文化　第79巻 第３・４号 ―秋・冬― 別刷
平成28年３月25日発行

囲碁による論理学

村　上　祐　子

囲碁による論理学

村　上　祐　子

序

形式論理学入門講義では、形式言語とそのモデルの操作に習熟させることがゴールとなる。通常は古典命題論理の言語と真理表を与えたのちに、1階述語論理に進んで集合論的モデルを提示する。ここで重要となる内容は、それぞれの論理体系における証明可能性と意味論の妥当性、およびこれら二つが一致することを主張する完全性定理に向けた証明技法となる。論理学のカリキュラムは積み上げ型であり、この入門講義の次段階として完全性定理の系の理解、算術と不完全性定理といった内容が提示されることが多いが、学生のニーズによっては非古典論理に展開することも可能である。

アメリカでは形式論理学の準備段階として非形式論理学・クリティカルシンキングの授業が開講されており、学生は初年次段階で日常言語の演繹推論における妥当性や帰納推論の蓋然性の概念になじんでいる。そのうえで関心がある学生が形式論理学の授業を継続履修して形式言語の扱いを学ぶことになるが、それでも形式言語の記号になじめない学生が少なくない。さらに1階述語論理における量化の概念と集合論を用いた抽象的なモデルの扱いに戸惑う学生もいる。

実際には、入門レベルの1階述語論理習得で最も高いハードルは推論やメタ論理ではなく、形式言語と日常言語の翻訳である。これは日常言語の文の論理形式の分析を要求される課題であり、直観的に飲み込みづらいと感じる学生が少なくない。だが推論・定理・妥当性といった概念理解を目標とする15コマ相当の1学期の入門授業では、形式言語と日常言語の翻訳には2コマ程度の配分が精いっぱいとなり、消化不良のまま進行することとなる。

この問題に対処するとともに、自動採点機能を備えたコンピュータ支援教材として開発されたのが、[1] である。この教材ソフトウェアの中では、実世界のミニチュアとして3×3のグリッド上に大中小の正多面体を配置できる。盤

面状況を１階述語論理の言語で記述すること、また与えられた１階述語言語の文を真とするような盤面状況を構成することが練習課題となる。妥当性や推論といった基本概念についてはテキストで説明が行われるが、一貫して抽象的な集合論的モデルではなく、自ら操作可能なトークンを用いるため、形式言語の文による実世界の表現方法の理解につながるよう設計されている。

各学生は端末で課題演習を行い、課題をオンラインで提出する。教員は電子的に提出された課題を自動採点する。論理学の回答は正答が一意とは限らないため採点は極めて煩雑であり、自動採点機能は望ましい。一方、学習環境やネット環境の制約から、1990 年代には環境整備が行き届いていると思われたアメリカの大学においてすら実施時に問題（問題の複雑性によっては１問あたりの採点時間が３時間を超える、ネットトラブル発生で締め切りまでに課題提出ができない学生が続出するなど）が発生することも少なくなかった。

当授業はこのような観察から、同様のトークン操作をあえてアナログで行うことを意図して開発された。端末が設置されていない通常教室での授業実施が可能であること、また既存のゲーム用具を用いることで学生の経済的負担を軽減すること、学生同士の共同作業が端末に比して容易でありアクティブラーニングに適していることが改善点である。もちろん自動採点機能はないが、授業内の共同活動として学生のピアレビューを行えば教員の採点負担は軽減できる。

東北大学文学部では 2013 年度から共通科目「人文社会科学総合」と人文社会系短期留学プログラム IPLA 科目の国際共修科目（英語開講）として、この授業内容の一部（概要の１：１階述語論理の言語）が提供されている。ほかの授業内容として、日本の歴史・社会・文化における囲碁やゲームのインパクト、各参加学生のプレゼンテーション（各国のゲームと文化）が含まれる。また 2016 年度からはこの方法による論理学入門に焦点を当てた全学基礎ゼミが開講され、プロ棋士を招いた囲碁の全学教育科目との連携をとることとなっている。

１．授業の概要

授業の目標は形式言語の扱いに習熟することである。課題として以下に取り組んでいく。

1. 盤上の状況を記述する：等号付１階述語論理の言語

2. 碁のルールを記述する：様相言語（選択肢の分岐）
3. ゲームの戦略を記述する：様相言語（選択肢の評価）

使用教材：4 路盤、黒石・白石　各 16 個
　教員用としては黒板に付着可能なマグネットシートと各色マグネットを使用した。学生用には「よんろのご」を使用するが、トークンの色が赤と緑であるため、アイスブレーキングをかねて学生の意見を反映させて黒白と赤緑の対応を初回に決定する。この教材にはルール説明や簡単な問題集が付属しているが、日本語しかないため留学生には使用が難しいことが多い。

補助教材：iOS アプリ「黒猫のヨンロ」
　4 路盤の詰碁の問題集であり、碁のルールの理解につながるとともに、実践には表れないような石の配置のサンプルを提供する。iOS 上の有料アプリであるため、利用可能端末を持たない学生への配慮から必須教材とはしていないが、日本語のほか英語・中国語・韓国語で使用可能であり、利用可能な学生には自習教材として強く推薦している。

２．１階述語論理の言語 G_1

　個々の盤面の記述に必要な最小語彙を持つ等号付 1 階述語論理の言語 G_1 を考え、必要に応じて新たな述語を定義していく。

言語 G_1 は以下の記号からなる言語である。
　変項記号：x,y,z…（添え字を用いることもある）
　定項記号：a,b,c…（添え字を用いることもある）
　述語記号：1 項：黒、白
　　　　　　2 項：隣
　論理結合子：∧、∨、→、～
　量化子：∀、∃
　等号：＝
　補助記号：(、)（入れ子の深さにより角かっこを用いることもある）

定項記号と変項記号を合わせて項記号と呼ぶ。

G_1 の文は以下のように帰納的に定義される。

1. t と s が項記号のとき、t=s は文である。
2. t が項記号で P が 1 項述語のとき、P（t）は文である。
3. t と s が項記号で Q が 2 項述語のとき、Q（t,s）は文である。
4. A が文のとき、～ A は文である。
5. A と B が文のとき、A ∧ B、A ∨ B、A → B は文である。
6. x が変項で A が文のとき、（∀ x）（A）と（∃ x）（A）は文である。

以上で定義される記号列だけが文である。上記 1 － 3 で定義される文を原子文と呼ぶ。上記 4 － 6 で定義される文を複合文と呼ぶ。

上記 6 で（∀ x）（A）［（∃ x）（A）］に対して文 A を量化子（∀ x）のスコープと呼ぶ。

例：以下は文である。

黒（a）
白（x）
隣（a,b）
（∀ x）（黒（x）→隣（a,x））

例：以下は文ではない。

黒（a,b）
黒白（x）
黒（x）＝隣（a,x）
隣（黒（a），白（b））

３．１階述語論理のモデルとしての碁盤と盤面配置

碁盤を 1 階述語論理のモデルとして用いる際に、以下のように解釈する。

1. 個体領域：交点の集合
2. 黒（t）が真 ⇔ t の点に黒石がある
3. 白（t）が真 ⇔ t の点に白石がある

4. 隣（t,s）⇔ t と s が隣の点

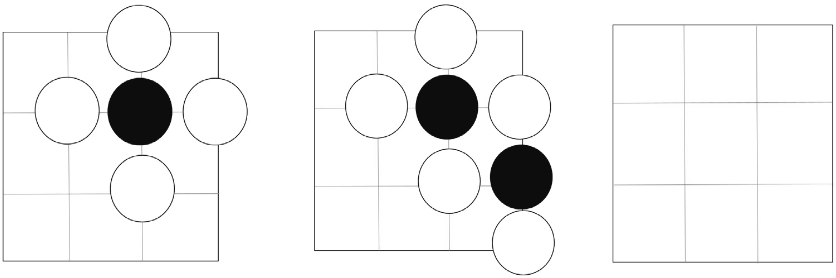
碁の盤面を記述する際に述語が意図通りの挙動をするよう、以下を採用する。

意味公理：すべての x,y について以下が成立する。

1. ～隣（x,x）
2. 隣（x,y）→隣（y,x）
3. 黒（x）→～白（x）

この意味公理を採用すると、黒と白が同じ点に同時に存在することはなくなる。

例：(∀ x)(黒 (x) → (∃ y)(隣 (x,y) →白 (y))) をみたす盤面の例



最後の例では黒石が盤面にないので文全体は自明に真となる。

注：この時点ではルールを順守した盤面であるかどうかは問わない。

４．４路盤の記述

4x4 の碁盤（4 路盤）そのものを等号付 1 階述語論理の言語で記述することが最初の課題となる。盤の構造だけを考える際には述語「隣」だけを考えればよいが、「ある条件を満たす点が何個存在するのか」をこの言語で記述することが必須となる。

一般に 1 階述語論理では個々の有限数の記述が可能である。例えば「黒が

ちょうどn個ある」ことは以下のように書ける。

0: 〜(∀ x)(黒 (x))
1: (∃ x)(黒 (x)∧ (∀ y) (黒 (y)→ x=y))
2: (∃ x)(∃ y) (((黒 (x)∧黒 (y))∧〜 (x=y))∧ (∀ z) (黒(z)→ x=y))
…

この仕組みで個々の有限数を記述可能なので、「ちょうど1個ある」を (∃ !x) または (∃ =1 x)、「ちょうど2個ある」を (∃ =2 x)、…、「ちょうどn個ある」を (∃ =n x) と書くことにする。

ここで以下のように述語を定義する。
1. 隅 (x) := (∃ =2 y)(隣 (x,y))
2. 辺 (x) := (∃ =3 y)(隣 (x,y))
3. 中 (x) := (∃ =4 y)(隣 (x,y))

そのうえで4路盤を考えると以下の状況が成立している。また意味公理を前提したうえで以下の状況すべてが成立する「隣」構造は4路盤に限られる。

1. (∃ =4 x) 隅 (x)　隅の点が4つある
2. (∀ x) (隅 (x) → (∃ =2 y) (辺 (x,y) ∧隣 (x,y)))
   隅の点の隣には辺の点が2つある。
3. (∀ x) (辺 (x) → (∃ =1 y) (隅 (x,y) ∧隣 (x,y)) ∧ (∃ =1 y) (辺 (x,y) ∧隣 (x,y) ∧ (∃ =1 y) (中 (x,y) ∧隣 (x,y)))
   辺の点の隣には隅の点が1つと辺の点が1つと中央の点が1つある。
4. (∀ x) (中 (x) → (∃ =2 y) (辺 (x,y) ∧隣 (x,y) ∧ (∃ =2 y) (中 (x,y) ∧隣 (x,y)))
   隣の点が4つの点の隣には隣の点が3つの点が2つと隣の点が4つの点が2つある。

もちろん4路盤以外の構造を記述することもこの言語では可能である。

5．石の形の記述

黒石二つが並んでいることは次のように記述できる。

（∃ x）（∃ y）（黒（x）∧黒（y）∧隣（x,y））

ここで、新しい述語を定義しよう。

黒隣（x,y）:=（黒（x）∧黒（y）∧隣（x,y））
白隣（x,y）:=（白（x）∧白（y）∧隣（x,y））
同隣（x,y）:= 白隣（x,y）∨黒隣（x,y）
黒白隣（x,y）:=（黒（x）∧白（y）∧隣（x,y））

さらに、「帰納的定義」と呼ばれる手法を使って次の述語「黒連」を定義する（白連についても同じように定義する）。

1. 黒隣（x,y）ならば、黒連（x,y）である。
2. x=z ではなくかつ黒隣（x,y）かつ黒連（y,z）ならば、黒連（x,z）である。

これらを使うと、連なっている石の塊を記述するのが簡単になる。

ある点 a について黒（a）が真であるとき、集合

$黒_a$= {x: 黒連（a,x）}

と定義する（$白_a$についても同様）。$黒_a$の呼吸点の集合を以下のように定義する。

$呼吸_a$={x: ～$黒_a$（x）∧（∃ y）（ $黒_a$（y）∧隣（x,y））}

碁のルールでは、ある点 a に石を置くことで、隣接する点 b の呼吸点のすべてが b の色ではない石を置かれたときに、盤面から連結した石全体が取り除かれることになる。

また、ある点 a に石がないがそこに石を新たに置くと$黒_a$（または$白_a$）の呼吸点が 0 個になるとき、a は黒（または白）の<u>着手禁止点</u>であるという。

このようなルールをこの言語では表現可能である。

6．1 階述語論理の限界

以上でできるようになったことは以下のとおりである。

1. 盤の記述
2. 石の配置
3. 石同士の結合関係
4. 呼吸点と着手禁止点

だがルールの記述には 1 階述語論理の言語では不足である。「その前に打たれた局面」や「次に可能な局面」を記述できないからである。たとえばコウのルールでは「その前に打たれた点にすぐにうつことはできない」という禁則があるが、どの石がすぐ前に打たれた点であるのか特定できなければルールの記述はできない。

そこで局面間の推移を表現する語彙を持つ言語を考えなければならない（別のやり方では棋譜のように各石に数字を割り振ることが考えられる。だが記録目的ではなく、戦略の記述を行う場合には複数の可能な盤面の評価が必要になるため、ここでは様相語彙追加という方針をとる）。

また有限数 n について「n 個存在する」ことは 1 階述語論理の言語で可能であるが、「有限個存在する」ことを記述することはできないことに留意すべきである。

7．これからの展望

15 回の授業では 1 階述語論理の導入演習までが標準的内容となり、様相言語までは到達が難しいため、完全なルール記述はこれまでのところ実施できていない。今後継続の機会に次のステップに学生ともども取り組んでいく。

参考文献

[1] Barwise, J. and J. Etchemendy (1993) *Language, Proof, and Logic*. With application Tarski's World. CSLI Publications.
使用例動画　https://www.youtube.com/watch?v=lGXnkovPgqs
[2] 張栩 (2012)「よんろのごのほん」幻冬舎

Introduction to logic via go

Yuko MURAKAMI

This presentation is a practice report of gamification of first-order logic course via Go (weiqi) app "Cho U's 4 by 4 Go Puzzle," whose game board is a four-by-four grid, and game pieces are white and black stones. For logic purpose, it mimics Tarski's world, where students learn to construct first-order models with polyhedrons on three-by-three grids. In the pilot course, use of the game enhanced students' motivation to learn so that they successfully acquired interpretations of quantifiers and equality symbols in three sessions.