令和5年度

修士論文

超幾何函数とその接続公式の研究

東北大学大学院情報科学研究科

情報基礎科学専攻

酒井　裕司

指導教員　須川　敏幸 教授

謝辞

この論文を完成させるにあたり，懇切丁寧に指導してくださった指導教員である須川敏幸教授に深く感謝申し上げます．またこの論文の作成に助言してくださった瀬野裕美教授，船野敬准教授はじめ東北大学大学院情報科学研究科数学教室の先生の皆様，並びに事務員の皆様に感謝申し上げます．この論文の執筆にあたり家族や友人そして同期や後輩の皆様方には温かい支援と励ましをくださりありがとうございました．最後に，この論文を読んでくださる皆様，そして私に関わってくださった皆様に改めて心より感謝申し上げます．皆様のおかげで人生で初めての修士論文をこのようなかたちで完成させることができました．ありがとうございました．

1 序文

インドの異色の数学者である Ramanujan（Srinivasa Aiyangar Ramanujan1887-1920）は，超幾何級数をしきりに研究していた．超幾何級数 ${}_pF_q$ というものは次で定義される．

$$ {}_pF_q\left[\frac{a_1, a_2, \cdots, a_p}{b_1, b_2, \cdots, b_q}, z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n}\cdot\frac{z^n}{n!} $$

ただし $a_1, a_2, \cdots, a_p, b_1, b_2, \cdots, b_q \in \mathbb{C}$, $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$．この級数は $p \leq q$ ならすべての z について収束し，$p > q+1$ では，a_i $(i = 1, 2, \cdots)$ が 0 または負の整数の場合以外発散，$p = q+1$ のとき $|z| < 1$ で収束し，$z = 1$ のときは，$\mathrm{Re}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{q+1}) < \mathrm{Re}(b_1 + b_2 + \cdots + b_q)$ の場合に収束する．
Ramanujan は，$p = q+1$ の場合をインド時代に好んで研究し，彼の研究の中心となった公式は以下のようなものであった．

$$ {}_7F_6\left[\begin{matrix} n, (1/2)n+1, -x, -y, -z, -u, x+y+z+u+2n+1 \\ n/2, x+n+1, y+n+1, z+n+1, u+n+1, -x-y-z-u-n \end{matrix}, 1\right] $$

$$ = \frac{\Gamma(x+n+1)\Gamma(y+n+1)\Gamma(z+n+1)\Gamma(u+n+1)\Gamma(x+y+z+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(x+y+n+1)\Gamma(y+z+n+1)\Gamma(x+u+n+1)\Gamma(z+u+n+1)} $$

$$ \times \frac{\Gamma(y+z+u+n+1)\Gamma(x+z+u+n+1)\Gamma(x+y+u+n+1)}{\Gamma(x+z+n+1)\Gamma(y+u+n+1)\Gamma(x+y+z+u+n+1)} $$

これは超幾何級数に関する Gauss の公式など，それまでに知られていた多くの公式を特殊ケースとして含む式である．$x, y, z, u, -x-y-z-u-2n-1$ のどれかが正の整数であるとき，上記の ${}_7F_6$ は有限和である．本論文でも超幾何級数や超幾何函数が主役となる．ここで，少し超幾何級数や超幾何函数について触れていこうと思う．
超幾何微分方程式とは，別名 Gauss（C. F. Gauss, 1777-1855）の微分方程式とも呼ばれ具体的に以下の形で表されたものである．

$$ z(1-z)w'' + (c-(a+b+1)z)w' - abw = 0 $$

そしてその一般解は以下のように Riemann の P 関数というもので表される．

$$ \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 1-c & c-a-b & b & \end{matrix}\right\} $$

ここで第 1 行は特異点を表し，第 2 行と第 3 行にはそれぞれの特異点における特性根を表す．右端の文字は独立変数である．一般論によれば超幾何微分方程式は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の 3 点 $\{0, 1, \infty\}$ に確定特異点をもつので，各特異点の近傍で収束する解空間の基底，即ち基本解を構成することができる．超幾何微分方程式は 2 階線形の微分方程式なので解空間は 2 次元のベクトル空間をなす．したがって各特異点近傍における基本解は 2 つずつ存在する．[確定特異点，収束域]，基本解の順でそれぞれ記述すると以下のように書

ける.

$$[z=0,B_0]:\begin{cases} w_1^0(z)=F(a,b,c,z) \\ w_2^0(z)=z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c,z) \end{cases}$$
$$[z=1,B_1]:\begin{cases} w_1^1(z)=F(a,b,a+b-c+1,1-z) \\ w_2^1(z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1,1-z) \end{cases}$$
$$[z=\infty,B_\infty]:\begin{cases} w_1^\infty(z)=z^{-a}F\Big(a,a-c+1,a-b+1,\dfrac{1}{z}\Big) \\ w_2^\infty(z)=z^{-b}F\Big(b,b-c+1,b-a+1,\dfrac{1}{z}\Big) \end{cases}$$

ただし収束域は以下である.

$$B_0:=\{z\in\mathbb{C}||z|<1\},\ B_1:=\{z\in\mathbb{C}||1-z|<1\},\ B_\infty:=\{z\in\mathbb{C}|1<|z|\}$$

$w_1^0(z)$ の右辺は超幾何級数であり $c\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$ であるとき $|z|<1$ において正則な超幾何微分方程式の解である.またこれらの基本解も特異点を通らない道に沿って解析接続が可能である事が知られている.微分方程式の解は解析接続しても解であり,基本解を解析接続して得られる関数はまた基本解の線形結合で表すことができる.つまり超幾何微分方程式の基本解の間には以下の関係式で記述される接続公式が成り立つ.

$$(w_1^0(z),w_2^0(z))=(w_1^1(z),w_2^1(z))C_{10}=(w_1^\infty(z),w_2^\infty(z))C_{\infty 0}$$

ただし C_{10}, $C_{\infty 0}$ は接続行列といい 2×2 の行列で以下のように表せる.

$$C_{10}:=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} & \dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \\ \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} & \dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)} \end{pmatrix}$$
$$C_{\infty 0}:=\begin{pmatrix} \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}e^{-\pi ia} & \dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(1-a)}e^{-\pi i(a-c+1)} \\ \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}e^{-\pi ib} & \dfrac{\Gamma(2-c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-b)}e^{-\pi i(b-c+1)} \end{pmatrix}$$

行列を用いた上記の式は,例えば以下のように具体的に記述できる.

$$\begin{aligned} F(a,b,c,z)&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\Big(a,a-c+1,a-b+1,\frac{1}{z}\Big) \\ &\quad+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\Big(b,b-c+1,b-a+1,\frac{1}{z}\Big) \end{aligned}$$
$$(\text{ただし } c\notin\mathbb{Z}_{\leq 0},\ a-b\notin\mathbb{Z},\ |\arg(-z)|<\pi)$$

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,a+b-c+1,1-z)$$
$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1,1-z)$$
$$(\text{ただし } c\notin\mathbb{Z}_{\leq 0},\ c-a-b\notin\mathbb{Z},\ |\arg(1-z)|<\pi)$$

$$z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c,z)=\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b-c+1)\Gamma(1-a)}e^{\pi i(c-1)}(-z)^{-a}F\Big(a-c+1,a,a-b+1,\frac{1}{z}\Big)$$
$$+\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-b)}e^{\pi i(c-1)}(-z)^{-b}F\Big(b-c+1,b,b-a+1,\frac{1}{z}\Big)$$
$$(\text{ただし } c\neq 2,3,\cdots,\ a-b\notin\mathbb{Z},\ |\arg(-z)|<\pi)$$

$$z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c,z)=\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)}F(a,b,a+b-c+1,1-z)$$
$$+\frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b-c+1)}(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1,1-z)$$
$$(\text{ただし } c\neq 2,3,\cdots,\ a+b-c\notin\mathbb{Z},\ |\arg(1-z)|<\pi)$$

上記の接続公式で 1 番目と 2 番目の式は 1, ∞ を除く z 平面全体へ正則関数として解析接続されたものであり，これを超幾何函数といい同じ記号である $F(a,b,c,z)$ で表す．特に最初にある以下の公式は，本論文で考察する原点近傍から $z=\infty$ 近傍における解析接続により導出される特性指数差が非整数条件下のもとでの generic な接続公式である．

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\Big(a,a-c+1,a-b+1,\frac{1}{z}\Big)$$
$$+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\Big(b,b-c+1,b-a+1,\frac{1}{z}\Big)$$
$$(\text{ただし } c\notin\mathbb{Z}_{\leq 0},\ a-b\notin\mathbb{Z},\ |\arg(-z)|<\pi)$$

本論文の主定理では，この仮定を整数条件とし，対数項やディガンマ関数が出現するより長く複雑な接続公式を考察した．具体的には Mellin-Barnes 積分とよばれる積分表示を与え，それの留数計算を行うことにより $b-a=m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の仮定のもとで超幾何級数 $F(a,a+m,c,z)$ が具体的に $z=\infty$ の近傍における基本解の線形結合で表された以下の接続公式について研究を行った．

$$F(a,a+m,c,z)=\frac{\Gamma(c)(-z)^{-a}}{\Gamma(a+m)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a)_n(m-n-1)!}{n!\Gamma(c-a-n)}z^{-n}+\frac{\Gamma(c)(-z)^{-a}}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+m)_n(-1)^n}{n!(n+m)!\Gamma(c-a-n-m)}z^{-n-m}$$
$$\times\Big\{\log(-z)+\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-\psi(a+n+m)-\psi(c-a-n-m)\Big\}$$

目次

2　記号と表記

本論文では，以下の記号や表記を用いることにする．

表 1　記号と表記

記号・表記	意味
$\mathbb{N}$	自然数全体からなる集合
$\mathbb{Z}$	整数全体からなる集合
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	0 と正の整数全体からなる集合
$\mathbb{Z}_{\leq 0}$	0 と負の整数全体からなる集合
$\mathbb{R}$	実数全体からなる集合
$\mathbb{C}$	複素数全体からなる集合
$\hat{\mathbb{C}}$	無限遠点を含む複素数全体からなる集合
$\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_{\leq 0}$	複素数全体からなる集合から，0 と負の整数全体からなる集合を除いた集合
$\mathrm{Re}(z)$	複素数 z の実部
$\mathrm{Im}(z)$	複素数 z の虚部
$\max\{a, b\}$	数 a, b の最大値
$\mathrm{Res}[f, n]$	関数 $f(s)$ に対する複素数 $s = n$ におけるの留数
$[\mathrm{Res} f(s)]_{(\nu,\mu)}$	$f(s)$ の $\nu < \mathrm{Res} < \mu$ の間にある極における留数の和
$\psi(z)$	ディガンマ関数：ガンマ関数 $\Gamma(z)$ に対して，その対数微分をとったもの

3　準備

準備として以下を載せる．

3.1　Cauchy-Goursat の積分定理

関数論の基本定理と呼ばれる Cauchy の積分定理について説明する．$x-y$ 平面の区分的になめらかな Jordan 曲線（単一閉曲線）C で囲まれた閉集合 R において，実関数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ は，その 1 階偏導関数とともに連続であるとする．曲線 C の向きは正方向であるとする．このとき，線積分に対する Green の定理が以下のように成り立つ．

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_R (Q_x-P_y)dxdy$$

今，R で正則な関数 $f(z)$ を

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

とおく．C に沿った $f(z)$ の積分は

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C udy+vdx$$

と書け，したがって，もし $f'(z)$ が連続ならば，u と v の 1 階偏導関数は連続となり，Green の定理が適用できて

$$\int_C f(z)dz=\iint_R (-v_x-u_y)dxdy+i\iint_R (u_x-v_y)dxdy$$

となる．ところが，$f(z)$ は正則であるから Caushy-Riemann の関係式が成り立ち，積分値は 0 となってしまう．

この顕著な結論は，Goursat によって，仮定 “$f'(z)$ が連続” がなくても同じ結論が成り立つことが証明された．すなわち，以下の定理が成り立つ．

定理 3.1. 区分的になめらかな Jordan 曲線 C の上と内部で正則な関数 $f(z)$ に対して，以下が成り立つ．

$$\int_C f(z)dz=0$$

(参照:[6] P19～P20)

この定理において，$f'(z)$ の連続性の仮定を取り除いた点が重要である．

領域 D があって，D 内にいかなる Jordan 曲線 C を描いても，C の内部が D の点ばかりからなるとき，D は単連結であるという．また，単連結でない領域は多重連結であるという．上記定理は，次のように述べることもできる．

定理 3.2. $f(z)$ は単連結な領域で正則であるとする．D 内の区分的になめらかな任意の Jordan 曲線 C に対して，以下が成り立つ．

$$\int_C f(z)dz=0$$

(参照:[6] P20)

これは，C が Jordan 曲線でなく，自分自身と交わっていても正しい．

Cauchy-Goursat の積分定理を多重連結な場合に拡張し一般化すると，以下の定理を考えることができる．

定理 3.3. C 及び $C_j(j=1,2,\cdots,m)$ は区分的になめらかな Jordan 曲線で，C_j はすべて C の内部にありかつ互いに外にあるものとする．今 C の内部にあって，かつすべての $C_1, C_2, \cdots, C_m$ の外にある点ばかりからなる領域を D とする．$f(z)$ が D の閉包 $\overline{D}$ を含む領域で正則ならば以下が成り立つ．

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{C_j} f(z)dz$$

ただし $C_1, C_2, \cdots, C_m$ はすべて正の向きをとるものとする．(参照:[6] P22〜P23)

これらを認めて，以下に続く定理を述べていく．

3.2 Cauchy の積分公式

定理 3.4. C を正の向きをもった区分的になめらかな曲線とし $f(z)$ は C の上と内部で正則とする．z が C の内部の任意の点であるとき以下の式が成り立つ．(参照:[6] P23〜P24)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{1}$$

証明. 公式 (1) を z の代わりに a，ζ の代わりに z とおいて証明する．まず，a を C の内部の点とし，a を中心として a と C との距離よりも小さい正数 r を半径とする円 $K_r : |z-a| = r$ を描く．関数 $\frac{f(z)}{z-a}$ は，$z = a$ を除いて，C の上と内部で正則であるから定理 3.3 を適用して

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz &= \int_{K_r} \frac{f(z)}{z-a}dz \\
&= \int_{K_r} \frac{f(a)}{z-a}dz + \int_{K_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz \\
&= 2\pi i f(a) + \int_{K_r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz
\end{aligned}$$

ところが，$f(z)$ は $z = a$ で正則，したがって連続である．よって任意の正数 ε に対して δ を十分小さくとれば

$$|z-a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(z) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つようにできる．そこで，$r < \delta$ ととれば

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{z-a}dz - 2\pi i f(a) \right| \le \int_{K_r} \left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right| |dz| \le \frac{2\pi r \cdot \varepsilon}{r} = 2\pi\varepsilon$$

ε は任意の正数であるから

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$$

■

3.3 Cauchy の微積分公式

正則関数の積分表示 (1) を用いて，$f'(z), f''(z), \cdots$ が存在し，正則であることを示すことができる．

定理 3.5. $f(z)$ は区分的になめらかな Jordan 曲線 C の上と内部において正則であるとする．このとき $f(z)$ は C の内部において無限回微分可能で以下が成り立つ．（参照:[6] P24〜P25）

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

証明. $n = 0$ の場合は，(1) である．$n = 1$ の場合を証明する．
(1) から

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - \Delta z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right)\frac{1}{\Delta z}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}d\zeta\end{aligned}$$

z は C の内部の点であるから，z と C の距離を d とすると $d > 0$．$|\Delta z| < d$ であるように小さくとり，$\Delta z \to 0$ とすることにより

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$$

となることがわかればよい．それには

$$I := \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)}d\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)\cdot\Delta z}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}d\zeta$$

とおいて，$\lim_{\Delta z \to 0}|I| = 0$ を示せばよい．
$|\zeta - z| \geq d, |\zeta - z - \Delta z| \geq d - |\Delta z|$ であることに注意し，C の長さを $\hat{L}$，C 上における $|f(z)|$ の最大値を $\hat{M}$ とすると

$$|I| = \left|\Delta z\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2}d\zeta\right| \leq |\Delta z|\frac{\hat{M}\hat{L}}{(d - |\Delta z|)d^2}$$

となり，(2) の $n = 1$ の場合が示された．$n \geq 2$ の場合も同様に示せる． ■

3.4 関数項級数

関数項級数について述べる．領域 D において関数列

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z)\cdots, f_n(z), \cdots$$

が定義されているとする．第 N 部分和

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z)$$

が $z = a \in D$ において極限値

$$\lim_{N\to\infty} S_N(a) = S$$

をもつとき，すなわち，任意の正数 ε に対し N_0 が存在して

$$\left|S - \sum_{n=1}^{N} f_n(a)\right| < \varepsilon \quad (N \geq N_0)$$

をみたすとき，級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は $z=a$ において収束し，和 S をもつという．
D の各点で収束するとき $\sum f_n(z)$ は D で収束するという．ここで ε に対し N_0 は一般に z に依存する (各点収束)．もし N_0 が D 内の全ての点で共通にとれるとき $\sum f_n(z)$ は一様収束するという．また D において

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$$

が収束するとき，絶対収束するという．更に D に含まれる全ての有界閉集合上で一様収束するとき，広義一様収束するという．

3.5 Weierstrass の定理

定理 3.6. 領域 D において正則な関数列 $f_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ が D において広義一様収束する．すなわち D に含まれる任意の有界閉集合の上で一様収束するならば，その極限関数 $f(z)$ は D において正則である．更に n 次の導関数 $f_\nu^{(n)}(z)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は D において $f^{(n)}(z)$ に広義一様収束する．（参照：[6] P28〜P29）

証明. a を D の任意の 1 点とし，a を中心，半径 d の円，$|z-a| = d$ を K とする．K とその内部は D に含まれるとすると，正則関数の積分表示 (1) から $|z-a| < d$ において

$$f_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f_\nu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

今，z を固定すると，$\frac{f_\nu(\zeta)}{\zeta - z}$ は K の上で一様収束するから

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

すなわち，極限関数 $f(z)$ は $|z-a| < d$ において積分表示 (1) をもち，したがって正則である．a が D の任意の点であることから，$f(z)$ は D で正則となる．
次に公式 (2) を用いて

$$f_\nu{}^{(n)}(z) - f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_K \frac{f_\nu(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

今，任意の ε に対して，N が存在して，$\nu \geq N$ になるかぎり

$$|f_\nu(z) - f(z)| < \varepsilon$$

が成り立つようにできる．$|z-a| < \frac{d}{2}$ とすると，$|\zeta - z| \geq \frac{d}{2}$ であるから

$$|f_\nu{}^{(n)}(z) - f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! 2^{n+1} 2\pi d}{2\pi d^{n+1}}\varepsilon = \frac{n! 2^{n+1}}{d^n}\varepsilon$$

よって，$f_\nu{}^{(n)}(z)$ は $\nu \to \infty$ のとき $|z-a| < \frac{d}{2}$ において $f^{(n)}(z)$ に一様収束する．こうして $f_\nu{}^{(n)}(z)$ は D の各点の近傍で $f^{(n)}(z)$ に一様収束すること，いいかえれば，$f_\nu{}^{(n)}(z)$ は D において広義一様収束することがわかる． ■

3.6 一致の定理

領域 D において，正則な関数 $f(z)$ と $g(z)$ が恒等的に一致するための条件を考えてみる．これは $\varphi(z) = f(z) - g(z)$ とおいてみれば，D において正則な関数がいかなる条件のもとで恒等的に 0 に等しくなるかということである．

まず，(1)，(2) から以下の Taylor の定理が得られる．

定理 3.7. C を区分的になめらかな Jordan 曲線とし，$f(z)$ は C の上と内部で正則であるとする．C の内部を D，D の任意の点を a，a と C の距離を d とすると，$f(z)$ は $|z-a|<d$ をみたす z に対して，$z-a$ のベキ級数に一意的に展開される．すなわち

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (|z-a|<d)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

上記の Taylor の定理を認めて，次の定理を考えてみる．

定理 3.8. $\varphi(z)$ は領域 D において正則，a を D の 1 点とし，a に収束する D 内の点列 $z_\nu \neq a\ (\nu = 1, 2, \cdots)$ の上で $\varphi(z_\nu) = 0\ (\nu = 1, 2, \cdots)$ ならば，$\varphi(z)$ は D において恒等的に 0 に等しい．

証明. 上記の Taylor の定理によれば，a を中心として D 内に含まれる最大の開円板 $|z-a|<d$ において，$\varphi(z)$ は Taylor 展開される．

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad (|z-a|<d)$$

一方，点列 $z_\nu\ (\nu = 1, 2, \cdots)$ は，適当に自然数 N をとり $\nu \geq N$ ならば，z_ν は円板 $|z-a|<d$ の内部に含まれるようにできる．ところが

$$c_0 = \varphi(a) = \lim_{\nu\to\infty}\varphi(z_\nu) = 0$$

今，$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ に対して，$c_k = 0$ とすると

$$c_n = \lim_{z\to a}\frac{c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots}{(z-a)^n} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\varphi(z_\nu)}{(z_\nu - a)^n} = 0$$

となるから，数学的帰納法より，すべての n に対して $c_n = 0$．したがって，$\varphi(z)$ は $|z-a|<d$ において恒等的に 0 に等しいことがわかる．次に，b を D の任意の点とし，a と b を D 内のなめらかな曲線 C で結ぶ．ρ を C と D の境界との距離よりも小さい正数とし，C 上の点 a_i を中心，半径 ρ の円板 $K(a_i) : |z-a_i| < \rho\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ をつくる．$K(a_i)$ は D の点ばかりからなっている．$K(a)$ において $\varphi(z) \equiv 0$ である．次に，C 上を a から出発して最初に $K(a)$ の周囲と交わる点を a_1 とする．$K(a_1)$ において $\varphi(z)$ は正則かつ $K(a)$ と $K(a_1)$ の共通部分 Δ において $\varphi(z) \equiv 0$．しかも，a_1 は Δ の集積点であるから，$\varphi(z)$ は $K(a_1)$ において 0 である．更に，a_1 から C に沿って b に向かうとき，$K(a_1)$ の周囲と交わる点を a_2 とすると，$K(a_2)$ において，$\varphi(z) \equiv 0$．これを有限回繰り返して結局，b を含む円板 $K(a_n)$ において，$\varphi(z) \equiv 0$ となる． ■

上記定理は，一致の定理として次のように表すこともできる．

定理 3.9. 領域 D において 2 つの正則関数 $f(z)$ と $g(z)$ が D の内部に集積点を少なくとも 1 つもつような D 内の点集合の上で同じ値をとるならば，$f(z)$ と $g(z)$ は D 全体で一致する．(一致の定理)

3.7 解析接続

与えられた正則関数 $f(z)$ に対し，その定義域が拡張できる場合は，拡張することにより見えなかった関数の性質が明らかになることがある．以下に定義する解析接続は，その正則関数の定義域の拡張を意味する．

定義 3.10. 領域 Ω_1, Ω_2 は，$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ を満たすとする．Ω_1 上の正則関数 $f(z)$ と Ω_2 上の正則関数 $g(z)$ に対し $f(z) = g(z)$ $(z \in \Omega_1)$ が成り立つ時，$g(z)$ を Ω_1 から Ω_2 への $f(z)$ の解析接続という．

一致の定理より，与えられた $f(z)$ に対して $g(z)$ は一意的に定まる．その $g(z)$ が定義されることを，$f(z)$ は Ω_2 まで解析接続されるなどという．

3.8 Mellin-Barnes 積分の定理で使用される補題

補題 3.11. 2 つの変数 z, w の関数 $f(z, w)$ は z が領域 D，w が区分的になめらかな曲線 C 上を動くとき連続，かつ w を C 上の点としたとき $f(z, w)$ は z の関数として D で正則であるとする．このとき

$$F(z) = \int_C f(z, w)dw$$

は D において正則であってかつ以下が成り立つ．

$$\frac{dF(z)}{dz} = \int_C \frac{\partial f(z, w)}{\partial z} dw$$

証明. K を D 内の Jordan 曲線で，K の内部は D の点ばかりからなるとする．また，K は正の向きにとるものとすると，Cauchy の積分公式 (1) から K 内の z に対し

$$f(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta, w)}{\zeta - z} d\zeta$$

と書くことができる．これを $F(z)$ の式に代入して

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dw \int_K \frac{f(\zeta, w)}{\zeta - z} d\zeta$$

積分順序は交換できるので

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{d\zeta}{\zeta - z} \int_C f(\zeta, w)dw = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

すなわち，$F(z)$ は Cauchy の積分公式をみたし，したがって K の内部で正則である．更に Cauchy の微積分公式 (2) を用いて

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} \int_C f(\zeta, w)dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C dw \int_K \frac{f(\zeta, w)}{(\zeta - z)^2} dz$$

$$= \int_C \frac{\partial f(z, w)}{\partial z} dw$$

が成り立つ． ■

補題 3.12. C は無限遠点に伸びる曲線であってその任意の有界な部分は区分的になめらかであるとする．更に C の有限な部分に対しては上記の補題 3.11 の仮定はみたされ，かつ無限積分

$$F(z) = \int_C f(z,w)dw$$

は D に含まれる任意の有界閉領域において一様収束 (広義一様収束) するものとする．このとき $F(z)$ は上記の補題 3.11 と同じ結果をみたす．(参照:[6] P166〜P167)

証明. 閉円板 $|w| \leq n$ に含まれる C の部分を C_n とし

$$F_n(z) = \int_{C_n} f(z,w)dw \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，上記の補題 3.11 から $F_n(z)$ は D で正則．また，仮定から $F_n(z)$ は D において広義一様収束するから，Weierstrass の定理より，極限関数 $F(z)$ は D において正則で，更に以下が成り立つ．

$$F'(z) = \lim_{n\to\infty} F_n'(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{\partial f(z,w)}{\partial z} dw = \int_C \frac{\partial f(z,w)}{\partial z} dw$$

■

3.9 Stirling の公式

補題 3.13. δ を任意の小さい正数，R を十分大きい任意の正数とする．このとき $|z| \geq R$, $|\arg z| \leq \pi - \delta$ をみたす任意の z に対して

$$\left|\frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}} - 1\right| \leq K|z|^{-1}$$

となる正数 K が存在する．このことを以下のように書き $\Gamma(z)$ の $z \to \infty$ のときの漸近展開を表す Stirling の公式という．

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \qquad (z \to \infty, |\arg z| < \pi) \tag{3}$$

(参照:[6] P173)

注意 3.14. ここで $f(z) \sim g(z)$ とは $\frac{f(z)}{g(z)} \longrightarrow 1 (z \to \infty)$ を意味する．
上記の Stirling の公式を認めて，後に述べる主定理を示していく．

3.10 確定特異点と不確定特異点

定義 3.15. 今，以下の微分方程式が与えられているとする．ただし $p(z), q(z)$ はある複素領域上 S 有限個の点を除いて 1 価正則な関数とする．

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0$$

$p(z), q(z)$ が共に正則な S 上の点を上記方程式の通常点といい，そうでない点を特異点という．また $z = z_1$ を特異点とするとき，関数 $p(z), q(z)$ は $z = z_1$ のまわりで以下のようにベキ級数展開されるとする．

$$p(z) = \frac{1}{z - z_1} \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z - z_1)^n = \frac{1}{z - z_1}(p_0 + p_1(z - z_1) + p_2(z - z_1)^2 + \cdots)$$

$$q(z) = \frac{1}{(z - z_1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z - z_1)^n = \frac{1}{(z - z_1)^2}(q_0 + q_1(z - z_1) + q_2(z - z_1)^2 + \cdots)$$

今 $z=z_1$ が $p(z)$ の高々 1 位の極，かつ $q(z)$ の高々 2 位の極であるとき，上記の微分方程式は Fuchs 型微分方程式といい $z=z_1$ を確定特異点という．このかたちにならない特異点を不確定特異点という．

4 超幾何微分方程式

超幾何微分方程式とは, 以下のかたちをした微分方程式をさす.

$$z(1-z)w''+(c-(a+b+1)z)w'-abw=0 \tag{4}$$

（ここで a,b,c は複素定数）

この微分方程式は 2 階線形常微分方程式でかつ係数が有理数である Fuchs 型の微分方程式である．超幾何微分方程式は $z=0,1,\infty$ において確定特異点をもつ.

4.1 超幾何級数

定義 4.1. 超幾何級数は以下で定義される．この超幾何級数は (4) において $w=F(a,b,c,z)$ としたときの解であり，収束半径は 1 で $|z|<1$ で正則である.

$$F(a,b,c,z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}z^n \tag{5}$$

(ただし a,b,c は複素定数，$z\in\mathbb{C}$ である)

定義 4.2. なお $(a)_n$ をポッホハマー記号といい以下で定義する.

$$(a)_n:=\begin{cases}1 & (n=0)\\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & (n\geq 1)\end{cases}$$

(ただし $n\in\mathbb{N}$ である)

4.2 超幾何微分方程式における基本解系

超幾何微分方程式は，各特異点において線形独立な 2 つの基本解をもつ．以下は各特異点での特性指数差が非整数条件下の場合のものとする.

定理 4.3. 超幾何微分方程式は c が整数ではない時 $|z|<1$ において線形独立な 2 つの解をもつ.

$$\begin{cases}w_1^0(z)=F(a,b,c,z)\\ w_2^0(z)=z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c,z)\end{cases}$$

ここで $F(a,b,c,z)$ は (5) で定義されたベキ級数である.

定理 4.4. 超幾何微分方程式は $a+b-c$ が整数ではない時 $|z-1|<1$ において線形独立な 2 つの解をもつ.

$$\begin{cases}w_1^1(z)=F(a,b,a+b-c+1,1-z)\\ w_2^1(z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c-a-b+1,1-z)\end{cases}$$

定理 4.5. 超幾何微分方程式は $b-a$ が整数ではない時 $|z|>1$ において線形独立な 2 つの解をもつ.

$$\begin{cases} w_1^{\infty}(z) = z^{-a}F\Big(a, a-c+1, a-b+1, \dfrac{1}{z}\Big) \\ w_2^{\infty}(z) = z^{-b}F\Big(b, b-c+1, b-a+1, \dfrac{1}{z}\Big) \end{cases}$$

4.3 Euler 型積分表示

命題 4.6. $|z|<1$ とするとき以下が成り立つ.

$$F(a,b,c,z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}dt \tag{6}$$

ただし右辺の積分の収束のために, 以下を仮定する.

$$\mathrm{Re}(a) > 0, \mathrm{Re}(c-a) > 0$$

また積分の中に現れるベキ関数の分枝は, 以下により定める.

$$\arg t = 0, \arg(1-t) = 0, |\arg(1-zt)| < \frac{\pi}{2}$$

証明. 付録の公式集にある公式 (38), (40), (41) を用いて

$$\begin{aligned}
F(a,b,c,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)(b)_n}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)n!} z^n \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(c-a)} \cdot \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+n)} \cdot \frac{(b)_n}{n!} z^n \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} B(a+n, c-a) \cdot \frac{(b)_n}{n!} z^n \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^{a+n-1}(1-t)^{c-a-1}dt \cdot \frac{(b)_n}{n!} z^n \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} (zt)^n dt \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}dt
\end{aligned}$$

■

系 4.7. 超幾何級数の形からこれは a と b を入れ替えて考えると以下のようにもできる.

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt$$

4.4 Gauss の超幾何定理

定理 4.8. $a,b,c\in\mathbb{C}$ とする. $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$ ならば以下が成り立つ.

$$F(a,b,c,1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

証明. Euler 型積分表示より

$$\begin{aligned}F(a,b,c,1)&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-t)^{-a}dt\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\cdot\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)}\\&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\end{aligned}$$

■

4.5 変換公式

以下の定理も, Euler 型積分表示を適用することで示せる.

定理 4.9. Pfaff の変換公式
$a,b,c\in\mathbb{C}$ とする. $c\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$ ならば以下が成り立つ.

$$F(a,b,c,z)=(1-z)^{-a}F\Big(a,c-b,c,\frac{z}{z-1}\Big)=(1-z)^{-b}F\Big(b,c-a,c,\frac{z}{z-1}\Big)$$

証明. 最初の等号の部分を示す. 以降は a と b を入れ替えた操作をすればよい.

Euler 型積分表示を用いて $s=1-t$ と置換すれば

$$\begin{aligned}
F(a,b,c,z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt \\
&= -\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_1^0 (1-s)^{b-1}s^{c-b-1}(1-z(1-s))^{-a}ds \\
&= (1-z)^{-a}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1}\Big(1-\frac{z}{z-1}s\Big)^{-a}ds \\
&= (1-z)^{-a}F\Big(a,c-b,c,\frac{z}{z-1}\Big)
\end{aligned}$$

■

定理 4.10. Euler の変換公式

$a,b,c\in\mathbb{C}$ とする． $c\notin\mathbb{Z}_{\le 0}$ ならば以下が成り立つ．

$$F(a,b,c,z)=(1-z)^{c-a-b}F\Big(c-a,c-b,c,z\Big)$$

証明. Pfaff の変換公式を 2 回適用する．

$$\begin{aligned}
F(a,b,c,z) &= (1-z)^{-a}F\Big(c-b,a,c,\frac{z}{z-1}\Big) \\
&= (1-z)^{-a}\Big(1-\frac{z}{z-1}\Big)^{-(c-b)}F\Bigg(c-a,c-b,c,\frac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z}{z-1}-1}\Bigg) \\
&= (1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c,z)
\end{aligned}$$

■

5 接続公式

5.1 Mellin-Barnes 積分を用いた解析接続

定理 5.1. Mellin-Barnes 積分 $G_\omega(z)$ を以下の積分で定義する．

$$G_\omega(z):=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\omega}f(s)ds \tag{7}$$

ここで $f(s)$ は以下で定義された関数とする．

$$f(s):=g(s)\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s \tag{8}$$

$$g(s):=\frac{\Gamma(a+s)(\Gamma(b+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)} \tag{9}$$

ただし $a,b,c\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\le 0}$，$s\in\mathbb{C}$ を独立変数，$z\in\mathbb{C}$ を複素パラメータ，$\omega\in\mathbb{R}$ とする．
また積分路 L_ω は s 平面上において，(i)$f(s)$ の極を通らず，(ii)$|s|$ が十分大きいとき s 平面の虚軸に平行な直線 $\mathrm{Re}(s)=\omega$ に沿って $\pm\infty$ に伸びているものとする．このとき次が成り立つ．

(A) $G_\omega(z)$ は $|z|>0, |\arg(-z)|<\pi$ において 1 価正則である．

(B) $G_\omega(z)$ は $0<|z|<1$ では，積分路 L_ω の右側にある極における留数の和である．

(C) $G_\omega(z)$ は $|z|>1$ では，積分路 L_ω の左側にある極における留数の和に負の符号を付けたものである．

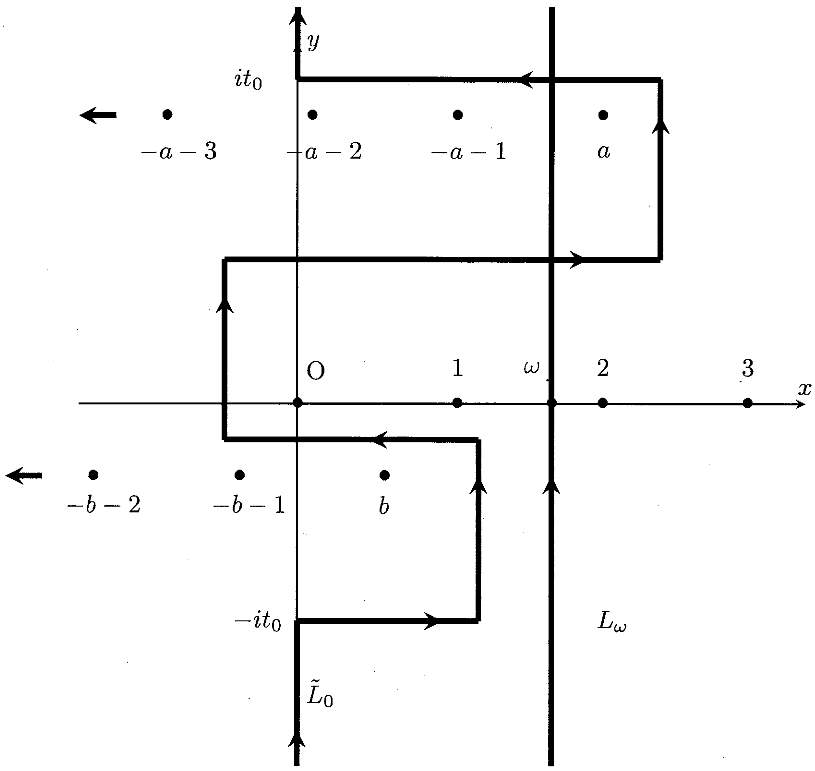

図 1　$f(s)$ の極と $L_\omega, \tilde{L}_0$

注意 5.2. 積分路 $\tilde{L}_0$ は，解析接続による接続公式を求める際に具体的に採用される経路の例である．これは後に述べる結果の際，適用する積分路の形なので参考としてここで描いた．
(参照:[6]P68〜P76)

5.1.1　定理 5.1 の (A) の証明

証明. まず $G_\omega(z)$ が $|z|>0, |\arg(-z)|<\pi$ において 1 価正則であることを証明する．
ガンマ関数に関する Stirling の公式 (3) を用いると

$$\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(s)s^a}\sim\frac{(a+s)^{a+s-\frac{1}{2}}e^{-(a+s)}}{s^{a+s-\frac{1}{2}}e^{-s}}=e^{-a}\left(1+\frac{a}{s}\right)^s\left(1+\frac{a}{s}\right)^{a-\frac{1}{2}}\sim 1$$

$$\therefore \frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(s)} \sim s^a \qquad (s \to \infty, |\arg s| < \pi)$$

$$\therefore g(s) = \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)} = \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(s)\Gamma(s)\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)} \sim s^{a+b-c-1}$$

すなわち，1 より大きい R と十分小さい任意の正数 δ に対し

$$|s| \geq R, \ |\arg s| \leq \pi - \delta \tag{10}$$

において s に無関係の正数 M が存在して

$$|g(s)| \leq M(1+|s|)^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|} \tag{11}$$

が成り立つ．（なお以下のいくつかの不等式において正数 M がしばしば出てくるが，これは一定の定数ではなく不特定な有限な正の値を表すものとする．）
次に $(-z)^s$ を評価する．
十分小さい任意の正数 δ に対し

$$|z| > 0, \ |\arg(-z)| \leq \pi - \delta \tag{12}$$

おいて $s = \sigma + it$ とおくと以下をみたす．

$$|(-z)^s| = |e^{(\sigma+it)\log(-z)}| = e^{\sigma \log|z| - t\arg(-z)} \leq |z|^\sigma e^{\pi - \delta|t|} \tag{13}$$

最後に $\frac{\pi}{\sin \pi s}$ は $s = \sigma + it$ とおくと $|t| \geq t_0 > 0$ において正数 M が存在し

$$\left|\frac{\pi}{\sin \pi s}\right| = \left|\frac{2\pi}{e^{\pi i(\sigma+it)} - e^{-\pi i(\sigma+it)}}\right| < \frac{2\pi}{e^{\pi|t|} - e^{-\pi|t|}} = \frac{2\pi e^{-\pi|t|}}{1 - e^{-2\pi|t|}} < Me^{-\pi|t|} \tag{14}$$

が成り立つ．
そこで積分路上の $s = \sigma + it$ において t_0 を十分大きくとり $|t| \geq t_0$ のとき (11)，(14) が共に成り立つようにする．(11)，(13)，(14) から $s = \sigma + it$ において $\sigma = \omega$ と固定したとき

$$T_1, T_2 > t_0 \quad \text{または} \quad T_1, T_2 < -t_0 \qquad (T_2 > T_1)$$

ならば

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega+iT_1}^{\omega+iT_2} g(s)\frac{\pi}{\sin \pi s}(-z)^s ds\right| < M|z|^\omega \int_{T_1}^{T_2} (1+|s|)^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|} e^{-\delta|t|} dt$$

をみたす．
$m \geq 0$ のとき $\int_{-\infty}^{\infty} t^m e^{-\delta|t|} dt$ は絶対収束することから，任意の正数 ε および任意の正数 $P > \rho$ に対し T_0 が存在して

$$T_1, T_2 > T_0 \quad \text{または} \quad T_1, T_2 < -T_0$$

ならば

$$\rho \leq |z| \leq P, |\arg(-z)| \leq \pi - \delta \tag{15}$$

において

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega+iT_1}^{\omega+iT_2} g(s)\frac{\pi}{\sin \pi s}(-z)^s ds\right| < \varepsilon \tag{16}$$

が成り立つ.
十分大きい正数 T に対し $L_\omega(T)$ を積分路 L_ω の $|t| \leq T$ をみたす部分とすると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\omega(T)} g(s)\frac{\pi}{\sin \pi s}(-z)^s ds$$

は $|z| > 0, |\arg(-z)| < \pi$ において 1 価正則であり $T \to \infty$ とすると (16) から (15) において一様収束する.
したがって補題 3.11 及び補題 3.12 から

$$G_\omega(z) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\omega(T)} g(s)\frac{\pi}{\sin \pi s}(-z)^s ds$$

は (12) において 1 価正則である.

■

5.1.2 定理 5.1 の (B) と (C) の証明

証明.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\mu} f(s)ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\nu} f(s)ds \qquad (\mu > \nu)$$

を考える.
簡単の為，積分路 L_μ および L_ν はそれぞれ虚軸に平行な直線 $\mathrm{Re}(s) = \mu$ および $\mathrm{Re}(s) = \nu$ とし $f(s)$ の極を通らないものとする.
このとき，任意の正数 ε に対して正数 $T(\varepsilon)$ が存在して $|T| > T(\varepsilon)$ ならば

$$0 < \rho \leq |z| \leq P,\ |\arg(-z)| \leq \pi - \delta$$

において一様に

$$\left|\int_{\nu+iT}^{\mu+iT} f(s)ds\right| < \varepsilon \qquad (s = \sigma + it, ds = d\sigma) \tag{17}$$

が成り立つことを示す. (11)，(13)，(14) から

$$\begin{aligned}&|s| \geq R\ \ (R > 1),\ |\arg s| \leq \pi - \delta\ \ (\delta > 0),\ |T| \geq t_0 \quad (t_0\text{は十分大})\\&|z| > 0,\ |\arg(-z)| \leq \pi - \delta\end{aligned}$$

ならば，s と z に無関係な M が存在して

$$\left|\int_{\nu+iT}^{\mu+iT} f(s)ds\right| < M\int_\nu^\mu (1+|s|)^{|\mathrm{Re}(a+b-c-1)|}|z|^\sigma e^{-\delta|T|}d\sigma$$

ここで t_0 を更に大きくとり $T \geq t_0$ のとき $s = \sigma + iT$ $(\nu \leq \sigma \leq \mu)$ が $|\arg s| \leq \pi - \delta$ をみたすようにできるから

$$\left|\int_{\nu+iT}^{\mu+iT} f(s)ds\right| < (\mu-\nu)M(1+|\mu|+|\nu|+|T|)^{|\mathrm{Re}(a+b-c-1)|}|z|^{\{\nu,\mu\}}e^{-\delta|T|}$$

ただし $|z|^{\{\nu,\mu\}} = |z|^\nu$ $(|z| < 1)$，$|z|^\mu$ $(|z| \geq 1)$ となる．右辺は $|T| \to \infty$ のとき 0 に収束するから (17) が示された.

T を max $\{|\mathrm{Im}(a)|,|\mathrm{Im}(b)|\}$ より大きいとし，s 平面上の長方形 Π を以下とする．

$$s = \sigma + it : \sigma = \mu,\ -T \leq t \leq T,$$
$$\nu \leq \sigma \leq \mu,\ t = T,$$
$$\sigma = \nu,\ -T \leq t \leq T,$$
$$\nu \leq \sigma \leq \mu,\ t = -T,$$

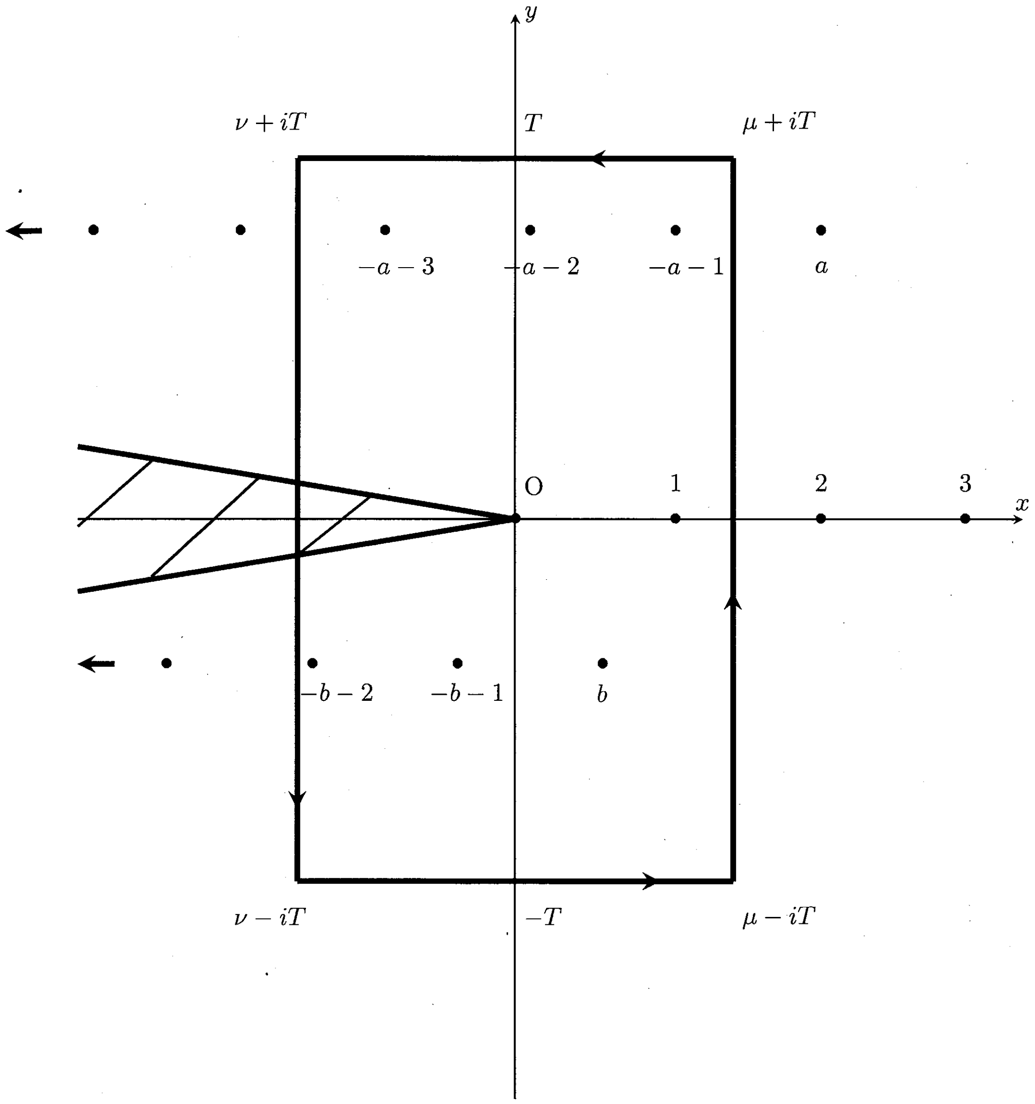

図 2　s 平面上のΠ

$\frac{f(s)}{2\pi i}$ を Π に沿って正の向きに積分すると

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mu-iT}^{\mu+iT} f(s)ds + \int_{\mu+iT}^{\nu+iT} f(s)ds + \int_{\nu+iT}^{\nu-iT} f(s)ds + \int_{\nu-iT}^{\mu-iT} f(s)ds\right\} = [\mathrm{Res}f(s)]_{(\nu,\mu)}$$

ここで $[\mathrm{Res}f(s)]_{(\nu,\mu)}$ は $f(s)$ の $\nu < \mathrm{Re}s < \mu$ の間にある極における留数の和を表すものとする．この値は

$T>$max $\{|\mathrm{Im(a)}|,|\mathrm{Im(b)}|\}$ である限り T には無関係の値である．
(17) から $|T|>T(\varepsilon)$ ならば

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mu-iT}^{\mu+iT} f(s)ds-\int_{\nu-iT}^{\nu+iT} f(s)ds\right\}-[\mathrm{Res}f(s)]_{(\nu,\mu)}\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\mu+iT}^{\nu+iT} f(s)ds+\int_{\nu-iT}^{\mu-iT} f(s)ds\right\}\right|<\frac{\varepsilon}{\pi}$$

したがって $T\to\infty$ として以下が得られる．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\mu} f(s)ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\nu} f(s)ds=[\mathrm{Res}f(s)]_{(\nu,\mu)} \tag{18}$$

ここで次の 2 式を仮定する．

$$0<|z|<1,\ |\arg(-z)|<\pi \quad\Rightarrow\quad \lim_{k\to\infty}\int_{L_k} f(s)ds=0 \tag{19}$$

$$|z|>1,\ |\arg(-z)|<\pi \quad\Rightarrow\quad \lim_{l\to\infty}\int_{L_{-l}} f(s)ds=0 \tag{20}$$

ただし，k と l は積分路 L_k 及び L_{-l} は $f(s)$ の極を通らないようにとるものとする．
例えば $n\in\mathbb{N}$ として

$$\begin{cases} k=\dfrac{1}{2}+n \\ l=-\lambda+n \quad (\lambda>0,\lambda+a,\lambda+b\notin\mathbb{Z}\quad \text{ととる}) \end{cases}$$

とおいて $n\to\infty$ とすればよい．(19)，(20) の証明はここで一旦認め後に証明するとし，先にここでの証明を完結させておく．

定理 5.1(B) の証明部分
$0<|z|<1,|\arg(-z)|<\pi$ のときは (18) において $\mu\to\infty$ とすることにより

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\nu} f(s)ds=[\mathrm{Res}f(s)]_{(\nu,\infty)}=\text{積分路 }L_\nu\text{の右側にある極における留数の和}$$

が得られる．

定理 5.1(C) の証明部分
$|z|>1,|\arg(-z)|<\pi$ のときは (18) において $\nu\to-\infty$ として

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\mu} f(s)ds=[\mathrm{Res}f(s)]_{(-\infty,\mu)}=\text{積分路 }L_\mu\text{の左側にある極における留数の和}$$

が得られ，証明は終了する．■

5.1.3 5.1.2 の (19) と (20) の証明

証明．まず (19) を示す．k を十分大きくとり (11) が成り立つようにとる．
また積分路 L_k を $|t|\le t_0$ をみたす部分と $|t|\ge t_0$ をみたす部分に分ける．(13)，(14) を用いて

$$\begin{aligned}\left|\int_{L_k} f(s)ds\right| &\le M\int_{L_k,|t|\ge t_0}(1+|s|)^{|\mathrm{Re}(a+b-c-1)|}|z|^k e^{(\pi-\delta)|t|}\left|\frac{\pi}{\sin\pi s}\right|dt \\ &\quad +M\int_{L_k,|t|\le t_0}(1+|s|)^{|\mathrm{Re}(a+b-c-1)|}|z|^k e^{(\pi-\delta)|t|}\left|\frac{\pi}{\sin\pi s}\right|dt\end{aligned}$$

ここで $|t| \geq t_0$ ならば (14) から $|\frac{\pi}{\sin \pi s}| \leq Me^{-\pi|t|}$.
また $|t| \leq t_0$ では $s = k + it = n + \frac{1}{2} + it$ であるから $|\frac{\pi}{\sin \pi s}| \leq 2\pi e^{-\pi|t|}$ をみたす.
したがって

$$\begin{aligned}\left|\int_{L_k} f(s)ds\right| &\leq M|z|^k \int_{-\infty}^{\infty} (1 + k + |t|)^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|} e^{-\delta|t|} dt \\ &< M|z|^k k^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|} e^{-\delta|t|} dt \\ &< M|z|^k k^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|}\end{aligned}$$

$|z| < 1$ ならば $|z|^k = e^{k \log |z|}, \log |z| < 0$ であるから

$$\lim_{k \to \infty} |z|^k k^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|} = 0$$

を得る. ■

証明. 次に (20) を示す.
$l \to \infty$ のとき積分路 L_{-l} は $|\arg s| \leq \pi - \delta$ をみたさない部分を通るので, 不等式 (11) を適用することはできない. そこで s の代わりに

$$s' = s + n, \ s = -l + it = \lambda - n + it \qquad (\lambda > 0)$$

とおくと $s' = \lambda + it$ で積分は

$$\int_{L_{-l}} f(s)ds = (-1)^n \int_{L_\lambda} g(s' - n) \frac{\pi}{\sin \pi s'} (-z)^{s'-n} ds'$$

となる. L_λ 上で被積分関数 $g(s'-n)\frac{\pi}{\sin \pi s'}(-z)^{s'-n}$ の各項を評価する.

$$\begin{aligned}g(s'-n) &= \frac{\Gamma(a+s'-n)\Gamma(b+s'-n)}{\Gamma(1+s'-n)\Gamma(c+s'-n)} \\ &= \frac{\Gamma(n-s')\Gamma(1-c+n-s')}{\Gamma(1-a+n-s')\Gamma(1-b+n-s')} \frac{\sin \pi(1+s') \sin \pi(c+s')}{\sin \pi(a+s') \sin \pi(b+s')}\end{aligned}$$

と変形する.
ここで Stirling の公式 (3) 及び $s' = \lambda + it$ で λ は $a + \lambda, b + \lambda \notin \mathbb{Z}$ となるようにとってあることを用いて $|n - s'|$ を十分大きくとり $|\arg(n - s')| \leq \pi - \delta$ ならば

$$|g(s'-n)| \leq Mn^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|} (1 + |t|)^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|}$$

となることが示される. また $t \geq t_0$ であるとき

$$\left|\frac{\pi}{\sin \pi s'}\right| \leq Me^{-\pi|t|}$$

最後に $|z| > 1, |\arg(-z)| \leq \pi - \delta$ であるとき

$$|(-z)^{s'-n}| \leq |z|^{\lambda-n} e^{(\pi-\delta)|t|}$$

したがって

$$\left|\int_{L_\lambda} g(s'-n) \frac{\pi}{\sin \pi s'} (-z)^{s'-n} ds'\right| < Mn^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|} |z|^{\lambda-n} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|)^{|\operatorname{Re}(a+b-c-1)|} e^{-\delta|t|} dt$$

が得られる.
右辺の積分の項は収束し $|z| > 1$ であるから $n \to \infty$ のとき右辺は 0 に収束する. よって示された. ■

5.2 非整数条件下での原点から無限遠点への解析接続による接続公式

Mellin-Barnes 積分を用いて，各特異点における基本解を用いてそれの線形結合で表された接続公式を導くことができる．以下は，特性指数差が非整数条件下のもとで，$z=0$ の近傍における 1 つの解である超幾何級数 $F(a,b,c,z)$ を解析接続することにより，$z=\infty$ における基本解の線形結合で表した接続公式を示したものである．

定理 5.3. $a,b,c\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\le 0}, |\arg(-z)|<\pi$ とする．
$b-a\notin\mathbb{Z}$ ならば

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c,z)\\&=(-z)^{-a}\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)}F\Big(a,1+a-c,1+a-b,\frac{1}{z}\Big)+(-z)^{-b}\frac{\Gamma(a-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c-b)}F\Big(b,1+b-c,1+b-a,\frac{1}{z}\Big)\end{aligned} \tag{21}$$

証明. 定理 5.1 にある (8)，(9) を考える．また，$(-z)^s$ を

$$|\arg(-z)|<\pi \quad (\text{正の実軸を除く})$$

において

$$(-z)^s=e^{s\log(-z)},\quad \log(-z)=\log|z|+i\arg(-z)$$

と定義すれば $f(s)$ は一意的に確定する．
まず超幾何級数 $F(a,b,c,z)$ の定義と付録のガンマ関数の性質 (38)，(39) より，(9) を用いて以下のように書ける．

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(c+n)}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}g(n)z^n \tag{22}$$

次に (8) で定義した $f(s)$ の極を考える．
付録のガンマ関数の相反公式 (42) から $f(s)$ は以下のように変形できる．

$$f(s)=\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)}\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s=-\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s$$

$\Gamma(z)$ は，$z\in\mathbb{Z}_{\le 0}$ で 1 位の極をもつことから $f(s)$ の極は 3 つの組 $\{n\}$，$\{-a-n\}$，$\{-b-n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_{\ge 0})$ で与えられる．これは仮定から 3 つの組の極は互いに異なっている．
よって，留数を計算する．

$s=n$ における留数 $\mathrm{Res}[f,n]$ の場合

$$\mathrm{Res}[f,n]=\lim_{s\to n}(s-n)f(s)=\lim_{s\to n}g(s)\frac{\pi(s-n)}{\sin\pi s}(-z)^s=(-1)^n g(n)(-z)^n=g(n)z^n$$

$s=-a-n$ における留数 $\mathrm{Res}[f,-a-n]$ の場合 $\cdots *$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f,-a-n] &= \lim_{s\to -a-n}(s+a+n)f(s) \\
&= \lim_{s\to -a-n}\frac{(s+a+n)\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)}\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s \\
&= \lim_{s\to -a-n}\frac{-(s+a+n)\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s \\
&= -(-1)^n\frac{\Gamma(b-a-n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(c-a-n)}(-z)^{-a-n} \\
&= -\frac{\Gamma(b-a-n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(c-a-n)}(-z)^{-a}z^{-n}
\end{aligned}$$

$s=-b-n$ における留数 $\mathrm{Res}[f,-b-n]$ の場合 $\cdots *$
上記の留数 $\mathrm{Res}[f,-a-n]$ と同様にして

$$\mathrm{Res}[f,-b-n] = -\frac{\Gamma(a-b-n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(c-b-n)}(-z)^{-b}z^{-n}$$

注意 5.4. $*$ なお $s=-a-n$ における留数 $\mathrm{Res}[f,-a-n]$ の場合と $s=-b-n$ における留数 $\mathrm{Res}[f,-b-n]$ の場合においての詳細な計算は，後に述べる付録の補題 8.6 に掲載する．

ここで $\mathrm{Res}[f,-a-n]$ と $\mathrm{Res}[f,-b-n]$ を次のように変形する．ガンマ関数の相反公式 (42) を用いて

$$\Gamma(s-n)\Gamma(1-s+n) = \frac{\pi}{\sin\pi(s-n)} = (-1)^n\frac{\pi}{\sin\pi s} = (-1)^n\Gamma(s)\Gamma(1-s)$$

であるから以下を得る．

$$\Gamma(b-a-n) = (-1)^n\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(1-b+a)}{\Gamma(1-b+a+n)}$$

同様にして

$$\Gamma(a-b-n) = (-1)^n\frac{\Gamma(a-b)\Gamma(1-a+b)}{\Gamma(1-a+b+n)}$$

$$\Gamma(c-b-n) = (-1)^n\frac{\Gamma(c-b)\Gamma(1-c+b)}{\Gamma(1-c+b+n)}$$

$$\Gamma(c-a-n) = (-1)^n\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(1-c+a)}{\Gamma(1-c+a+n)}$$

が成り立つので，改めて留数の式を変形すると以下となる．

$$\mathrm{Res}[f,-a-n]=-\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(1-b+a)\Gamma(1-c+a+n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(1-b+a+n)\Gamma(c-a)\Gamma(1-c+a)\Gamma(1+n)}z^{-n}(-z)^{-a}$$

$$\mathrm{Res}[f,-b-n]=-\frac{\Gamma(a-b)\Gamma(1-a+b)\Gamma(1-c+b+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(1-a+b+n)\Gamma(c-b)\Gamma(1-c+b)\Gamma(1+n)}z^{-n}(-z)^{-b}$$

よって，3 つの組の極 $\{n\}$，$\{-a-n\}$，$\{-b-n\}$ における留数の和を求めると (22) より

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Res}[f,n]=\sum_{n=0}^{\infty}g(n)z^n=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c,z) \tag{23}$$

次に

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Res}[f,-a-n]=-(-z)^{-a}\frac{\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1-b+a)\Gamma(1-c+a+n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(1-b+a+n)\Gamma(1-c+a)\Gamma(1+n)}z^{-n}$$

ここで (22) から

$$F(a,b,c,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)\Gamma(1+n)}z^n$$

したがって

$$F\Big(a,1+a-c,1+a-b,\frac{1}{z}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+a-b)\Gamma(a+n)\Gamma(1-c+a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(1+a-c)\Gamma(1+a-b+n)\Gamma(1+n)}z^{-n}$$

と書けるから結局以下となる．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Res}[f,-a-n]=-(-z)^{-a}\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)}F\Big(a,1+a-c,1+a-b,\frac{1}{z}\Big) \tag{24}$$

同様にして

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Res}[f,-b-n]=-(-z)^{-b}\frac{\Gamma(a-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c-b)}F\Big(b,1+b-c,1+b-a,\frac{1}{z}\Big) \tag{25}$$

ここで Mellin-Barnes 積分 $\tilde{G}_0(z)$ を以下で定義する．

$$\tilde{G}_0(z):=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{L}_0}f(s)ds \tag{26}$$

ただし $\tilde{L}_0$ は，図 1 にある積分路とする．即ち，積分路 $\tilde{L}_0$ は $s=\sigma+it$ とおいたとき $|t|\geq t_0, t_0>$max $\{|\mathrm{Im(a)}|,|\mathrm{Im(b)}|\}$ では $\sigma=0$ 上を，また $-it_0$と it_0 の間では極 n $(n\in\mathbb{Z}_{\geq0})$ は全て右側に，そして他の極 $-a-n$,$-b-n$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq0})$ は全て左側にあるように取る．
定理 5.1 と (23) より以下が成り立つ．

$$\tilde{G}_0(z)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}F(a,b,c,z)\qquad(0<|z|<1,|\arg(-z)|<\pi) \tag{27}$$

右辺は $|z|<1$ において正則な関数であるから，関数論の解析接続の理論から上記は $|z|<1$ で成り立つ．
次に $b-a$ が整数でないときは，定理 5.1 と (24)，(25) を用いて以下のように書ける．

$$\tilde{G}_0(z)=(-z)^{-a}\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)}F\Big(a,1+a-c,1+a-b,\frac{1}{z}\Big)+(-z)^{-b}\frac{\Gamma(a-b)\Gamma(b)}{\Gamma(c-b)}F\Big(b,1+b-c,1+b-a,\frac{1}{z}\Big) \tag{28}$$

$$(1<|z|,|\arg(-z)|<\pi)$$

このように，(27)，(28) から $|z|<1$ で定義された超幾何級数 $F(a,b,c,z)$ は Mellin-Barnes 積分 (26) を仲介として $1<|z|,|\arg(-z)|<\pi$ へ解析接続され接続公式が成り立つ． ■

6 主定理

主定理は，定理 5.3 で b を消去したかたちの特性指数差が整数条件下である接続公式を表している．Mellin-Barnes 積分を用いた定理 5.1 の理論をもとに，定理 5.3 と同様の流れで証明を進める．

定理 6.1. $a,b,c\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$，$m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$|\arg(-z)|<\pi$ とする．
$b-a=m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば

$$F(a,a+m,c,z)=\frac{\Gamma(c)(-z)^{-a}}{\Gamma(a+m)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a)_n(m-n-1)!}{n!\Gamma(c-a-n)}z^{-n}+\frac{\Gamma(c)(-z)^{-a}}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+m)_n(-1)^n}{n!(n+m)!\Gamma(c-a-n-m)}z^{-n-m}$$
$$\times\Big\{\log(-z)+\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-\psi(a+n+m)-\psi(c-a-n-m)\Big\}$$

証明. Mellin-Barnes 積分を用いた定理 5.1 を定理 6.1 に適用する．
定理 5.1 の (8)，(9) で $b=a+m$ $(m\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ としたものを考える．
すなわち

$$f(s):=g(s)\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s \tag{29}$$

$$g(s):=\frac{\Gamma(a+s)(\Gamma(a+m+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)} \tag{30}$$

また

$$(-z)^s=e^{s\log(-z)},\qquad \log(-z)=\log|z|+i\arg(-z)$$

と定義すれば $f(s)$ は一意的に確定する．

まず超幾何級数の定義と付録のガンマ関数の性質 (38)，(39) から (30) を用いて以下のように書ける．

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+m)}{\Gamma(c)}F(a,a+m,c,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(a+m+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(c+n)}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}g(n)z^n \tag{31}$$

次に $f(s)$ の極を考える．
付録のガンマ関数の相反公式 (42) から，(29) で定義した $f(s)$ は以下のように変形できる．

$$f(s)=\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)}\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s=-\frac{\Gamma(-s)\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s$$

$\Gamma(z)$ は $z=0,-1,-2,\cdots$ で 1 位の極をもつ.
よって，上記の $f(s)$ の分子に着目すると，$\{n\}$ では $f(s)$ は 1 位の極をもち，$\{-a-n\}$ $(0\leq n\leq m-1)$ では $f(s)$ は 1 位の極をもち，$\{-a-n-m\}$ では $f(s)$ は 2 位の極をもつ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$.
次に $f(s)$ の留数を計算する.

$s=n$ における留数 $\mathrm{Res}[f,n]$ の場合

$$\mathrm{Res}[f,n]=\lim_{s\to n}(s-n)f(s)=\lim_{s\to n}g(s)\frac{\pi(s-n)}{\sin\pi s}(-z)^s=(-1)^n g(n)(-z)^n=g(n)z^n$$

$s=-a-n$ における留数 $\mathrm{Res}[f,-a-n]$ の場合 $\cdots *$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f,-a-n]&=\lim_{s\to -a-n}(s+a+n)f(s)\\
&=\lim_{s\to -a-n}\frac{(s+a+n)\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)}\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s\\
&=\lim_{s\to -a-n}\frac{-(s+a+n)\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\\
&=-(-1)^n\frac{\Gamma(m-n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(c-a-n)}(-z)^{-a-n}\\
&=-\frac{\Gamma(m-n)\Gamma(a+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(c-a-n)}(-z)^{-a}z^{-n}
\end{aligned}$$

注意 6.2. $*$ なお $s=-a-n$ における留数 $\mathrm{Res}[f,-a-n]$ の場合においての詳細な計算は，後に述べる付録の補題 8.6 に掲載する.

$s=-a-n-m$ における留数 $\mathrm{Res}[f,-a-n-m]$ の場合 $\cdots **$

$\mathrm{Res}[f,-a-n-m]$

$$=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -a-n-m}\frac{d}{ds}\Big\{(s+a+n+m)^2 f(s)\Big\}$$

$$=\lim_{s\to -a-n-m}\frac{d}{ds}\Big\{\frac{(s+a+n+m)^2\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(c+s)}\frac{\pi}{\sin\pi s}(-z)^s\Big\}$$

$$=-\lim_{s\to -a-n-m}\frac{d}{ds}\Big\{\frac{(s+a+n+m)^2\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\Big\}$$

$$=-(-1)^{2n+m}\lim_{s\to -a-n-m}\frac{d}{ds}\left[\frac{\{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)\}^2\Gamma(-s)}{\Gamma(-s-a+1)\Gamma(-s-m-a+1)\Gamma(c+s)}(-z)^s\right]$$

$$=-\frac{(-z)^{-a}\Gamma(a+n+m)(-1)^n}{n!(n+m)!\Gamma(c-a-n-m)}z^{-n-m}\times\Big\{\log(-z)+\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-\psi(a+n+m)-\psi(c-a-n-m)\Big\}$$

注意 6.3. $**$ なお $s=-a-n-m$ における留数 $\mathrm{Res}[f,-a-n-m]$ の場合においての詳細な計算は，後に述べる付録の補題 8.7 で掲載する．

よって，3 つの組の極である $\{n\}$，$\{-a-n\}$，$\{-a-n-m\}$ における留数の総和を求めると以下となる．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Res}[f,n]=\sum_{n=0}^{\infty}g(n)z^n=\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+m)}{\Gamma(c)}F(a,a+m,c,z) \tag{32}$$

$$\sum_{n=0}^{m-1}\mathrm{Res}[f,-a-n]=-(-z)^{-a}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(a+n)(m-n-1)!}{n!\Gamma(c-a-n)}z^{-n} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Res}[f,-a-n-m]=&-(-z)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n+m)(-1)^n}{n!(n+m)!\Gamma(c-a-n-m)}z^{-n-m}\\&\times\Big\{\log(-z)+\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-\psi(a+n+m)-\psi(c-a-n-m)\Big\}\end{aligned} \tag{34}$$

定理 5.1 より上記の留数を用いて接続公式を求める．
$a, a+m, c\notin\mathbb{Z}_{\le 0}$ のとき Mellin-Barnes 積分を以下と定義する．

$$G_0(z):=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}f(s)ds \tag{35}$$

積分路 L_0 は $s=\sigma+it$ とおいたとき $|t|\geq t_0, t_0>\max\{|\mathrm{Im(a)}|, |\mathrm{Im(a+m)}|\}$ では $\sigma=0$ 上を，また $-it_0$ と it_0 の間では極 n $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ は全て右側に，そして他の極 $-a-1,-a-2,\cdots,-a-m,\cdots(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ は全て左側にあるように取る.
図 1 にならい極のイメージと積分路 L_0 を図 3 に記す.

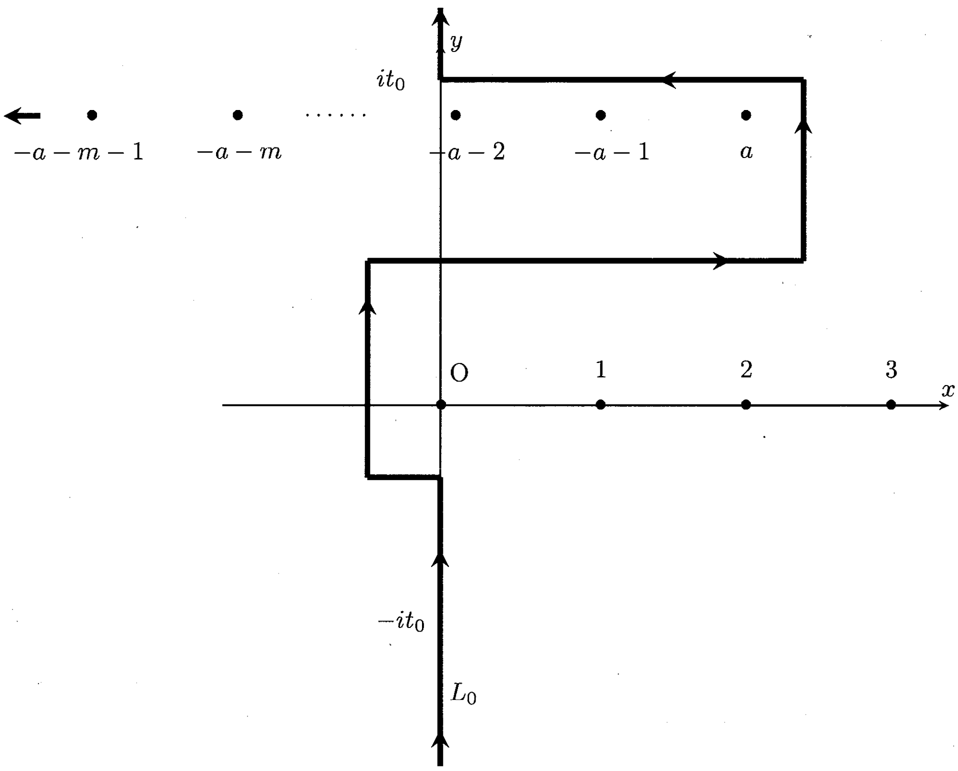

図 3　$f(s)$ の極と L_0

すると定理 5.1 と (32) からまず以下が成り立つ.

$$G_0(z)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+m)}{\Gamma(c)}F(a,a+m,c,z)\qquad(0<|z|<1,|\arg(-z)|<\pi)\tag{36}$$

右辺は $|z|<1$ において正則な関数であるから，関数論の解析接続の理論から上記は $|z|<1$ で成り立つ.
次に定理 5.1 と (33)，(34) から以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}G_0(z)=(-z)^{-a}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(a+n)(m-n-1)!}{n!\Gamma(c-a-n)}z^{-n}+(-z)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n+m)(-1)^n}{n!(n+m)!\Gamma(c-a-n-m)}z^{-n-m}\\ \times\Big\{\log(-z)+\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-\psi(a+n+m)-\psi(c-a-n-m)\Big\}\end{aligned}\tag{37}$$

このように，(36)，(37) から $|z|<1$ で定義された超幾何級数 $F(a,a+m,c,z)$ は Mellin-Barnes 積分 (35) を仲介として $|z|>1,|\arg(-z)|<\pi$ へ解析接続され最終的に以下が成り立つ.

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+m)}{\Gamma(c)}F(a,a+m,c,z)$$

$$= (-z)^{-a}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(a+n)(m-n-1)!}{n!\Gamma(c-a-n)}z^{-n} + (-z)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n+m)(-1)^n}{n!(n+m)!\Gamma(c-a-n-m)}z^{-n-m}$$
$$\times\Big\{\log(-z)+\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-\psi(a+n+m)-\psi(c-a-n-m)\Big\}$$

上記左辺の係数部分を 1 とし，式を整理すると

$$F(a,a+m,c,z) = \frac{\Gamma(c)(-z)^{-a}}{\Gamma(a+m)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a)_n(m-n-1)!}{n!\Gamma(c-a-n)}z^{-n} + \frac{\Gamma(c)(-z)^{-a}}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+m)_n(-1)^n}{n!(n+m)!\Gamma(c-a-n-m)}z^{-n-m}$$
$$\times\Big\{\log(-z)+\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-\psi(a+n+m)-\psi(c-a-n-m)\Big\}$$

となり定理は示された. ■

7　参考文献

[1] 原岡喜重．複素領域における線形微分方程式．数学書房．2015/9/15.

[2] 原岡喜重．すうがくの景色 7　超幾何関数．株式会社朝倉書店．2002/10/25.

[3]Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, Charls W. Clark, NIST Handbook of Mathematical Functions. Cambridge University Press. 2010.

[4]Peter Henrich. APPLIED AND COMPUTATIONAL COMPLEX ANALYSIS. John Wiley and Sons. 1977.

[5] 緒方秀教．ガイダンス微分方程式 自然法則を語る数学．サイエンス社．2022/6/10.

[6] 西本敏彦．超幾何・合流型超幾何微分方程式．共立出版株式会社．2000/5/10.

[7]Lucy Joan Alater. GENERALIZED HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS. Cambridge University Press． 1966.

[8] 出耒 光夫，澤野　嘉宏，野井　貴弘．[詳細]　複素解析学．株式会社 日本評論社．2022/9/25.

[9] 藤原 正彦．Ramanujan の数学．一般社団法人 日本数学会．2005.

[10]B. オーシュコルヌ，D. シュラットー．熊原啓作．世界数学者辞典．株式会社 日本評論社．2015/9/25.

8 付録

8.1 公式集

$n \in \mathbb{N},\ a, b, z \in \mathbb{C},\ t$ をパラメータとする.

補題 8.1. ポッホハマー記号とガンマ関数の関係式

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \tag{38}$$

補題 8.2. ガンマ関数と階乗の関係式

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \tag{39}$$

補題 8.3. ガンマ関数とベータ関数の関係式

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad (\text{ただし } \mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) > 0) \tag{40}$$

補題 8.4. $(1-zt)^{-b}$ の Taylor 展開

$$(1-zt)^{-b} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-b}{n} (-zt)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{n!} (zt)^n \tag{41}$$

補題 8.5. ガンマ関数における相反公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{42}$$

8.2 留数計算の詳細な過程

8.2.1 ∗ の計算

補題 8.6. $s = -a - n$ における留数 $\mathrm{Res}[f, -a-n]$ の計算において

$$\lim_{s \to -a-n} \frac{-(s+a+n)\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)} (-z)^s$$

の部分に対し付録の公式集 (38) より

$$\lim_{s \to -a-n} (s+a+n)\Gamma(a+s) = \lim_{s \to -a-n} \frac{(s+a+n)\Gamma(s+a+n+1)}{(s+a+n)(s+a+n-1)\cdots(s+a)}$$

$$= \frac{1}{(-1)(-2)\cdots(-n)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n)}$$

を得る.

8.2.2 ** の計算

補題 8.7. $s=-a-n-m$ における留数 $\mathrm{Res}[f,-a-n-m]$ の計算において

$$-\lim_{s\to -a-n-m}\frac{d}{ds}\left\{\frac{(s+a+n+m)^2\Gamma(a+s)\Gamma(a+m+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\right\}$$

の部分に対し付録の公式集 (38) より

$$(s+a+n+m)\Gamma(a+s)$$

$$=(s+a+n+m)\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)}{(a+s)_{n+m+1}}$$

$$=\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)}{(s+a)(s+a+1)(s+a+2)\cdots(s+a+n+m-2)(s+a+n+m-1)}$$

$$=\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)}{(s+a+n+m-(n+m))(s+a+n+m-(n+m-1))\cdots(s+a+n+m-1)}$$

$$=\frac{(-1)^{n+m}\Gamma(s+a+n+m+1)}{(1-s-a-n-m)(2-s-a-n-m)\cdots((n+m)-s-a-n-m)}$$

$$=(-1)^{n+m}\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)}{(1-s-a-n-m)_{n+m}}$$

$$=(-1)^{n+m}\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)}{\Gamma(-s-a+1)}$$

また

$$(s+a+n+m)\Gamma(a+m+s)$$

$$=(s+a+n+m)\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)}{(a+m+s)_{n+1}}$$

$$=\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)}{(s+m+a)(s+m+a+1)(s+m+a+2)\cdots(s+a+n+m-2)(s+a+n+m-1)}$$

$$=\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)}{(s+a+n+m-(n))(s+a+n+m-(n-1))\cdots(s+a+n+m-1)}$$

$$=\frac{(-1)^n\Gamma(s+a+n+m+1)}{(1-s-a-n-m)(2-s-a-n-m)\cdots((n)-s-a-n-m)}$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)}{(1-s-a-n-m)_n}$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)}{\Gamma(-s-m-a+1)}$$

よって整理すると

$$-(-1)^{2n+m}\lim_{s\to -a-n-m}\frac{d}{ds}\left[\frac{\{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)\}^2\Gamma(-s)}{\Gamma(-s-a+1)\Gamma(-s-m-a+1)\Gamma(c+s)}(-z)^s\right]$$

ここでガンマ関数の対数微分を考えると

$$\frac{\frac{d}{ds}\left[\frac{\{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)\}^2\Gamma(-s)(-z)^s}{\Gamma(-s-a+1)\Gamma(-s-m-a+1)\Gamma(c+s)}\right]}{\frac{\{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)\}^2\Gamma(-s)(-z)^s}{\Gamma(-s-a+1)\Gamma(-s-m-a+1)\Gamma(c+s)}}$$

$$=\frac{d}{ds}\log\left[\frac{\{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)\}^2\Gamma(-s)(-z)^s}{\Gamma(-s-a+1)\Gamma(-s-m-a+1)\Gamma(c+s)}\right]$$

$$=\frac{d}{ds}\Big[2\Big\{\log\Gamma(s+a+n+m+1)+\log\Gamma(-s-a-n-m+1)\Big\}+\log\Gamma(-s)+s\log(-z)$$
$$-\log\Gamma(-s-a+1)-\log\Gamma(-s-m-a+1)-\log\Gamma(s+c)\Big]$$

$$=2\Big\{\psi(s+a+n+m+1)-\psi(-s-a-n-m+1)\Big\}-\psi(-s)+\log(-z)$$
$$+\psi(-s-a+1)+\psi(-s-m-a+1)-\psi(s+c)$$

よって整理すると

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)\}^2\Gamma(-s)(-z)^s}{\Gamma(-s-a+1)\Gamma(-s-m-a+1)\Gamma(c+s)}\right]$$

$$=\frac{\{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)\}^2\Gamma(-s)(-z)^s}{\Gamma(-s-a+1)\Gamma(-s-m-a+1)\Gamma(c+s)}\times$$

$$\left[2\Big\{\psi(s+a+n+m+1)-\psi(-s-a-n-m+1)\Big\}-\psi(-s)+\log(-z)\right.$$
$$\left.+\psi(-s-a+1)+\psi(-s-m-a+1)-\psi(s+c)\right]$$

となるので $s=-a-n-m$ における留数を改めて記述すると

$\mathrm{Res}[f,-a-n-m]$

$$=-(-1)^{2n+m}\lim_{s\to-a-n-m}\frac{\{\Gamma(s+a+n+m+1)\Gamma(-s-a-n-m+1)\}^2\Gamma(-s)(-z)^s}{\Gamma(-s-a+1)\Gamma(-s-m-a+1)\Gamma(c+s)}$$

$$\times\left[2\Big\{\psi(s+a+n+m+1)-\psi(-s-a-n-m+1)\Big\}-\psi(-s)+\log(-z)\right.$$
$$\left.+\psi(-s-a+1)+\psi(-s-m-a+1)-\psi(s+c)\right]$$

$$=-\frac{(-z)^{-a}\Gamma(a+n+m)(-1)^n z^{-n-m}}{n!(n+m)!\Gamma(c-a-n-m)}\times\Big\{\log(-z)+\psi(n+1)+\psi(n+m+1)-\psi(a+n+m)-\psi(c-a-n-m)\Big\}$$

となる.