小中学生における面積大小判断とその規定要因について
―図形の高さ概念および公式の定性的理解に着目して―

佐　藤　誠　子

子どもたちは、複数の平面図形の面積を比較するときに、図形の周長がより大きい方が面積は大きいと判断したり、図形の周長が同じ場合には面積は同じとみなしてしまう傾向があることがこれまでの研究により示されている。本研究は、小中学生における面積大小判断の実態とその規定要因について検討するものである。面積課題解決に関わる学習者の認知的要因として、図形の「高さ」概念と求積公式の「定性的理解」を取り上げ、それらと課題解決との関連を分析した。その結果、等積変形課題（面積は等しいが周長が異なる図形の面積比較課題）ではこれらに対して適切な理解を保持している学習者は、正しい解決の割合が高かったことが示された。一方、等周長変形課題（周長が等しい図形の面積比較課題）では、そのような一貫した結果は得られなかった。等周長変形課題では「同一枠の変形」など課題の持つ特徴が不適切な属性として判断に混入するためと推測された。

キーワード：面積大小判断、高さ概念、定性的理解、小中学生

問題と目的

現行の小学校学習指導要領（平成10年12月告示）では、基本的な幾何学的平面図形の面積に関して、第4学年で正方形および長方形、第5学年で三角形および平行四辺形の求積について学習することになっている。これら平面図形の求積公式を学習すれば、面積を比較するという状況で、図形の具体的な長さの数値が与えられなくとも、「底辺と高さがそれぞれ同じ長さならば面積は同じ」「底辺が同じとき、高さが小さくなれば面積は小さくなる」というように、底辺や高さの相対的な大小で面積大小判断ができると思われる。しかし、実際のところは必ずしもそうではなく、子どもたちは課題状況によっては求積公式を適用することなく不適切な問題解決をしてしまうことがある。

子どもたちは、複数の平面図形の面積を比較するときに、図形の周長がより大きい方が面積は大きいと判断したり、図形の周長が同じ場合には面積は同じとみなしてしまう傾向がある（細谷、1976；工藤・白井、1991）。前者の誤りは、Figure1のような課題（等積変形課題）で明瞭になる。この課題では、長方形と平行四辺形の底辺と高さがそれぞれ等しいので面積は等しいのであるが、子

東北大学大学院教育学研究科博士課程後期

どもたちは、面積比較時に面積は平行四辺形の方が大きいと判断してしまうという。一方、後者の誤りは、Figure2のような課題(等周長変形課題)で明瞭になる。この課題では、底辺が等しくても高さは平行四辺形の方が小さいので面積は平行四辺形の方が小さいのであるが、子どもたちは、面積比較時に長方形と平行四辺形の面積は同じと判断してしまうという。こうした面積判断の誤りに関して、西林(1988)は、就学前の幼児や小学生および大学生を対象に等周長変形課題解決と保存課題に対する反応との関係を検討した結果から、等周長変形課題において「面積同じ」とする誤りは保存概念を媒介として起こると解釈している。一方、工藤・白井(1991)は、小学1～6年生を対象とした調査から、誤判断の背景には面積学習を妨害する「周長大なら面積大」という誤ったルール(周長ル・バー)が存在しているということを指摘している。

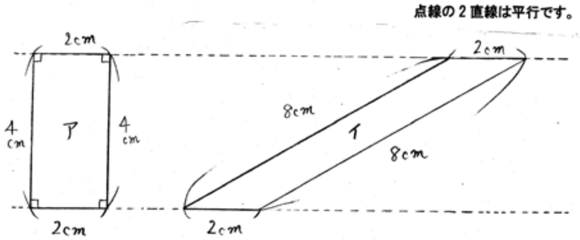

Figure1　等積変形課題(対提示)の一例

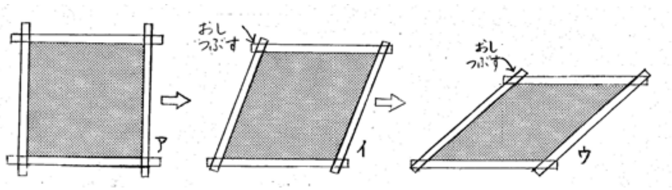

Figure2　等周長変形課題(連続性)の一例

以上のように、面積大小判断の誤りの原因については種々の議論がなされており、それ自体興味深いものではある。しかし、特筆すべきなのは、求積公式の適用や底辺と高さへの着目によって解決可能な各変形課題に対して、学校教育において面積学習を終えた学習者でさえも誤判断をしてしまうということである。学習者の適切な問題解決を促進させるという視点からすると、教授学習活動において重要になるのは、教材、教授条件の設定および学習者の認知的側面であろう。誤判断の原因だけでなく、各変形課題に対する適切な面積大小判断の要因や条件についても追究する必要がある。そこで本研究では、中でも、適切な面積大小判断に関わる学習者の認知的要因と実際の課題解決との連関について焦点を当てたい。さて、このような要因について取り上げた研究としては、工藤(2005)がある。工藤は、大学生を対象に、平行四辺形の求積公式に関する知識操作水準と等周長変形課題解決との関連を検討した。求積公式の知識操作水準は、求積公式に操作を加えた内容(「平行四辺形の面積を求めるには、底辺の長さと高さをかけ合わせればよい」／「平行四辺形の形が違っていても、面積は同じ場合がある」／「平行四辺形の底辺が一定の場合、高さが2倍になると面積も

2倍になる」、等）に対して、元の公式（平行四辺形の面積＝底辺×高さ）が意味しているか否かを選択させる問題によって測定された。その結果、等周長変形課題に対してヒントなしで正答できた者の割合は、知識操作水準が高い者（高操作群）の方が多かったという。これは、高操作群の方が「底辺が同じ場合、高さが低くなれば面積は小さくなる。よって、変形後の方が面積は小さくなる」という公式の操作が可能なためであると考察されている。こうしたことから、適切な面積大小判断のためには、公式の知識操作水準を高めるための働きかけが有効となりうることが推察される。ただし、工藤の研究の対象者は大学生である。小学生や中学生においても、求積公式に対して上記のような思考操作ができることが、等周長変形課題や等積変形課題における正しい面積大小判断にとって必要な条件であるか否かということは、工藤の研究からはすぐには結論づけられないだろう。なぜなら、大学生は少なくとも初等・中等教育を経ており、そもそも面積についての知識が小中学生よりも構造化されていることが考えられ、その上、上記のような求積公式に関する思考操作は、小中学生にとっては果たして容易に行いうるものなのかという問題もあるからである。

このような点から、本研究では、小中学生を対象として、等周長変形および等積変形課題解決と、適切な課題解決にとって重要と思われる学習者の認知的要因との連関を明瞭にすることを目的とする。本研究では、変形課題解決に関わると考えられる学習者の認知的要因として、「高さ」概念と定性的理解を取り上げる。それは以下のような理由からである。等積変形課題は、底辺と高さがそれぞれ等しい長方形と平行四辺形の面積を比較する課題であるが、平行四辺形の方は大きく傾いており、内部に高さを取ることができない図形である。鈍角三角形に対して、「高さ」をFigure3のh'のように底辺と直交しない図形の内部などに取ってしまう子どもの存在は以前から指摘されている（小野寺、1989；Fischbein, 1993；高垣、2001）。高さを外部に取るような図形においてみられるこのようなつまずきは、三角形や平行四辺形などの求積や面積判断においても阻害要因となりうる。図形に対する適切な「高さ」概念が形成されていれば、面積を求めるときの「底辺」「高さ」の関係（高さは底辺に対して垂直であること）について適切に理解しているということであるので、幾何学的平面図形の求積や面積判断などが正しくなされるだろう。よって、適切な「高さ」概念を保持している者は、各種変形課題においても適切に面積判断を行う可能性は高いと思われる。一方、等積変形課題、等周長変形課題は、底辺と高さに着目することや求積公式を適用することによって解決可能であるが、課題図形自体には底辺、高さの具体的な長さの数値は記入されておらず、面積そのものを求めることを要求している問題ではない。そのような問題において、求積公式を適用した課題解決が可能になるには、前述のように、公式に具体的な数値を代入しなくとも「底辺と高さがそれぞれ同じならば面積は同じ」「底辺が同じとき、高さが小さくなれば面積は小さくなる」というように、底辺、高さの相対的な大小関係から面積の大小を判断する必要がある。このような、面積判断の際に着目しなければならない「底辺、高さの相対的大小」は、量的というよりは定性的に理解される底辺、高さと面積の関係である。よって底辺、高さの相対的大小から面積を理解することを「定性的理解」と呼ぶこととする。定性的理解は、数値代入なしで公式を操作して面積の大小を理解するという点で、工藤（2005）の指摘する知識操作と関係するものである。小中学生にとって、定性的

理解ができている者は、各種変形課題において適切な面積大小判断が可能であるか、さらに、そもそも小中学生にとって、求積公式の定性的な理解は容易かどうかもあわせて検討する。

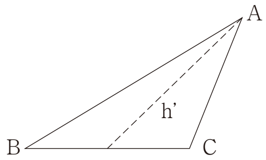

Figure3 「高さ」の測定においてみられるつまずきの一例

方法

1. 対象者および調査時期

公立A小学校6年生22名、B小学校6年生43名、公立S中学校2年生73名が、筆者の依頼により本研究の対象となった。小学生は2006年11月、中学生は2006年7月に調査を実施した。

2. 調査の概要

A4判の調査冊子2種類が調査協力校の担任により配布され、クラス単位で一斉に行われた。解答は各自のペースで課題冊子①、②の順に行われた。なお、課題冊子①、②の問題は以下の通りである。各学年の発達差を考慮し、学年間で一部問題内容を改変したものがあった。

2.1 課題冊子①

高さ課題 底辺があらかじめ指定された5つの図形（図形の内部に高さが取れる平行四辺形、図形の外部に高さを取る平行四辺形（傾き大）、底辺が水平でない平行四辺形、鋭角三角形、鈍角三角形）について、それぞれ高さを書かせた。

等積変形（対提示） 中学生用問題：等積の形の異なる2つの平行四辺形ア、イで、面積はどちらが大きいか、それとも同じかを3択で問うた。2つの図形は上辺と下辺にのみ長さ（2cm）が記入され、平行な2直線間に配置された。周長はイの方が大きい（Figure4）。

小学生用問題：等積の長方形（ア、横2cm 縦4cm）と平行四辺形（イ、底辺2cm 斜辺8cm）で（Figure1参照）、面積はどちらが大きいか、それとも同じかを3択で問うた。2つの図形は周長が記入され、平行な2直線間に配置された。

等積変形（連続性） 上・下辺が木の棒、縦二辺がゴムで作られた長方形の枠で、下辺を固定したまま高さを変えずに（下辺と上辺が平行になるように）上辺のみを右に3段階で連続的に移動させたときの、枠内の面積を比較させた（4択、Figure5）。小中学生ともに同一の問題であった。

等周長変形（対提示） 14本のマッチ棒で作った長方形（横4本、縦3本）と平行四辺形（底辺4本、斜辺3本、右傾）の面積を比較させた（3択、Figure6）。小中学生ともに同一の問題であった。

等周長変形（連続性） 角を留めた正方形の木枠を、正方形から平行四辺形（右傾）におしつぶして3段階で連続的に変形させた（Figure2参照）ときの、枠内の面積を比較させた。4択（面積が大きい順にア、イ、ウ／面積が大きい順にウ、イ、ア／面積はどれもみんな同じ／その他）で問うた。小中学

生ともに同一の問題であった。

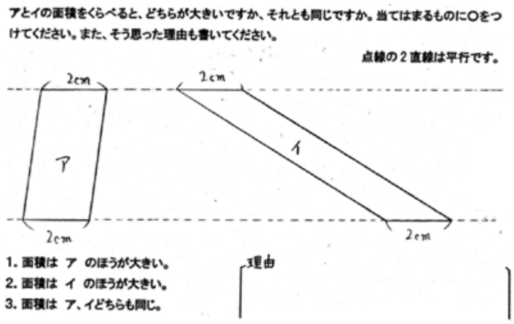

Figure4　等積変形課題（対提示、中学生用問題）

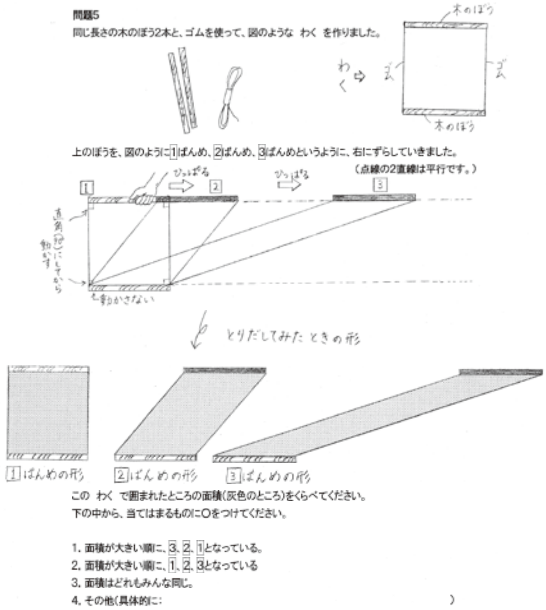

Figure5　等積変形課題（連続性）

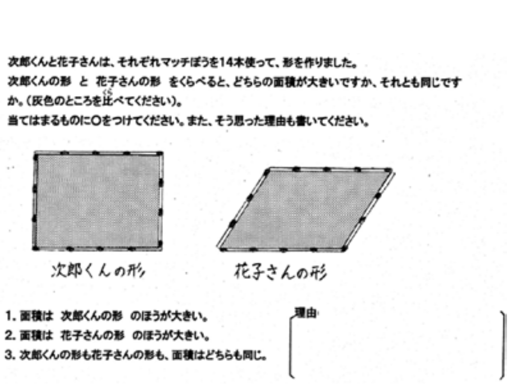

Figure6　等周長変形課題（対提示）

2.2　課題冊子②

平行四辺形の面積を求める公式について定性的な理解をしているかどうかを調べる問題（以下、「定性的理解の問題」）2問からなる。各問題文の前には、平行四辺形の面積を求める公式と平行四辺形を提示した。なお、定規は使用しないよう教示した。課題の詳細は以下の通りである。

問題1　中学生用問題：底辺が等しく、高さが異なる長さの2つの平行四辺形A、Bの面積の大小を判断させる問題である（底辺は同じ長さで、高さはAの方が小さい）。A、Bの関係について、「右の図のような平行四辺形AとBがあります。この2つの平行四辺形を調べてみたところ、Aの底辺の長さとBの底辺の長さは同じで、Aの高さはBの高さよりも小さいことがわかりました」との説明の後、「AとBの面積を比べたときどんなことが言えるか」を4択で問うた（1. 面積はAの方が大きい／2. 面積はBの方が大きい／3. 面積はA、Bどちらも同じ／4. 底辺と高さが、それぞれ何cmか、長さが書かれていないので、何とも言えない）。認知的負荷が大きくならないよう、問題文の右側に、一目で面積の大小がわからないような平行四辺形A、Bを配置した。

小学生用問題：底辺が等しく、高さが異なる長さの2つの平行四辺形ア、イの面積の大小を判断させる問題である（底辺は同じ長さで、高さはアの方が大きい）。アとイの関係についての説明の後、「アとイの面積を比べたときどんなことが言えるか」を4択で問うた（1. 面積はアの方が大きい／2. 面積はイの方が大きい／3. 面積はア、イどちらも同じ／4. 底辺と高さが、それぞれ何cmか、長さが書かれていないので、何とも言えない）。認知的負荷が大きくならないよう、問題文の右側に、一目で面積の大小がわからないような平行四辺形ア、イを配置した。

問題2　中学生用問題：底辺も高さも異なる長さの2つの平行四辺形C、Dの面積の大小を判断させる問題である（底辺はCの方が大きいが、高さはCの方が小さい）。問題1と同様に、「CとDの面積を比べたときどんなことが言えるか」を4択で問うた。問題文の右側に、一目で面積の大小がわからないような平行四辺形C、Dを配置した。

小学生用問題：底辺と高さがそれぞれ同じ長さの平行四辺形ウ、エの面積の大小を判断させる問題である。問題1と同様に、「ウとエの面積を比べたときどんなことが言えるか」を4択で問うた。問題文の右側に、一目で面積の大小がわからないような形の異なる平行四辺形ウ、エを配置した。

結果

1.　高さ課題

高さ課題の正答率をTable1に示す。小学生の平均正答数（5問中）は、3.45（SD=1.55）、中学生の平均正答数は4.03（SD=1.34）であった。高さ課題の平均正答数についてt検定を行ったところ、中学生の平均正答数が有意に多いことが示された（$t(136)=2.36, p<.05$, 両側）。次に課題図形ごとに正答者数の割合を比較すると、小学生、中学生ともに、底辺が水平でない平行四辺形の正答率が低い結果となった。小学生、中学生間で正答者数の比率の差を検定したところ、図形の外部に高さを取る平行四辺形（傾き大）と鈍角三角形において有意差がみられ、どちらの図形においても中学生の方が正答者数の割合が多かった（平行四辺形（傾き大）：$\chi^2(1)=6.17, p<.05$, 鈍角三角形：$\chi^2(1)=7.16$, p<.01）。

Table1　高さ課題の正答者数（%）

	平行四辺形	平行四辺形 （傾き大）	鋭角三角形	平行四辺形 （底辺が水平でない）	鈍角三角形
小学生（65名）	58（89.2）	38（58.5）	59（90.8）	31（47.7）	38（58.5）
中学生（73名）	69（94.5）	57（78.1）	68（93.2）	42（57.5）	58（79.5）

数字は人数、（　）内は%を表す。

2. 定性的理解の問題

定性的理解の問題の正答率を Table2に示す。小学生の平均正答数（2問中）は1.03（SD=0.88）、中学生の平均正答数は1.32（SD=0.72）であった。定性的理解の問題の平均正答数についてt検定を行ったところ、中学生の平均正答数が有意に多いことが示された（t(136)=2.08, p<.05, 両側）。また、各問に対する反応についてみると、面積の大小が確定できる問題において「（長さ（cm など）が書かれていないので）何とも言えない」を選択した割合は、小学生の方が多いことがうかがえる。

Table2　定性的理解の問題における選択肢ごとの解答者数（%）

小学生（N = 65）	問題1	問題2	中学生（N = 73）	問題1	問題2
1. ア（ウ）＞イ（エ）	<u>29（44.6）</u>	2（ 3.1）	1. A（C）＞B（D）	0（ 0.0）	6（ 8.2）
2. ア（ウ）＜イ（エ）	3（ 4.6）	10（15.4）	2. A（C）＜B（D）	<u>52（71.2）</u>	8（11.0）
3. ア（ウ）＝イ（エ）	10（15.4）	<u>38（58.5）</u>	3. A（C）＝B（D）	7（ 9.6）	13（17.8）
4. 何とも言えない	23（35.4）	15（23.1）	4. 何とも言えない	13（17.8）	<u>44（60.3）</u>
N.A. 無答	0（ 0.0）	0（ 0.0）	N.A. 無答	1（ 1.4）	2（ 2.7）

数字は人数、（　）内は%を表す。下線部が正答。

3. 変形課題

等積変形課題、等周長変形課題における正答率を Table3、Table4に示す。平均正答数（4問中）は、小学生1.4（SD=1.16）、中学生1.96（SD=1.24）であった。変形課題4問の平均正答数についてt検定を行ったところ、中学生の平均正答数が有意に多いことが示された（t(136)=2.73, p<.01, 両側）。次に、問題ごとに正答者数の割合を比較する。正答とそれ以外とに分け、それぞれの問題で各学年における正答者数の割合を比較したところ、等積（対提示）において有意に中学生の正答率が高く（χ^2(1)=6.90, p<.01）、等周長（対提示）において中学生の正答率が小学生よりも高い傾向がみられた（χ^2(1)=3.71, p<.10）。また、各問に対する反応についてみると、等積変形課題では、「周長が大きい方が面積が大きい」とする判断は小学生の対提示の課題において多くみられた。しかし、中学生では正しい判断の方がそれを上回った。一方、等周長変形課題では、小学生、中学生とも「面積同じ」とする判断が最も多くみられた。

Table3　等積変形課題における選択肢ごとの解答者数（%）

	等積（対提示）			等積（連続性）	
選択肢	小学生（N=65）	中学生（N=73）	選択肢	小学生（N=65）	中学生（N=73）
1.　ア＞イ	2（ 3.1）	8（11.0）	2.　$\boxed{1}>\boxed{2}>\boxed{3}$	3（ 4.6）	4（ 5.5）
2.　ア＜イ	39（60.0）	23（31.5）	1.　$\boxed{1}<\boxed{2}<\boxed{3}$	21（32.3）	18（24.7）
3.　ア＝イ	<u>22（33.8）</u>	<u>41（56.2）</u>	3.　$\boxed{1}=\boxed{2}=\boxed{3}$	<u>39（60.0）</u>	<u>49（67.1）</u>
			4.　その他	1（ 1.5）	2（ 2.7）
N.A. 無答	2（ 3.1）	1（ 1.4）	N.A. 無答	1（ 1.5）	0（ 0.0）

数字は人数、（　）内は%を表す。下線部が正答。
対提示の課題では、周長はア＜イ、連続性の課題では周長は$\boxed{1}<\boxed{2}<\boxed{3}$である。

Table4　等周長変形課題における選択肢ごとの解答者数（%）

	等周長（連続性）			等周長（対提示）	
選択肢	小学生（N=65）	中学生（N=73）	選択肢	小学生（N=65）	中学生（N=73）
1.　ア＞イ＞ウ	<u>18（27.7）</u>	<u>29（39.7）</u>	1.　次郎くん＞花子さん	<u>12（18.5）</u>	<u>24（32.9）</u>
2.　ア＜イ＜ウ	9（13.8）	4（ 5.5）	2.　次郎くん＜花子さん	3（ 4.6）	5（ 6.8）
3.　ア＝イ＝ウ	36（55.4）	40（54.8）	3.　次郎くん＝花子さん	48（73.8）	42（57.5）
4.　その他	1（ 1.5）	0（ 0.0）			
N.A. 無答	1（ 1.5）	0（ 0.0）	N.A. 無答	2（ 3.1）	2（ 2.7）

数字は人数、（　）内は%を表す。下線部が正答。

4. 変形課題解決と「高さ」概念との関連

変形課題解決と「高さ」概念との関連について検討する。高さ課題の5問に完答した者を高さ完答者、それ以外（1問でも誤答した者）を非完答者として分類した。その結果、小学生では高さ完答者は23名（35.4%）、高さ非完答者は42名（64.6%）となり、中学生では高さ完答者は37名（50.7%）、非完答者は36名（49.3%）となった。

各変形課題について、学年間（小・中）で「高さ」概念（完答・非完答）と変形課題解決（正・誤）の連関が異なるかどうかを検定するために、AB、AC固定モデルによる3要因クロス表の検定（篠原、1989）を行ったところ（Table5）、等積（対提示）、等積（連続性）、等周長（対提示）において全体の比の差が有意であった（等積（対提示）：$\chi^2(2)=13.95$, $p<.01$, 等積（連続性）：$\chi^2(2)=7.43$, $p<.05$, 等周長（対提示）：$\chi^2(2)=8.30$, $p<.05$）。そこでさらに分析を進めた結果、等積（対提示）、等積（連続性）、等周長（対提示）において「高さ」概念と変形課題解決との間に有意な連関がみられ、高さ完答者の方が正答者数の割合が多いことが示された（等積（対提示）：$\chi^2(1)=12.94$, $p<.01$, 等積（連続性）：$\chi^2(1)=6.94$, $p<.01$, 等周長（対提示）：$\chi^2(1)=6.60$, $p<.05$）。交互作用（「高さ」概念と変形課題解決の連関の学年間の違い）は、いずれの課題においてもみられなかった。

Table5　各学年における「高さ」概念（完答・非完答）別の正答者数（%）

		等積変形課題		等周長変形課題	
		対提示	連続性	対提示	連続性
小学生（65名）	高さ完答（23名）	12（52.2）	18（78.3）	8（34.8）	7（30.4）
	高さ非完答（42名）	10（23.8）	21（50.0）	4（ 9.5）	11（26.2）
中学生（73名）	高さ完答（37名）	27（73.0）	28（75.7）	15（40.5）	19（51.4）
	高さ非完答（36名）	14（38.9）	21（58.3）	9（25.0）	10（27.8）

数字は人数、（　）内は%を表す。

5. 変形課題解決と定性的理解との関連

変形課題解決と公式に対する定性的理解との関連について検討する。まず、定性的理解の問題1、問題2の2問とも正答した者を定性的理解（高）群、それ以外（どちらか一方でも誤答した者）を定性的理解（低）群として分類した。その結果、小学生では定性的理解（高）群が26名（40.0%）、定性的理解（低）群が39名（60.0%）となり、中学生では定性的理解（高）群が34名（46.6%）、定性的理解（低）群が39名（53.4%）となった。

各変形課題について、学年間（小・中）で定性的理解（高・低）と変形課題解決（正・誤）の連関が異なるかどうかを検定するために、AB、AC固定モデルによる3要因クロス表の検定を行ったところ（Table6）、等積（対提示）、等積（連続性）において全体の比の差が有意であった（等積（対提示）：$\chi^2(2)=25.47$, $p<.01$, 等積（連続性）：$\chi^2(2)=21.31$, $p<.01$）。また、等周長（連続性）において全体の比の差が有意傾向であった（$\chi^2(2)=4.85$, $p<.10$）。そこでさらに分析を進めた結果、等積（対提示）、等積（連続性）において定性的理解と変形課題解決との間に有意な連関がみられ、定性的理解（高）群の方が正答者数の割合が多いことが示された（等積（対提示）：$\chi^2(1)=23.63$, $p<.01$、等積（連続性）：$\chi^2(1)=20.21$, $p<.01$）。また、等周長（連続性）では定性的理解と変形課題解決との間の連関が有意傾向であった（$\chi^2(1)=3.67$, $p<.10$）。交互作用（定性的理解と変形課題解決の連関の学年間の違い）は、いずれの課題においてもみられなかった。

Table6　各学年における定性的理解（高・低）別の正答者数（%）

		等積変形課題		等周長変形課題	
		対提示	連続性	対提示	連続性
小学生（65名）	定性（高）（26名）	14（53.8%）	23（88.5%）	6（23.1%）	8（30.8%）
	定性（低）（39名）	8（20.5%）	16（41.0%）	6（15.4%）	10（25.6%）
中学生（73名）	定性（高）（34名）	28（82.4%）	28（82.4%）	14（41.2%）	18（52.9%）
	定性（低）（39名）	13（33.3%）	21（53.8%）	10（25.6%）	11（28.2%）

数字は人数、（　）内は%を表す。

6. 変形課題解決と「高さ」概念、定性的理解との偏相関

変形課題解決には、「高さ」概念、定性的理解それぞれとの連関がみられたが、「高さ」概念と定性的理解は相互に影響を及ぼしあっている可能性がある。そこで、「高さ」概念と定性的理解のうち、どちらの方が変形課題遂行により関連が強いのかを調べるため、変形課題4問、高さ課題5問、定性的理解の問題2問の正答数をもとに、偏相関係数を算出した（Table7）。小学生では、「高さ」概念、定性的理解の偏相関係数の大きさは同程度であるが、中学生では定性的理解の偏相関係数の方が大きい。つまり、定性的理解の方が変形課題遂行に及ぼす影響が大きいことがうかがえる。

Table7　各学年における変形課題遂行との偏相関係数

	「高さ」概念	定性的理解
小学生の変形課題遂行	.219	.242
中学生の変形課題遂行	.246	.397

7. 結果の要約

本研究の結果より、以下のことが明らかとなった。①高さ課題、定性的理解の問題、変形課題の平均正答数は、小学生よりも中学生の方が多かった。②小中学生における変形課題解決と「高さ」概念および定性的理解との関連については、等積変形課題では対提示、連続性の課題とも、高さ完答者および定性的理解が高い者の方が正答者数の割合が多かった。しかし一方、③等周長変形課題では、そのような一貫した連関はみられず、対提示では高さ完答者の正答者数の割合が高く、連続性の課題では定性的理解が高い学習者の方が正答者数の割合が高い傾向にあるという結果であった。④特に小学生における等周長変形課題解決は、高さ完答者、定性的理解の高い者であっても正答率は3割程度と低かった。

考察

本研究における主たる検討項目は、小中学生における変形課題解決と「高さ」概念、定性的理解との関連についてであった。結果から、それらの関連は、等積変形課題と等周長変形課題とで異なる様相がみられた。以下、このことについて考察を進める。

等積変形課題（対提示、連続性）では、「高さ」概念および定性的理解が高い者の方が適切な課題解決の割合が多いことが示された。「高さ」概念は、底辺が所与の平行四辺形や三角形について高さを底辺に対して垂直に取れているかどうかで測定された。高さは底辺に対して垂直であるということの理解は、面積概念にとって重要であり、正しい求積のための必要条件である。一方、定性的理解は、底辺、高さの相対的な大小から面積の大小を定性的に把握できるかどうかによって測定された。本研究で使用された課題のように、課題図形に具体的な底辺、高さの数値がない状況では、図形の底辺や高さの大小から面積の大小を判断しなければならない。そのため、変形課題解決において、公式に対する定性的理解は適切な課題解決にとって重要である。本研究の結果から、これらの学習者の認知的要因が、等積変形課題解決において重要な役割を果たしていることが明らかとなった。ま

た、学年間の分析では、等積変形課題（対提示、連続性）において、中学生の正答率が小学生よりも高いことが示された。これは、結果1、2において示されたように、中学生の方が図形の高さを適切に取ることができるということ、また、公式に対する定性的理解が小学生よりも高いということが関係していると思われる。

しかし、等周長変形課題においては、高さ概念および定性的理解が高い者の方が正判断の割合が多いという結果は一貫しては得られなかった。また、学年間の分析においても差はほとんどみられず、正答率が低かった。なぜ、等周長変形課題ではそのような結果となったのであろうか。それは、等周長変形課題の持つ特質（外的要因）によるところが大きいと思われる。等周長変形課題は、連続性の課題では「同一の正方形枠を動かしてできる図形」の面積を比較させるものであり、また、対提示の課題では「14本のマッチ棒からできた図形」の面積を比較させるものであった。このような課題では、面積を判断する際には不適切な属性となる「同一の枠」「同数（14本）のマッチ棒」という特徴にとらわれやすくなる可能性がある。このことに関して、西林（1988）は、等周長変形課題において「面積同じ」と判断してしまう誤りは「同一枠を動かした」という保存概念を媒介として引き起こされると述べている。こうしたことから勘案すると、等周長変形課題解決の際、学習者の認知構造内では面積判断の際に重要となる「高さ」概念や定性的理解よりも、課題の特質によって引き起こされた別の不適切な概念（保存概念）の方がより活性化され、適切な概念の適用を妨害していると考えられる。等周長変形課題において、幾何学的平面図形の課題として課題解決が行われるためには、学習者の内的要因としての「高さ」概念や定性的理解の適用を促進させるのみならず、課題のもつ外的要因からの影響をも考慮しなければならないと思われる。すなわち、課題の持つ「同一の変形枠」「同数のマッチ棒」という属性によって学習者の不適切な概念が活性化されるのを抑制させる必要性である。学習者が課題解決にとって適切な概念や知識を保持していても、それらの課題への適用を妨害するような要因を抑制させなければ、適切な課題解決は難しいと思われる。

加えて、学年間での課題解決の違いについては、工藤（2005）との比較でとらえると、以下のようなことがうかがえる。工藤の研究では、公式の知識操作水準の高い大学生のうち、等周長変形課題（連続性）に対してヒントなしで正答できたのは約6割であった。一方、本研究で定性的理解（高）群に分けられた学習者のうち、等周長変形課題（連続性）に対して正答できたのは、中学生で約5割、小学生で約3割であった。この学年による正答率の差は何によるものなのか。推測される要因としては、等周長変形課題解決において、学年が上がり発達が進むにつれて、不適切な属性への着目がなされにくくなるということ、そしてそれに伴って、幾何学的平面図形の面積課題と同様に捉えられやすくなり、公式に対する定性的な理解を適用できるようになること、もしくは、公式に対する定性的理解が不適切な属性からの干渉を受けないほど確かなものになってくることが挙げられる。本研究の結果6から、小学生では「高さ」概念、定性的理解とも変形課題解決との関連は同程度であったのに対し、中学生では「高さ」概念よりも定性的理解の方が変形課題解決における説明力が大きいことがうかがえた。学年が上がるにつれて、公式に対する定性的理解が変形課題解決にとって重要な役割を果たすことが示唆される。このように、公式（ルール）の変数の定性的な関係操作ができるこ

とが適切な課題解決にとって重要となるということは、麻柄・岡田(2006)においても示されている。麻柄らは、大学生を対象に、「加速度＝力／質量」という力学の基本法則(公式)を題材にして、群ごとに、異なる種類の公式の操作を行わせた。すなわち、公式で用いられている変数に具体的な数値を代入して解を求めるという「数値操作」と、ある変数の値が大きく(小さく)なった場合に、他の変数の値がどうなるか等の変数間の定性的な関係を考えるという「関係操作」である。それぞれの群で操作を用いた練習問題をさせた後、標的問題を解かせた結果、「数値操作」によっては標的問題の解決は促進されないのに対して、「関係操作」を行わせると課題解決が促進される傾向があることが見出されたのである。このことからも、適切な課題解決促進のためには、定性的理解の援助は有効であると考えられる。ただし注意しなければならないのはそれは大学生の場合であるということである。小学生の場合、本研究の結果2において示されているように、思考操作そのものが難しいと考えられる。そのため、援助の際には、学習者側の発達を考慮して行わなければならない。

以上、変形課題解決と「高さ」概念、定性的理解との関連について考察してきたが、これらの関連は相関的なものである。厳密に因果的な関係を見出すには、実際に教授介入を行ってみる必要がある。したがって、「高さ」概念の形成や定性的理解の援助を行った際の変形課題解決についての検証は、今後の課題としたい。

【引用文献】

Fischbein, E. 1993 The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 139-162

細谷純　1976　課題解決のストラテジー 藤永保(編)　思考心理学　大日本図書　pp.136-156

工藤与志文　2005　概念的知識の適用可能性に及ぼす知識操作水準の影響―平行四辺形求積公式の場合―　教育心理学研究 , 53, 405-413

工藤与志文・白井秀明　1991　小学生の面積学習に及ぼす誤ルールの影響　教育心理学研究 , 39, 21-30

麻柄啓一・岡田いずみ　2006　公式の変数間の関係操作による課題解決の促進　日本教授学習心理学会第2回年会予稿集 , 20-21

文部科学省　1998　小学校学習指導要領

西林克彦　1988　面積判断における周長の影響―その実態と原因―　教育心理学研究 , 36, 120-128

小野寺淑行　1989　小学生における三角形の「高さ」概念の形成　熊本大学教育学部紀要 , 38, 235-249

高垣マユミ　2001　高さのプリコンセプションを変容させる教授ストラテジーの研究　教育心理学研究 , 49, 274-284

【付記】

本論文は、2006年度東北大学大学院教育学研究科に提出した修士論文の一部を再分析したものである。なお、中学生の結果については、日本教授学習心理学会第3回年会(2007)にて発表した。

【謝辞】

本論文を執筆するにあたり、丁寧なご指導を賜りました小野寺淑行先生に心から御礼申し上げます。そして、調査に協力してくださいました小学校、中学校の先生方ならびに児童、生徒の皆様に感謝いたします。

The effects of students' conception of height and qualitative understanding of the formula on estimating the area of different shapes

SATO, Seiko

(Graduate School of Education, Tohoku University)

This article investigates school children's misjudgment of the area. The misjudgment is that the area of the figure is same under the condition that the perimeter is identical, and another is that the area is larger under the condition that the perimeter is longer. The former error arises in the "same perimeter problem" that requires to compare the area of the transformed parallelogram with the original rectangle, while the latter arises in the "same area problem" that requires to compare the area of the rectangle with the parallelogram of which perimeter is longer than the rectangle and of which base and height are each equal to these of the rectangle. This study explored comparative judgment of the area made by elementary school students and junior high school students and the factors which affect appropriate judgment. As a result, many of those who had proper conception of height and qualitative understanding of the area formula solved the "same area problem" correctly, whereas they did not always solve "same perimeter problem" correctly. It is suggested that the origin of the misjudgment in this problem lies in the fact that primitive naive conception of conservation is more active than the area formula during problem solving.

Key words : estimating the area of different shapes, conception of height, qualitative understanding of the formula, school children