{\dagger}_{\hat{\beta}}\hat{K}^{\dagger}e_{\hat{\alpha}} \\
&= e^{\dagger}_{\hat{\beta}}\hat{K}e_{\hat{\alpha}} \\
&= \hat{K}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}\ ,
\end{aligned} \tag{850}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{K}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} &= e^{\dagger}_{\hat{\alpha}}\hat{K}e_{\hat{\beta}} \\
&= e^{T}_{\hat{\alpha}}B^{T}_{+}\hat{K}B^{-1}_{+}e^{*}_{\hat{\beta}} \\
&= e^{T}_{\hat{\alpha}}\hat{K}e^{*}_{\hat{\beta}} \\
&= e^{\dagger}_{\hat{\beta}}\hat{K}^{T}e_{\hat{\alpha}} \\
&= e^{\dagger}_{\hat{\beta}}\hat{K}e_{\hat{\alpha}} \\
&= \hat{K}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}\ ,
\end{aligned} \tag{851}
$$

と計算できる．故に $\hat{K}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ は実対称行列である．

B.2 A-内積

$O(D,D)$ 変換は $\Lambda_{AB} = -\Lambda_{BA}$ を満たす $\Lambda^{A}{}_{B}$ を用いて $E_{A} \mapsto E_{B}(e^{\Lambda})^{B}{}_{A}$ と書ける．この時，スピノル φ は

$$
\varphi \mapsto \exp\Big(\frac{1}{4}\hat{\Lambda}_{AB}\Gamma^{AB}\Big)\varphi\ , \tag{852}
$$

と変換する．この時，$O(D,D)$ 変換によって不変な内積である A-内積 $(\cdot,\cdot)_{A}$ を以下で定義する．任意のスピノル φ_1, φ_2 に対して

$$
(\varphi_1, \varphi_2)_A = \varphi_1^{\dagger}\hat{A}_{+}\varphi_2\ . \tag{853}
$$

A-内積は実際に $O(D,D)$ 変換に対して不変であることを示すことができる．

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1,\varphi_2)_A &\mapsto \Big(\exp\Big(\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB}\Big)\varphi_1, \exp\Big(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'}\Big)\varphi_2\Big)_A \\
&= \varphi_1^{\dagger}\exp\Big(\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB}\Big)^{\dagger}\hat{A}_{+}\exp\Big(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'}\Big)\varphi_2 \\
&= \varphi_1^{\dagger}\hat{A}_{+}\exp\Big(-\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB}\Big)\exp\Big(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'}\Big)\varphi_2 \\
&= \varphi_1^{\dagger}\hat{A}_{+}\varphi_2 \\
&= (\varphi_1,\varphi_2)_A\ .
\end{aligned} \tag{854}
$$

A-内積の重要な性質として

$$(\varphi_1, \hat{\Gamma}_A\varphi_2)_A = (\hat{\Gamma}_A\varphi_1, \varphi_2)_A \ , \tag{855}$$

$$(\varphi_1, \hat{\Gamma}_{AB}\varphi_2)_A = -(\hat{\Gamma}_{AB}\varphi_1, \varphi_2)_A \ , \tag{856}$$

$$(\varphi_1, \hat{\Gamma}_A\varphi_2)_A = -(\hat{\Gamma}_{ABC}\varphi_1, \varphi_2)_A \ , \tag{857}$$

があることに注意.

また，任意の Majorana スピノル φ_1, φ_2 の A-内積は

$$(\varphi_1, \varphi_2)_A = \varphi_1^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}^\dagger \hat{A}_+ \varphi_2^{\hat{\beta}} e_{\hat{\beta}} = \varphi_1^{\hat{\alpha}} \hat{A}_{+\hat{\alpha}\hat{\beta}} \varphi_2^{\hat{\beta}} \tag{858}$$

であって，$\varphi_1, \varphi_2, A_{+\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ は全て実関数であるから Majorana スピノル同士の A-内積は実になる.

$$(\varphi_1, \varphi_2)_A \in \mathbb{R} \ . \tag{859}$$

B.3 AK-内積

$O(D,D)$ 不変な A-内積に対して $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 不変な AK-内積も同様に定義することができる.

$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ は $\Lambda_{AB} = -\Lambda_{BA}$ かつ $\Lambda_{AB} = P_A^{+A'} P_B^{+B'} \Lambda_{A'B'} + P_A^{-A'} P_B^{-B'} \Lambda_{A'B'}$ を満たす. ここで P_A^{+B} は (315) で定義される射影演算子である．後者は書き換えると

$$\Lambda_{AB} = H_A{}^{A'} H_B{}^{B'} \Lambda_{A'B'} \ , \tag{860}$$

が従うことが分かる．この Λ_{AB} を用いれば $O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換は $\Lambda^A{}_B$ を用いて $E_A \mapsto E_B (e^\Lambda)^B{}_A$ と書ける．この時，スピノル φ は

$$\varphi \mapsto \exp\left(\frac{1}{4}\hat{\Lambda}_{AB}\Gamma^{AB}\right)\varphi \ , \tag{861}$$

と変換する．この時，$O(1,D-1)\times O(D-1,1)$ 変換によって不変な内積である AK-内積 $(\cdot,\cdot)_A$ を以下で定義する．任意のスピノル φ_1, φ_2 に対して

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{AK} = \varphi_1^\dagger \hat{A}_+ \hat{K} \varphi_2 \ . \tag{862}$$

AK-内積は実際に $O(D,D)$ 変換に対して不変であることを示すことができる.

$$\begin{aligned}
(\varphi_1, \varphi_2)_{AK} &\mapsto \left(\exp\left(\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB}\right)\varphi_1, \exp\left(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'}\right)\varphi_2\right)_{AK} \\
&= \varphi_1^\dagger \exp\left(\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB}\right)^\dagger \hat{A}_+ \hat{K} \exp\left(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'}\right)\varphi_2 \\
&= \varphi_1^\dagger \hat{A}_+ \exp\left(-\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB}\right)\hat{K} \exp\left(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'}\right)\varphi_2 \\
&= \varphi_1^\dagger \hat{A}_+ \hat{K} \exp\left(-\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{CD} H_C{}^A H_D{}^B\right) \exp\left(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'}\right)\varphi_2 \\
&= \varphi_1^\dagger \hat{A}_+ \hat{K} \exp\left(-\frac{1}{4}\Lambda_{AB}\hat{\Gamma}^{AB}\right) \exp\left(\frac{1}{4}\Lambda_{A'B'}\hat{\Gamma}^{A'B'}\right)\varphi_2 \\
&= \varphi_1^\dagger \hat{A}_+ \hat{K} \varphi_2 \\
&= (\varphi_1, \varphi_2)_{AK} \ .
\end{aligned} \tag{863}$$

また，任意の Majorana スピノル φ_1, φ_2 の AK-内積は

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{AK} = \varphi_1^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\alpha}}^{\dagger} \hat{A}_{+} \hat{K} \varphi_2^{\hat{\beta}} e_{\hat{\beta}} = \varphi_1^{\hat{\alpha}} \hat{A}_{+\hat{\alpha}\hat{\gamma}} S^{\hat{\gamma}\hat{\delta}} \hat{K}_{\hat{\delta}\hat{\beta}} \varphi_2^{\hat{\beta}} \tag{864}$$

であって，係数は全て実関数であるから Majorana スピノル同士の AK-内積は実になる．

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{AK} \in \mathbb{R} \ . \tag{865}$$

B.4 真空

スピノル空間 $\mathbb{S}$ の真空 $|0\rangle$ を与える．真空は次を満たす．

$$\begin{aligned} \hat{B}_{+}^{-1} |0\rangle^{*} &= |0\rangle \ , \\ \gamma_a |0\rangle &= 0 \ . \end{aligned} \tag{866}$$

C ユニモジュラーに関して

ユニモジュラーな群に関してその定義と性質を述べる．$g^{-1} t_a g = a_a{}^b(g) t_b$ により定義される随伴表現 $a_a{}^b$ の行列式 $\det a$ を計算する．$\det a$ はモジュラー関数と呼ばれ，左不変積分の右変換性に現れる．$\det a = 1$ のとき，その代数はユニモジュラーと呼ばれ，左不変積分と右不変積分は適当な規格化の下で一致する．

ここではまず，左不変積分と右不変積分がモジュラー関数で結ばれることを見る．左不変カレント $g^{-1}dg = L^{-1}{}_m{}^a dx^m t_a, (g \in G : \text{Lie 群})$ を用いて，群 G 上の任意関数 $f(g) \in C^{\infty}(G)$ の左不変積分 I_f は

$$I_f = \int d\mu(g) f(g) = \int dx (\det L(g))^{-1} \ , \tag{867}$$

で与えられる．ここで $d\mu(g)$ は左不変測度である．この積分の左不変性を確かめる．g 依存性のない $g_0 \in G$ について

$$\int d\mu(g) f(g_0^{-1} g) = \int d\mu(g_0 g') f(g') = \int d\mu(g') f(g') = \int d\mu(g) f(g) \ , \ (g' = g_0^{-1} g) \ . \tag{868}$$

よって，この積分 I_f は左不変積分である．同様に I_f の右変換性を考える．

$$\begin{aligned} \int d\mu(g) f(g g_0^{-1}) &= \int d\mu(g' g_0) f(g') \\ &= \int dx (\det L(g' g_0))^{-1} f(g') \\ &= \det a(g_0) \int dx (\det L(g'))^{-1} f(g') \\ &= \det a(g_0) \int dx (\det L(g))^{-1} f(g) \ . \end{aligned} \tag{869}$$

ここで左不変カレントについて

$$\begin{aligned} L^{-1}(g' g_0)_m{}^a dx^m t_a &= (g' g_0)^{-1} dg' g_0 \\ &= g_0^{-1} g'^{-1} dg' g_0 \\ &= g_0^{-1} (L^{-1}(g')_m{}^b dx^m t_b) g_0 \\ &= L^{-1}(g')_m{}^b dx^m a_b{}^a(g_0) t_a \ , \end{aligned} \tag{870}$$

より従う式

$$L^{-1}(g'g_0)_m{}^a = L^{-1}(g')_m{}^b a_b{}^a(g_0)\ , \tag{871}$$

を用いた．したがって，左不変積分は $\det a(g_0) = 1$ のとき右不変である．

次に $\det a(g)$ の具体的な値を計算する．群の元 $g \in G$ は Lie 群 $\mathfrak{g}$ を用いて

$$g(x) = e^{t_a f^a(x)} \tag{872}$$

と書くことができる．$f^a(x)$ は x が G の座標と見なせるような適当な関数．この時，随伴表現 $a_a{}^b(g)$ は Baker-Campbell-Hausdorff の公式を用いて計算することができる．

$$\begin{aligned} a_a{}^b(x)t_b &= g^{-1}t_a g \\ &= e^{-t_b f^b(x)} t_a e^{-t_c f^c(x)} \\ &= t_a + [-t_{b_1} f^{b_1}(x), t_a] + \frac{1}{2}[-t_{b_2} f^{b_2}(x), [-t_{b_1} f^{b_1}(x), t_a]] + \cdots \\ &= t_a + f^{b_1}(x) f_{ab_1}{}^{c_1} t_{c_1} + \frac{1}{2} f^{b_1}(x) f_{ab_1}{}^{c_1} f^{b_2}(x) f_{c_1 b_2}{}^{c_2} t_{c_2} + \cdots \\ &= e^{(f^{\cdot}(x) f_{\cdot\cdot}{}^{\cdot})}{}_a{}^b t_b \end{aligned} \tag{873}$$

ここで $(f^{\cdot}(x) f_{\cdot\cdot}{}^{\cdot})$ は行列で

$$(f^{\cdot}(x) f_{\cdot\cdot}{}^{\cdot})_a{}^b = f^c(x) f_{ac}{}^b \tag{874}$$

である．これより

$$a_a{}^b(x) = e^{(f^{\cdot}(x) f_{\cdot\cdot}{}^{\cdot})}{}_a{}^b \tag{875}$$

が得られる．最後に，行列式を計算すれば

$$\begin{aligned} \det a &= \det e^{(f^{\cdot}(x) f_{\cdot\cdot}{}^{\cdot})} \\ &= e^{\mathrm{Tr}(f^{\cdot}(x) f_{\cdot\cdot}{}^{\cdot})} \\ &= e^{f^b(x) f_{ab}{}^a} \end{aligned} \tag{876}$$

を得る．故に，ユニモジュラーの時は構造定数に対して

$$f_{ab}{}^a = 0 \tag{877}$$

が従う．

参考文献

[1] K. Kikkawa and M. Yamasaki, "Casimir effects in superstring theories," Physics Letters B **149** no. 4-5, (1984) 357–360.

[2] T. H. Buscher, "A symmetry of the string background field equations," Physics Letters B **194** no. 1, (1987) 59–62.

[3] T. H. Buscher, "Path-integral derivation of quantum duality in nonlinear sigma-models," Physics Letters B **201** no. 4, (1988) 466–472.

[4] A. Dabholkar and C. Hull, "Duality twists, orbifolds, and fluxes," Journal of High Energy Physics **2003** no. 09, (2003) 054.

[5] A. Flournoy, B. Wecht, and B. Williams, "Constructing nongeometric vacua in string theory," Nuclear Physics B **706** no. 1-2, (2005) 127–149.

[6] J. Shelton, W. Taylor, and B. Wecht, "Nongeometric flux compactifications," Journal of High Energy Physics **2005** no. 10, (2005) 085.

[7] W. Siegel, "Superspace duality in low-energy superstrings," Physical Review D **48** no. 6, (1993) 2826.

[8] W. Siegel, "Manifest duality in low-energy superstrings," in International conference on strings, vol. 93, pp. 353–363. 1993.

[9] C. Hull and B. Zwiebach, "Double field theory," Journal of High Energy Physics **2009** no. 09, (2009) 099.

[10] G. Arutyunov, S. Frolov, B. Hoare, R. Roiban, and A. A. Tseytlin, "Scale invariance of the η-deformed ads5$\times$ s5 superstring, t-duality and modified type ii equations," Nuclear Physics B **903** (2016) 262–303.

[11] Y. Sakatani, S. Uehara, and K. Yoshida, "Generalized gravity from modified dft," Journal of High Energy Physics **2017** no. 4, (2017) 1–34.

[12] J.-i. Sakamoto, Y. Sakatani, and K. Yoshida, "Weyl invariance for generalized supergravity backgrounds from the doubled formalism," Progress of Theoretical and Experimental Physics **2017** no. 5, (2017) .

[13] J. J. Fernández-Melgarejo, J.-i. Sakamoto, Y. Sakatani, and K. Yoshida, "Weyl invariance of string theories in generalized supergravity backgrounds," Physical review letters **122** no. 11, (2019) 111602.

[14] D. Geissbühler, "Double field theory and n=4 gauged supergravity," Journal of High Energy Physics **2011** no. 11, (2011) 1–26.

[15] G. Aldazabal, W. Baron, D. Marques, and C. Nunez, "The effective action of double field theory," Journal of High Energy Physics **2011** no. 11, (2011) 1–34.

[16] M. Grana and D. Marques, "Gauged double field theory," Journal of High Energy Physics **2012** no. 4, (2012) 1–19.

[17] G. Aldazabal, D. Marques, and C. Nunez, "Double field theory: a pedagogical review," Classical and Quantum Gravity **30** no. 16, (2013) 163001.

[18] C. Xenia and F. Quevedo, "Duality symmetries from non-abelian isometries in string theory," Nuclear Physics B **403** no. 1-2, (1993) 377–394.

[19] A. Giveon and M. Roček, "On nonabelian duality," Nuclear Physics B **421** no. 1, (1994) 173–187.

[20] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, J. Barbon, and Y. Lozano, "Some global aspects of duality in string theory," Nuclear Physics B **415** no. 1, (1994) 71–100.

[21] C. Klimcik, "Poisson-lie t-duality," arXiv preprint hep-th/9509095 (1995) .

[22] R. Blumenhagen, F. Hassler, and D. Lüst, "Double field theory on group manifolds," Journal of High Energy Physics **2015** no. 2, (2015) 1–44.

[23] R. Blumenhagen, F. Hassler, and D. Lüst, "Generalized metric formulation of double field theory on group manifolds," Journal of High Energy Physics **2015** no. 08, (2015) 56.

[24] P. du Bosque, F. Hassler, and D. Lüst, "Flux formulation of dft on group manifolds and generalized scherk-schwarz compactifications," Journal of High Energy Physics **2016** no. 2, (2016) 1–41.

[25] F. Hassler, "Poisson-lie t-duality in double field theory," Physics Letters B **807** (2020) 135455.

[26] A. Neveu and J. H. Schwarz, "Tachyon-free dual model with a positive-intercept trajectory," Physics Letters B **34** no. 6, (1971) 517–518.

[27] P. Ramond, "Dual theory for free fermions," Physical Review D **3** no. 10, (1971) 2415.

[28] T. J. Courant, "Dirac manifolds," Transactions of the American Mathematical Society **319** no. 2, (1990) 631–661.

[29] I. Vaisman, "On the geometry of double field theory," Journal of mathematical physics **53** no. 3, (2012) 033509.

[30] U. Carow-Watamura, K. Miura, S. Watamura, and T. Yano, "Metric algebroid and dirac generating operator in double field theory," Journal of High Energy Physics **2020** no. 10, (2020) 1–51.

[31] "出版準備中,".

[32] V. Drinfel'd, "Quantum groups," in Proc. Int. Congr. Math., vol. 1, pp. 798–820. 1986.

[33] A. Y. Alekseev and A. Malkin, "Symplectic structures associated to lie-poisson groups," Communications in Mathematical Physics **162** no. 1, (1994) 147–173.

[34] F. Falceto and K. Gawedzki, “Lattice wess-zumino-witten model and quantum groups,” Journal of Geometry and Physics **11** no. 1-4, (1993) 251–279.

[35] I. Vaisman, “Transitive courant algebroids,” International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **2005** no. 11, (2005) 1737–1758.

[36] B. Zwiebach, “Closed string field theory: Quantum action and the batalin-vilkovisky master equation,” Nuclear Physics B **390** no. 1, (1993) 33–152.

[37] O. Hohm and B. Zwiebach, “l_∞ algebras and field theory,” Fortschritte der Physik **65** no. 3-4, (2017) 1700014.

[38] A. Deser and C. Saemann, “Extended riemannian geometry i: Local double field theory,” in Annales Henri Poincaré, vol. 19, pp. 2297–2346, Springer. 2018.

[39] C. J. Grewcoe and L. Jonke, “Double field theory algebroid and curved l ∞ -algebras,” Journal of Mathematical Physics **62** no. 5, (2021) 052302.

[40] T. Kaluza Sitzungsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenshaften zu Berlin (1921) 996.

[41] O. Klein Zeitshrift für Physik **37** 895–906.

[42] 清水克多郎, 牟田泰三, and 山岡吉広, “Kaluza と klein の論文の和訳 i (翻訳),” 素粒子論研究 **67** no. 5, (1983) 270–276.

[43] 清水克多郎 and 牟田泰三, “Kaluza と klein の論文の和訳 ii,” 素粒子論研究 **68** no. 3, (1983) 125–135.

[44] U. Carow-Watamura, N. Ikeda, T. Kaneko, and S. Watamura, “Dft in supermanifold formulation and group manifold as background geometry,” Journal of High Energy Physics **2019** no. 4, (2019) 1–41.

[45] A. Alekseev and P. Xu, “Derived brackets and courant algebroids.” `http://www.personal.psu.edu/pxx2/anton-final.pdf`.

[46] A. Lichnerowicz, “Spineurs harmoniques,” C. R. Acad. Sci Paris no. 257, (1963) 7–9.

[47] O. Hohm and B. Zwiebach, “Towards an invariant geometry of double field theory,” Journal of Mathematical Physics **54** no. 3, (2013) 032303.

[48] M. Hong, Y. Kim, and E. Ó. Colgáin, “On non-abelian t-duality for non-semisimple groups,” The European Physical Journal C **78** no. 12, (2018) 1–12.

[49] E. Tyurin and R. von Unge, “Poisson-lie t-duality: the path-integral derivation,” Physics Letters B **382** no. 3, (1996) 233–240.

[50] R. Von Unge, “Poisson-lie t-plurality,” Journal of High Energy Physics **2002** no. 07, (2002) 014.

[51] Y. Sakatani, "Type ii dft solutions from poisson–lie-duality/plurality," Progress of Theoretical and Experimental Physics **2019** no. 7, (2019) 073B04.

[52] B. Jurčo and J. Vysokỳ, "Poisson–lie t-duality of string effective actions: A new approach to the dilaton puzzle," Journal of Geometry and Physics **130** (2018) 1–26.

[53] O. Hohm, S. K. Kwak, and B. Zwiebach, "Double field theory of type ii strings," Journal of High Energy Physics **2011** no. 9, (2011) 1–64.

[54] J. Scherk and J. H. Schwarz, "How to get masses from extra dimensions," in Supergravities in Diverse Dimensions: Commentary and Reprints (In 2 Volumes), pp. 1282–1309. World Scientific, 1989.