修士学位論文要約（令和４年３月）

グラフの完全シュタイナー木遷移問題に関する研究

水戸 淳平

指導教員: 周 暁　　学位論文指導教員: 鈴木 顕

The Full Steiner Tree Reconfiguration Problem on Graphs

Jumpei MITO

Supervisor: Xiao ZHOU　　Research Advisor: Akira SUZUKI

For a graph and a vertex subset, called a terminal set, a full Steiner tree is a subtree of the graph in which all terminals are contained in leaves. In the full Steiner tree reconfiguration problem, we are given a graph, a terminal set, and two full Steiner trees. Then, we are asked to determine whether a given full Steiner tree is reachable to another one by repeating the operation of exchanging one edge at a time, while before and after the operation, it must be a full Steiner tree. In this thesis, we show that this problem is PSPACE-complete for planar graphs, bounded treewidth graphs, bipartite graphs and split graphs. On the other hand, we give polynomial-time algorithm to solve the problem for cactus graphs and cographs.

1.　はじめに

遷移問題は，組合せ問題の実行可能解の間に隣接関係を導入した解空間において，解同士の到達可能性や連結性について判定する問題である．これまで，グラフ彩色 [1)]や充足可能性問題 [2)] などの様々な問題に対する遷移問題の研究が進められてきた．本論文では，完全シュタイナー木に対する遷移問題について，グラフクラスの観点から問題の計算複雑性を解析する．

2.　定義

グラフ $G=(V,E)$ と**ターミナル集合** $S \subseteq V$ に対し，G の部分木 T が頂点集合 S を含むとき，T を S の**シュタイナー木**と呼ぶ．また，T が T の葉に S を含むようなシュタイナー木であるとき，T を S の**完全シュタイナー木**と呼ぶ．G における S の２つの完全シュタイナー木 T, T' について，$|E(T) \setminus E(T')| = 1$，かつ $|E(T') \setminus E(T)| = 1$ が成り立つとき，T と T' は**隣接している**という．また，次の条件を満たすような完全シュタイナー木の系列 $\langle T_0, T_1, \ldots, T_\ell = T_r \rangle$ を，T_0 と T_r を結ぶ**遷移系列**と呼ぶ．

- 各 $i \in \{0, 1, \ldots, \ell-1\}$ に対し，T_i と T_{i+1} は隣接している

T_0 と T_r を結ぶ遷移系列が存在するとき，T_0 と T_r は互いに**遷移可能**であるといい，$T_0 \leftrightsquigarrow T_r$ と表記する．

完全シュタイナー木遷移問題とは，入力としてグラフ G，ターミナル集合 $S \subseteq V$，２つの完全シュタイナー木 T_0, T_r が与えられたときに，T_0 と T_r を結ぶ遷移系列が存在するかどうかを判定する問題である．

T の**極小完全シュタイナー木** $T_{\min}(T)$ とは，T の部分木のうち，完全シュタイナー木であり，かつ任意の１辺を削除すると完全シュタイナー木ではなくなるものである．

3.　本論文の結果

本論文では完全シュタイナー木遷移問題について，一般グラフに対する本問題の定理を与え，またグラフクラスに着目して計算複雑性の解析を行った．

3.1　一般グラフに対する本問題の性質

本節では，一般グラフに対する完全シュタイナー木遷移問題で成り立つ定理をいくつか与える．

定理 1 グラフ $G=(V,E)$ において，$|V(T)| = |V(T')|$ である２つの完全シュタイナー木 T, T' について，$V(T) = V(T')$ ならば，$T \leftrightsquigarrow T'$ である．

略証． ターミナルと接続している辺とそれ以外の辺が遷移できることを示した．□

定理 2 グラフ $G=(V,E)$ において，$|V(T)| = |V(T')|$ である２つの完全シュタイナー木 T, T' について，$T_{\min}(T) = T_{\min}(T')$ ならば，$T \leftrightsquigarrow T'$ である．

略証． T と T' の辺で一致していない辺の数に関する帰納法を用いて示した．□

3.2 計算困難性

本節では，計算困難性に関する結果を与える．

定理 3 入力グラフ G が平面グラフ，木幅定数グラフ，二部グラフに制限された場合，完全シュタイナー木遷移問題は PSPACE 完全である．

略証． 入力グラフを平面グラフ，木幅定数グラフ，二部グラフに制限すると PSPACE 完全であることが知られているシュタイナー木遷移問題[3) 4)]からの多項式時間帰着を与えた． □

定理 4 入力グラフ G がスプリットグラフに制限された場合，完全シュタイナー木遷移問題は PSPACE 完全である．

略証． PSPACE 完全であることが知られている頂点被覆遷移問題[5)]からの多項式時間帰着を与えた． □

3.3 計算容易性

本節では，計算容易性に関する結果を与える．

定理 5 入力グラフ G がカクタスグラフに制限された場合，完全シュタイナー木遷移問題を $O(n^2)$ で解く多項式時間アルゴリズムが存在する．ただし n は G の頂点数である．

略証． カクタスグラフにおいて，T_0, T_r からそれぞれ遷移可能な完全シュタイナー木のうち，削除しても完全シュタイナー木であるような辺の本数が最大となる完全シュタイナー木を求める多項式時間アルゴリズムを T_0, T_r に適用する．その後各極小完全シュタイナー木が一致しているかどうかを調べることで本問題の判定を行うことができることを示した． □

定理 6 入力グラフ G がコグラフに制限された場合，完全シュタイナー木遷移問題を $O(mn^5)$ で解く多項式時間アルゴリズムが存在する．ただし m は G の辺数，n は G の頂点数である．

略証． コグラフの任意の連結誘導部分グラフの直径は高々2であり，任意の誘導部分グラフはコグラフとなるといった特徴から，以下の補題を示した．

補題 1 コグラフ G における完全シュタイナー木遷移問題において，$|V(T_0)| = |V(T_r)| \geq |S| + 5$ ならば，$T_0 \leftrightsquigarrow T_r$ である．

次に，$|V(T_0)| = |V(T_r)| \leq |S| + 4$ の場合に多項式時間で完全シュタイナー木が遷移可能かを判定するアルゴリズムを示した．そのアルゴリズムでは，完全シュタイナー木遷移問題の解空間グラフを縮約した**縮約解空間グラフ**を導入し，その縮約解空間グラフ上で 2 つの完全シュタイナー木に対応する頂点の連結性を判定することにより本問題の判定も行えるということを示した． □

4. まとめと今後の課題

本論文では完全シュタイナー木遷移問題について，一般グラフに対する本問題の定理を与え，またグラフクラスに着目して計算複雑性の解析を行った．今後の課題としては，入力グラフが区間グラフであるときの本問題の計算複雑性を解析することや入力グラフがコグラフの場合のより計算時間の速い多項式時間アルゴリズムの開発などが考えられる．

文献

1) Paul Bonsma and Luis Cereceda. Finding paths between graph colourings: PSPACE-completeness and superpolynomial distances. *Theoretical Computer Science*, 410(50):5215–5226, 2009.
2) Parikshit Gopalan, Phokion G. Kolaitis, Elitza Maneva, and Christos H. Papadimitriou. The connectivity of boolean satisfiability: Computational and structural dichotomies. *SIAM Journal on Computing*, 38(6):2330–2355, 2009.
3) Haruka Mizuta. *Reconfiguration of Subgraphs Satisfying Specific Properties*. PhD thesis, Tohoku University, 2020.
4) Haruka Mizuta, Takehiro Ito, and Xiao Zhou. Reconfiguration of Steiner trees in an unweighted graph. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E100.A(7):1532–1540, 2017.
5) Tom C. van der Zanden. Parameterized complexity of graph constraint logic. In Thore Husfeldt and Iyad Kanj, editors, *10th International Symposium on Parameterized and Exact Computation (IPEC 2015)*, volume 43 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 282–293, Dagstuhl, Germany, 2015.