修士学位論文要約（令和４年３月）

ヨセフスの問題とその逆問題に対する線形時間アルゴリズム

石塚 将太
指導教員：篠原 歩

Linear Time Algorithms for the Josephus Problem and Its Inverse

Shota ISHIZUKA
Supervisor: Ayumi SHINOHARA

In this paper, we define the Josephus Problem as the problem of computing the Josephus Permutation. The Josephus Permutation can be described as follows: We are given positive integers n and k. Assume that objects $0, 1, \cdots, n-1$ are placed in order around a circle. Beginning with the object 0, we travel around the circle, removing every k-th remaining object. This process continues until all n objects have been removed. Denoting the i-th removed object by s_i, we define the Josephus Permutation as $J_{n,k} = (s_0, s_1, \cdots, s_{n-1})$. The contribution of this paper is twofold. First, we propose an algorithm for the Josephus Problem that works in $O(n)$ time under the assumption that the arithmetic and logical operations on $O(n \log n)$-bit natural numbers can be performed in constant time. This improves long-standing previous bounds of $O(n \log n)$ and $O(n \log k)$. Secondly, we define the Inverse Josephus Problem as the problem of computing (n, k) from a Josephus Permutation $J_{n,k}$, and also we propose an $O(n)$ time algorithm to solve it.

1.　背景

本研究では，ヨセフスの問題という数学パズルを扱う．古典的なヨセフスの問題は，次のように表現される．はじめに，n 人の兵士 $0, 1, \cdots, n-1$ が円状に並んでおり，兵士 0 だけが剣を持っている．剣を持っている兵士は，自分から数えて k 人先の兵士を処刑し，その次の兵士に剣を手渡す．処刑された兵士は，円から取り除かれる．この処刑プロセスは，全ての兵士が処刑されるまで繰り返される．ここで，古典的なヨセフスの問題とは，n と k が与えられた状況で，最後に処刑される兵士を答える問題のことである．例えば，$n=6, k=3$ の状況では，図 1 に示すように，$(3,1,0,2,5,4)$ の順番で処刑が行われる．したがって，この問題に対する答えは 4 である．古典的なヨセフスの問題については，漸化式を用いた $O(n)$ 時間のアルゴリズムが知られている [8]．

古典的なヨセフスの問題は，これまで様々な変種が考えられてきた．Ruskey ら [6] は，兵士に体力 ℓ を持たせ，ℓ 回斬られるまでは円から取り除かれない，という**体力つきヨセフスの問題** *(The Feline Josephus Problem)* を提案した．Matsumoto ら [5] は，兵士を円形に並べる代わりに直線上に並べ，一端に到達したら方向転換して数えるという変種を提案した．Sullivan ら [7] は，k 人おきに 1 人の兵士を処刑する代わりに，1 人おきに連続する k 人を処刑するという変種を提案した．

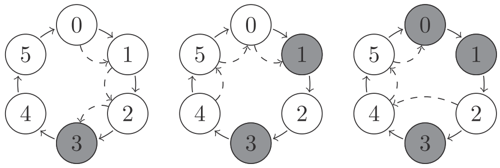

図 1．$n=6$, $k=3$ の場合の処刑の様子．左から順にそれぞれ，兵士 3, 1, 0 が処刑される瞬間を表している．

本研究では，古典的なヨセフスの問題において，最後に処刑される兵士ではなく，兵士が処刑される系列 $J_{n,k}$ に着目する．系列 $J_{n,k}$ のことを**ヨセフス順列**と呼び，ヨセフス順列を求める問題のことを**ヨセフスの問題**と呼ぶことにする．

Dowdy ら [1] は，$\mathrm{lcm}(1,2,\cdots,n)$ 個の異なるヨセフス順列が存在し，$J_{n,k} = J_{n,k+\mathrm{lcm}(1,2,\cdots,n)}$ を満たすことを示した．ここで，$\mathrm{lcm}(1,2,\cdots,n)$ は $\{1,2,\cdots,n\}$ の最小公倍数である．Knuth [2] [3] は，ヨセフスの問題に対する $O(n \log n)$ 時間のアルゴリズムを提案した．Lloyd [4] は，ヨセフスの問題に対する $O(n \log k)$ 時間のアルゴリズムを提案した．

2.　本研究の成果

本研究の貢献は以下の二点である．

一つ目の貢献は，ヨセフスの問題に対する $O(n)$ 時

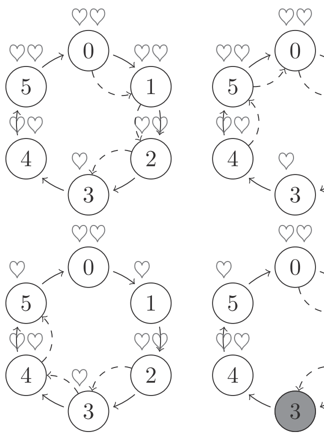

図 2. $J_{6,3,2}$ 導出の様子．左上，右上，左下，右下の順に兵士 $3, 1, 5, 3$ が斬られた瞬間を表しており，♡は兵士の残り体力を表す．

間アルゴリズムの提案である．ただし，このアルゴリズムは既存手法よりも大きなワード長を計算機に要求する．上述の Knuth [2) 3)] の手法と Lloyd [4)] の手法では，どちらも $O(\log n + \log k)$ ビットのワード長を必要とするのに対して，提案手法では $O(n \log n)$ ビットのワード長が必要である．すなわち，$O(n \log n)$ ビットのビット列に対する論理演算および算術演算を定数時間で処理できることを仮定する．

二つ目の貢献は，ヨセフスの逆問題に対する $O(n)$ 時間アルゴリズムの提案である．ヨセフスの逆問題とは，順列 π を入力として，$J_{n,k} = \pi$ を満たす (n, k) を出力する問題である．例えば，順列 $\pi = (3, 1, 0, 2, 5, 4)$ が与えられたとき，$J_{6,3} = \pi$ を満たすので $(6, 3)$ を出力する．提案手法は，ヨセフスの問題に対する提案手法と同様の仮定を必要とする．

また，提案アルゴリズムを自然に拡張することで，体力つきヨセフスの問題で処刑される兵士の系列 $J_{n,k,\ell}$ を計算する $O(n\ell)$ 時間アルゴリズムが得られる．体力つきヨセフスの問題では，それぞれの兵士は体力 ℓ を持ち，ℓ 回斬られるまでは死亡しない．例えば，$n = 6, k = 3, \ell = 2$ のとき，図 2 に示すように，兵士は $(3, 1, 5, 3, 1, 0, 0, 2, 4, 5, 4, 2)$ の順に斬られて，$J_{6,3,2} = (3, 1, 0, 5, 4, 2)$ の順に死亡する．Ruskey ら [6)] は，(n, k, ℓ) から $J_{n,k,\ell}$ を計算する $O(n^2)$ 時間のアルゴリズムの存在を示した．本研究では，$\ell < n$ の場合に，既存手法よりも高速に動作する $O(n\ell)$ 時間のアルゴリズムを提案する．ただし，上述の提案手法と同様の仮定を必要とする．

3.　今後の課題

本研究で提案する３つのアルゴリズムは，いずれもワード長に対する強い仮定を必要としている．より弱い仮定のもとでの，高速なアルゴリズムを提案することが今後の課題である．

また，$J_{n,k,\ell}$ に関連する次の研究課題を設定したが，いずれも未解決である．

- (n, k, ℓ) から $J_{n,k,\ell}$ を計算する $O(n)$ 時間のアルゴリズムの提案
- 次の種類数の数え上げ
  - $f(n) := |\{J_{n,k,l} \mid k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}^+\}|$
  - $g(n, k) := |\{J_{n,k,l} \mid l \in \mathbb{Z}^+\}|$
  - $h(n, \ell) := |\{J_{n,k,l} \mid k \in \mathbb{N}\}|$
- 順列 π から $J_{n,k,\ell} = \pi$ を満たす (n, k, ℓ) を返す問題に対する効率的なアルゴリズムの提案

文献

1) James Dowdy and M. Mays. Josephus permutations. *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, Vol. 6, pp. 125–130, 1989.
2) Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume I. Fundamental Algorithms.* The Art of Computer Programming. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.
3) Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume III. Searching and Sorting.* The Art of Computer Programming. Addison-Wesley, 1973.
4) Errol L Lloyd. An $O(n \log m)$ algorithm for the Josephus Problem. *Journal of Algorithms*, Vol. 4, No. 3, pp. 262–270, 1983.
5) Keiichi Matsumoto, Tomoki Nakamigawa, and Mamoru Watanabe. On the switchback vertion of Josephus problem. Yokohama Mathematical Journal = 横濱市立大學紀要. D 部門, 数学, Vol. 53, No. 2, pp. 83–88, 2007.
6) Frank Ruskey and Aaron Williams. The feline Josephus problem. *Theory of Computing Systems*, Vol. 50, No. 1, pp. 20–34, 2012.
7) Shaun Sullivan and Thomas Beatty. Structured shuffles and the Josephus problem. *Open Journal of Discrete Mathematics*, Vol. 2, No. 4, pp. 138–141, 2012.
8) Diana Christine Woodhouse. The extended Josephus problem. In *Revista matemática hispanoamericana*, Vol. 33, pp. 207–218, 1973.