修士学位論文要約（令和４年３月）

グラフの最小パスカバー問題に関する研究

吉田 航介

指導教員: 周 暁　　学位論文指導教員: 田村 祐馬

The Minimum Path Cover Problem on Graphs

Kosuke YOSHIDA

Supervisor: Xiao ZHOU　　Research Advisor: Yuma TAMURA

A path cover of a graph G is a set of paths which cover all the vertices of G. The minimum path cover problem is to decide the minimum cardinality of a path cover of G. This problem is a generalization of the Hamiltonian path problem, and thus it is known to be NP-hard for general graphs. In this thesis, we show a polynomial algorithm for graphs with bounded treewidth. This algorithm implies tractability for tree, unicycle, and cacti, but we also give faster algorithms for these graphs. Moreover, we design a linear algorithm for threshold graphs.

1.　はじめに

グラフ上の頂点や辺を通るような経路を見つける問題は古くから研究されてきた．例えば，与えられたグラフに対して同じ頂点を２回以上通ることなくグラフの全頂点を通るような経路が存在するか判定する問題はハミルトンパス問題として知られている[5)]．ここで，同じ頂点を２回以上通ることのない経路を**パス**と呼ぶ．また，パス P が頂点 v または辺 e を通るとき，それぞれ P は v または e を**カバー**すると呼ぶ．すると，ハミルトンパス問題は全頂点をカバーするような１本のパスが存在するかどうかを判定する問題だと言い換えられる．

一方で，複数のパスを用いてグラフの頂点や辺をカバーする問題も考案されてきた．与えられたグラフのある対象をカバーするのに必要な最小のパスの本数を求める問題は主に**パスカバー問題**と呼ばれる．パスカバー問題は動機の違いから対象や制約が違う様々な問題が研究されてきた．

例えば，パス同士が同一の頂点を共有しないように，複数のパスですべての頂点をカバーする問題に対する研究が 1990 年代には既に行われている[2) 7)]．また，パス同士が同一の辺を共有しないように，複数のパスですべての辺をカバーする問題に対する研究も 1990 年代には既に行われており[9)]，ここ数年でも新たな結果が与えられている[4)]．さらに，パス同士が同じ辺を共有することを許したうえですべての辺をカバーする問題の研究も行われてきた[1)]．これらのパスカバー問題に関する研究では多くの場合，入力グラフの構造を制限し，入力サイズの多項式時間でカバーに必要なパスの本数を求めるアルゴリズムの構築を目的としている．また，パス同士が頂点や辺を共有することを許したうえですべての頂点をカバーする問題については，運搬経路問題の一種として研究が行われている[3) 10)]．しかし，この場合においては，入力グラフの構造を制限し，入力サイズの多項式時間でカバーに必要なパスの本数を求めるアルゴリズムの構築を目的とした研究はほとんど行われてこなかった．

このような背景から，本論文ではグラフ G に対し，パス同士による頂点や辺の共有を許したうえですべての頂点をカバーするパスの集合の最小サイズ $\mathrm{pc}(G)$ を求める問題を**最小パスカバー問題**と定義し，入力グラフの構造という観点から計算複雑性の解析を行う．

本問題はハミルトンパス問題を一般化したものであるため，ハミルトンパス問題が NP 困難であるようなグラフクラス (例えば平面グラフ[6)] や二部グラフ，スプリットグラフ[8)]) に対しては本問題も NP 困難である．

2.　本論文の結果

本論文では複数のグラフクラスにおける最小パスカバー問題に対し多項式時間アルゴリズムが存在することを示した．まず，木幅定数グラフに対し以下の定理を示した．

定理 1. 頂点数が n，木幅が t である木幅定数グラフ G と正整数 k に対して $\mathrm{pc}(G)$ を出力するか，$\mathrm{pc}(G) > k$ であると出力する $O(n \cdot t^{O(t^3)} + n \cdot t \cdot 2^t \cdot$

$k^{2t\cdot(t+1)!\cdot 3^{t+2}+1})$ 時間アルゴリズムが存在する．

定理 1 は G の良木分解に沿って動的計画法を構築することで得られる．ここで，グラフ G の頂点数 n と $\mathrm{pc}(G)$ に対し，G の各頂点を 1 頂点からなるパスでカバーすると，そのパスの集合はパスカバーであることから $\mathrm{pc}(G) \leq n$ が成り立つ．ゆえに系 1 が成り立つ．

系 1. 頂点数が n，木幅が t である木幅定数グラフ G に対して $\mathrm{pc}(G)$ を $O(t\cdot 2^t\cdot n^{2t\cdot(t+1)!\cdot 3^{t+2}+2})$ 時間で求めることができる．

この系から，木幅定数グラフに含まれる木，ユニサイクル，カクタスといったグラフに対しても多項式時間アルゴリズムが存在する．しかし，n の指数部が大きいため，それらグラフクラスに対し以下の定理を示した．

定理 2. 頂点数が n である木 G における最小パスカバー問題は $O(n)$ 時間で解くことができる．

この定理 2 は以下の補題 1 から示される．

補題 1. 木 G について $\mathrm{pc}(G) = \lceil |L(G)|/2 \rceil$．ただし $L(G)$ は G において次数が 1 である頂点の集合である．

略証. 頂点数が n である木 G に対し $\lceil |L(G)|/2 \rceil$ 本のパスですべての辺をカバーできるため [1]，その本数のパスによりすべての頂点をカバーできる．また，1 本のパスにつき次数 1 の頂点を高々 2 つしかカバーできないことから示される． □

定理 3. 頂点数が n であるユニサイクル G に対し，最小パスカバー問題を $O(n)$ 時間で解くことができる．

略証. ユニサイクル G に対し $\lceil |L(G)|/2 \rceil \leq \mathrm{pc}(G) \leq \lceil (|L(G)|+1)/2 \rceil$ が成り立つ．また，$|L(G)|$ が偶数の際には $\mathrm{pc}(G) = \lceil |L(G)|/2 \rceil$ か判定できることから示される． □

定理 4. 頂点数が n であるカクタス G に対して $\mathrm{pc}(G)$ を $O(n^2)$ 時間で求めることができる．

略証. カクタス G に対し $\mathrm{pc}(G) = \mathrm{pc}(G')$ であるユニサイクル G' を得ることができることと定理 3 から示される． □

最後に，しきい値グラフに対し以下の定理 5 を示した．証明は省略する．

定理 5. 頂点数が n，辺数が m であるしきい値グラフ G に対して $\mathrm{pc}(G)$ を $O(n+m)$ 時間で求めることができる．

3. まとめ

本論文では最小パスカバー問題に対し入力グラフの構造という観点から計算複雑性の解析を行った．今後の課題としては，木幅定数グラフに対するより高速なアルゴリズムの構築や，まだ計算複雑性が判明していないグラフクラスに対する解析などが挙げられる．

文献

1) G. Andreatta and F. Mason. Path covering problems and testing of printed circuits. *Discrete Applied Mathematics*, 62(1):5–13, 1995.
2) S. R. Arikati and C. P. Rangan. Linear algorithm for optimal path cover problem on interval graphs. *Information Processing Letters*, 35(3):149–153, 1990.
3) E. M. Arkin, R. Hassin, and A. Levin. Approximations for minimum and min-max vehicle routing problems. *Journal of Algorithms*, 59(1):1–18, 2006.
4) C. K. Constantinou and G. Ellinas. Minimal path decomposition of complete bipartite graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 35(3):684–702, 2018.
5) M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
6) M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. E. Tarjan. The planar hamiltonian circuit problem is NP-complete. *SIAM Journal on Computing*, 5(4):704–714, 1976.
7) S. Moran and Y. Wolfstahl. Optimal covering of cacti by vertex-disjoint paths. *Theoretical Computer Science*, 84(2):179–197, 1991.
8) H. Müller. Hamiltonian circuits in chordal bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 156(1):291–298, 1996.
9) L. Pyber. Covering the edges of a connected graph by paths. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 66(1):152–159, 1996.
10) W. Yu and Z. Liu. Better approximability results for min-max tree/cycle/path cover problems. *Journal of Combinatorial Optimization*, 37(2):563–578, 2019.