修士学位論文要約（令和４年３月）

ラベル付き部分グラフの辺素な詰込み問題に関する研究

白井 智仁
指導教員: 周 暁

The Edge-disjoint Set Packing Problem on a Graph with Its Labeled Subgraphs

Tomohito SHIRAI
Supervisor: Xiao ZHOU

The set packing problem is well-known as one of the Karp's 21 NP-complete problems. Given a universal set U, a subsets collection S of U, and a non-negative integer k, the set packing problem asks to determine if a set of mutually disjoint subsets $S'(|S'| \geq k)$ from S exists or not. In this thesis, we study the variant finding edge-disjoint set from labeled subgraphs. Given an undirected simple graph G and a labeled subgraphs collection $\mathcal{H}$ of G, and a non-negative integer k, the variant asks to determine if a set of edge-disjoint subgraphs $\mathcal{H}'(|\mathcal{H}'| \geq k)$ from $\mathcal{H}$ exists or not. In this thesis, we show what computational complexities this variant has under the various graph class constraints for G and $\mathcal{H}$. In addition, we give some polynomial-time algorithms to solve the problems for some restricted conditions.

1.　はじめに

集合詰込み問題はKarpの21のNP完全問題[2)]の1つとして知られ，計算複雑性理論の分野において古くから研究されている．集合詰込み問題は，台集合U，その部分集合族$\mathcal{S}$, さらに非負整数kが与えられたとき，互いに素な集合$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$(ただし$|\mathcal{S}'| \geq k$)があるか判定する問題である．

これに対し，本論文の研究対象であるラベル付き部分グラフの辺素な詰込み問題に関する研究はグラフG, Gの部分グラフの集合族$\mathcal{H}$，さらに非負整数kが与えられたとき，辺素な部分グラフの集合族$\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$(ただし$|\mathcal{H}'| \geq k$)が存在するか判定する問題である．ラベル付き部分グラフの辺素な詰込み問題に関する研究は今後ESP(The Edge-disjoint Set Packing Problem)と省略する．

任意の集合詰込み問題が与えられたときに，その各要素をグラフの辺に置き換えることで，対応するESPに変換することができる．その反対に，任意のESPが与えられたときにはその各グラフの辺集合を使った集合詰込み問題に変換することも可能である．従って，集合詰込み問題とESPはそのあらゆる問題例を相互に変換することができ，その意味で等価な問題といえる．

すなわち，ESPを研究する目的は集合詰込み問題をグラフクラスの手法でもって解析し，新たな知見を与えることである．

2.　関連研究と本論文の結果

集合詰込み問題に対する結果は全て一般にESPに適用することができる．

集合詰込み問題は，入力される部分集合のサイズが高々2のときPであるが，全ての部分集合のサイズが3のときですらNP完全であることが知られている[2)]．この系としてESPに対して次のことが言える．入力される部分グラフの辺数が高々2のときPであるが，全ての部分グラフの辺数が3のときですらNP完全である．

また，今後は表記の都合上，$\mathcal{H} \subset$ グラフクラスは，$\mathcal{H}$の要素がそのグラフクラスに全て属すことを表している．

上述の通りESPは入力される全ての部分グラフの辺数が3のときですらNP完全であるが，その結果からグラフクラスに制限を加えた部分問題の計算複雑性を導くことはできない．そこで，任意の辺数3の単純連結グラフが必ず3パス·3スター·3サイクルいずれかと同型となる事実から，入力される部分グラフのグラフクラスをそれぞれパス·スター·サイクルとする以下のような場合について研究を行った．

$\mathcal{H} \subset$ パス の場合

$\mathcal{H} \subset$ パス の場合について，既知の結果としてGが完全二部グラフかつ全てのHが3パスのときでさえNP完全であり，集合詰込み問題と等しい近似率の下界$\Omega(m^{\frac{1}{2}})$を持つこと，さらに入力グラフGが木のときにHの辺数に関わらずPであることが知られている[3)]．

本論文では入力グラフ G が直並列二部グラフで全ての H が 4 パスのときでさえ NP 完全であることを示す．この結果により，入力グラフ G の木幅が 1 のとき P でありながら，木幅が 2 であれば NP 完全であるとわかり，木幅に対する困難性と容易性の境界が明らかとなる．

$\mathcal{H} \subset$ スター の場合

$\mathcal{H} \subset$ スター の場合について，既知の結果として全ての $H \in \mathcal{H}$ が 3 スターのときでさえ NP 完全である [2]．本論文では G がスターかつ全ての $H \in \mathcal{H}$ が 3 スターのときでさえ NP 完全であることを示す．加えて，G が 2 連結 3 正則平面グラフかつ全ての H が 3 スターのときでさえ NP 完全であり，集合詰込み問題と等しい近似率の下界 $\Omega(m^{\frac{1}{2}})$ を持つことを示す．

上の結果は G の次数制限がない場合 NP 完全であることを意味するが，一方下の結果は G の次数が 3 であったとしても NP 完全であることを意味する．

$\mathcal{H} \subset$ サイクル の場合

全ての $H \in \mathcal{H}$ が 3 サイクルの場合は，あるグラフに対して，そのグラフ上の全ての同型部分グラフを詰め込む設定の問題に対する既知の結果 [1] から入力グラフ G の最大次数が 5 でさえ NP 完全であると導くことができる．これは，ESP の入力グラフ G 上のあらゆる 3 サイクルが部分グラフの集合族として入力されることを仮定しても，入力部分グラフの集合族のサイズが $O(n^3)$ となることによる．ただし n はグラフの点数である．これに対して，本論文では入力グラフ G が 5 正則平面グラフかつ，全ての $H \in \mathcal{H}$ が 3 サイクルの場合でさえ NP 完全であることを示す．

さらに G が完全二部グラフかつ $H \in \mathcal{H}$ の辺数が 4 のときですら NP 完全であることを示す．これは二部グラフ上に 3 サイクルが存在しないことを考えると，最小の辺数であっても NP 完全であることを意味する．

さらに，G が直並列二部グラフかつ全ての $H \in \mathcal{H}$ が 6 サイクルのときでさえ NP 完全であることを示す．これに対して本論文の 4 章では，G が木幅定数グラフかつ全ての $H \in \mathcal{H}$ が 3 サイクルのとき多項式時間で動作する動的計画法を与える．

3. まとめ

本論文では，ESP に入力される部分グラフのグラフクラスをそれぞれパス・スター・サイクルと制限して解析した結果を示した．

$\mathcal{H} \in$ パス の場合，入力グラフ G が直並列二部グラフのとき NP 完全であることを示した．2 章でも述べた通り，入力グラフ G が木のときに P であることが知られている [3] ため，木幅に対する計算困難性と容易性の境界を得た．今後の課題として，直並列グラフに 3 パスを詰め込む問題が挙げられる．

$\mathcal{H} \in$ スター の場合，次数制限のないグラフクラスを G としたときには NP 困難であり，さらに，3 正則という次数制限があった場合でも NP 困難であるといった結果を得た．

$\mathcal{H} \in$ サイクル の場合，G の木幅に対する解析を与えた．G が直並列二部グラフかつ $H \in \mathcal{H}$ の辺数が高々6 ですら NP 完全であることに対し，G が木幅定数グラフかつ $H \in \mathcal{H}$ の辺数が 3 のとき，多項式時間で動作する動的計画法を与えた．また，G が直並列グラフのとき，$H \in \mathcal{H}$ の辺数が高々4 のとき，多項式時間で動作する貪欲アルゴリズムを与えた．

G が直並列グラフのとき，6 サイクルを詰め込むのは NP 完全であり，4 サイクルを詰め込むことは多項式時間で可能であることが分かっているので，5 サイクルを詰め込むときの計算複雑性を求めることが今後の課題である．

文献

1) Alberto Caprara and Romeo Rizzi. Packing triangles in bounded degree graphs. *Information Processing Letters*, Vol. 84, No. 4, pp. 175–180, 2002.
2) Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*, pp. 85–103, 1972.
3) Chenyang Xu and Guochuan Zhang. The path set packing problem. *International Computing and Combinatorics Conference*, pp. 305–315, 2018.