図形の拡大場面における中学生の面積判断

―面積変化を具現化する教授の効果―

佐　藤　誠　子

図形を拡大すると相似な図形が生成される。相似図形の面積に対しては、図形の種類にかかわらず「図形をｋ倍すると面積は k^2 倍になる」というルール（2乗倍ルール）の適用が求められる。そのためには、敷きつめも公式計算もできない不規則図形に対しても面積変化の見通しが立てられることが重要となる。本研究では、それを敷きつめの考えによって達成させるため、図形内部に敷きつめる単位を極小のビーズに置き換え、その計数によって面積量を比較させる教授方略を提案した。中学生を対象にこの方略の効果を検証した結果、規則図形、不規則図形のいずれにおいても2乗倍ルールに基づいた判断の割合は低く、むしろ「図形をｋ倍にしたら面積もｋ倍になる」とする比例的推論がなお多くみられた。実験により得られた結果から、より効果的な2乗倍ルールの学習段階について考察がなされ、今後詳細なプロセスを追うことの必要性が示された。

キーワード：面積判断、具現化、相似比と面積比、乗法性、中学１年生

問題と目的

面積の持つ性質には、互いに直交する縦の距離と横の距離の積で決まるという乗法性（堀部, 1971；大津, 1981, 1982）がある。このことは、どのような図形の面積にも成り立つ大きなルールとして存在しているにもかかわらず、学習者にとってしばしば意識されていない。そのことは図形の拡大・縮小場面における面積判断課題においてより明瞭になる。図形を拡大（縮小）すると、相似な図形が生成される。相似図形の面積については、「図形をｋ倍すると面積は k^2 倍になる」というルール（2乗倍ルールと呼称）が成り立つ。このルールは、面積の乗法性から導かれるものであり、平面上のどのような図形の面積にも成り立つ。しかし、拡大図形の面積について、「図形をｋ倍拡大したら、面積もｋ倍になる」とする誤判断がみられることが De Bock, Verschaffel, and Jassens（1998）, De Bock, Verschaffel, and Jassens（2002）, De Bock, Verschaffel, Jassens, Van Dooren, and Claes（2003）, Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, and Verschaffel（2004）などによって明らかになっている。これらの研究では、上記のような誤判断は「どんな量の関係も一方がｋ倍になると他方もｋ倍になる」とする線型ルールに起因すると想定し、この面積誤判断の修正を試みている。例えば、

教育学研究科　博士課程後期

7年生を対象としたDe Bock, et al.（1998）の研究では課題解決時に拡大図形を描かせることの効果を、7年生と10年生を対象としたDe Bock, et al.（2002）の研究では、図の提示と、課題解決時のメタ認知的足場の提示（面積について問うテストの前に、立方体の1辺の長さの比と重さの比の関係に関する非線型的な事象を扱った導入課題を提示した）の効果を検証している。しかしその結果は、正方形問題の正答率をみると、De Bock, et al.（1998）では図を描かせた群では6％、また、De Bock, et al.（2002）では、図と認知的足場の両方の提示があった群でも、7年生では24％、10年生では60％と、いずれも高い正答率とはいえず処遇の効果は小さかった。

このように、単に問題解決時に、図を提示したり描かせたり問題表象の形成を促したりするだけでは、拡大図形の面積判断の誤りは容易には克服されないことが明らかになっている。拡大図形の面積に対して、2乗倍ルールに基づいた判断を促進させるには、そもそも適切概念である面積の乗法性について理解させなければならないであろう。佐藤（2009）では、そのような乗法性に着目させる援助を行った。具体的には、大学生を対象に、拡大図形の面積について長方形と三角形を例に、拡大前の図形（基準図形）を拡大後の図形にk^2個敷きつめて2乗倍ルールを示す方法（図形操作）と、求積公式（「面積＝縦×横」）の変数の操作から面積がk^2倍になることを示す方法（公式操作）の効果を検証した。事前テスト誤答者を対象に分析した結果、公式操作によってルールを提示された群の方が、図形操作によって提示された群よりも不規則図形の縮小場面の面積判断課題における正答率が高いことが示された。しかしながら、公式操作群でもその正答率は6割程度であり、2乗倍ルール適用に対する学習者の納得度をより高める必要のあることが示唆された。

では、そのためには、どのような援助方略が考えられるであろうか。De Bock, et al.（1998）によると、拡大正方形の面積変化の推論について、主に3種類の方略がみられる。それは、⑴拡大した正方形の中に拡大前の小さな正方形を敷きつめること、⑵拡大前・拡大後の面積について、公式を使って面積を計算し比較すること、⑶「辺の長さをk倍すると面積はk^2倍になる」という一般的ルールを直接適用することである。De Bock, et al.（1998）では、正答した9割の学習者が⑵の方略を使用し、⑴や⑶の方略を適用した者は少なかった。ところで、正方形の面積判断では上記のいずれの方略によっても解決できるのに対し、不規則図形の面積判断では、基準図形による敷きつめも公式計算も不可能である。そのため、不規則図形では⑶のように、基準図形を敷きつめられない図形や公式が存在しない図形でも2乗倍ルールが成り立つとする外挿的な推論が求められる。しかし、ルール適用の際、特に具体的操作期の段階にある学習者は、具体的な図形の特徴（敷きつめ可・不可／公式あり・なし）に左右されてしまいやすいと考えられる。ルール適用に関わるこの困難をどのようにして乗り越えさせることができるだろうか。

2乗倍ルールがどのような図形の面積にも成り立つということを理解するには、その学習において、不規則図形であっても面積変化の見通しが立てられることが重要となる。ところで上記の方略のうち、そもそも敷きつめは“容易で、直観的である”が、“文脈に縛られる（context-bound）”（De Bock, et al., 1998）方法であり、拡大図形の中に基準図形をぴったりと敷きつめられるような図形でしか説明できない。しかし、図形の中に敷きつめる単位をどのような図形にも敷きつめ可能な極小

の物質（ビーズなど）に置き換えれば、敷きつめの考え方によって拡大図形の面積を説明することが可能となる。そこで本研究では、敷きつめの考えを中心とした教授活動によって、図形の拡大と面積変化の関係について理解させることを目標とする。上記のように、面積を具体的な物質（ビーズ）に変換し、拡大図形の面積変化を具現化するための方略を「面積の粒子置き換え」と呼ぶこととする。この方略の利点は、操作が容易であることや、ビーズの流動性のためにどのような図形にも敷きつめられることに加え、図形内の縦方向と横方向にビーズがそれぞれk倍個敷きつめられるのが視覚的に把握できることである。このことは、面積の縦方向と横方向の変化を強調するであろう。そして、拡大前と拡大後の図形それぞれに敷きつめられたビーズの個数を数えると、拡大後の図形に敷きつめられたビーズの個数は拡大前のビーズの個数の2乗倍になっていることがわかる。これは学習者にとって、拡大図形の面積がk^2倍になることを確認するための方法として位置づけられるであろう。なお、こうした「面積の粒子置き換え」方略の効果を最大限に引き出すには、学習の際に用いる図形を規則図形にする必要がある。規則図形は公式計算で面積変化を確かめられる。そのため、規則図形内に敷きつめたビーズの個数に誤差が生じていても、それが2乗倍ルールに基づく結果と近似するところの誤差であることが認識されれば、「面積の粒子置き換え」方略で面積変化を推測できることの妥当性が高まる。そうして、どのような図形でも、ビーズの敷きつめによって面積変化を確かめることができるという確証が得られることによって、面積変化の見通しが立てられると思われる。

したがって、本研究の目的は、「面積の粒子置き換え」方略によって拡大図形の面積変化を捉え、公式計算によってそれを確かめさせることが、2乗倍ルールの適用範囲を不規則図形まで拡張させるかどうかを検討することである。本研究では、基本的な平面図形の求積公式について学習済みであり、かつ具体的操作期から形式的操作期の移行期にあると思われる中学生を対象に検証を行う。

方法

1. 学習者

東北地方の県庁所在地の公立A中学校1年生2クラス54名が、筆者の依頼により本研究の対象者となった。

2. 手続き

事前テスト、学習セッション（授業）、直後テスト、事後テストからなる。事後テストは一連の授業が終了した一週間後に実施された。なお、一連の授業およびテストは、実験協力校の数学担当教師によって実施された。

3. 事前テストの課題構成

<u>公式再生課題</u>　長方形、平行四辺形、三角形、円、台形の面積を求める公式を書かせた。

<u>拡大コピーの意味の説明</u>　「ん」という文字を2倍に拡大コピーすると、対応するところの「長さ」が

2倍になることを説明した文章を読ませた。

不規則図形(女の子)拡大課題　商店街での買い物セールのポスターと看板を製作する状況で、看板の絵はポスターの「女の子」の下絵を3倍に拡大コピーしたものを使うと設定し、それぞれ絵を提示した。ポスターの「女の子」の身長は50cm、看板の「女の子」の身長は150cmであることを示した(Figure 1)。ポスターの「女の子」の下絵に色を塗るために必要なペンキの量が10ml のとき、看板の「女の子」の下絵に色を塗るために必要なペンキの量について問うた。その際、以下の質問を課した。

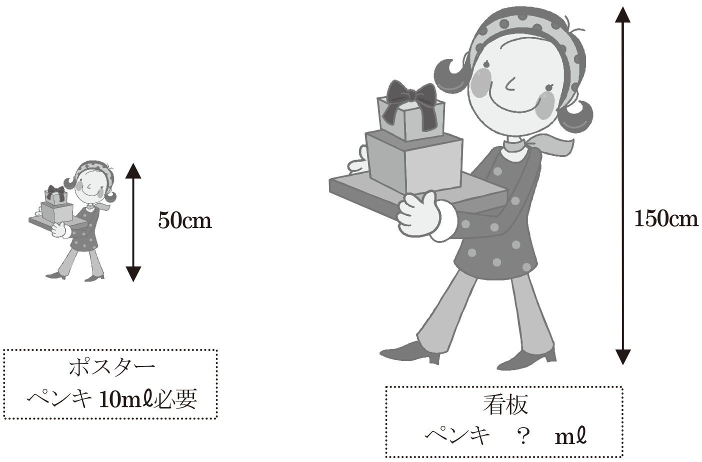


Figure 1　不規則図形(女の子)拡大課題において提示された図

質問1:問題文に書いてある情報を使って、看板に使うペンキの量が求められるかどうかを2択(1. 求められると思う/2. 求められないと思う)で問うた。

質問2:質問1で「1」を選択した者に対しては、看板に使うペンキの量は何 ml 必要か、理由とともに記入させた。他方、質問1で「2」を選択した者に対しては、どうして求められないと思ったのかについて理由を記入させた。

4. 学習セッションの課題構成

学習セッションでは、両群ともに、Figure 2のようなもとの図形とそれを拡大した図形が描かれてあるプリントを配布した。学習セッションで要した時間数は、面積量変換群は3時間、公式群は2時間であった。

<面積量変換群>(2009年9月16、17、18日実施)

⑴拡大コピーの意味の確認

船の絵(長方形と五角形の複合図形;Figure 2)を提示し、「300%に拡大コピーするとはどういうことか」を問うた。辺の「長さ」が300% (3倍)になるということを示した。

⑵図形を300％に拡大コピーしたときの面積変化の予想

船の絵を300％に拡大コピーすると、船の面積は何倍になるかを予想させた。また、どのような方法で面積が何倍になるかを確かめたらよいかを考えさせた。

⑶面積変化の確かめ

⑵で生徒から提出された面積変化の確認方法と「面積の粒子置き換え」方略を用いて、300％に拡大コピーした後の船の絵の面積は何倍になるのかを求めさせた。「面積の粒子置き換え」方略の導入は、「五角形は、拡大前の図形を、300％に拡大後の図形に敷きつめようとしても、ぴったりと敷きつめられない」ことを黒板上で実際に図形を動かして説明した上で、「どのような図形にも敷きつめることができる方法」として紹介する形で行われた。生徒5～6人からなるグループ単位で、Figure 2と同じ大小の五角形それぞれに立体の高さを付与した容積装置と直径6㎜の丸ビーズ140個を配布し、それぞれの五角形の容積装置にビーズを敷きつめさせ、その個数を数えさせた。五角形の寸法は（Figure 2）、AB＝0.4㎝、CD＝1.7㎝、EF＝0.9㎝、FG＝1.7㎝、GA＝0.6㎝、CG＝DF＝1.6㎝（300％に拡大コピー後は、それらの寸法の3倍）であった。なお、実際に小さい五角形の容積装置にはビーズ12個が敷きつめられ、大きい方には108個敷きつめられることとなる。この結果から、108÷12＝9で拡大図形の面積が9倍になるということを示した。なお、大きい五角形に敷きつめられたビーズの個数が108個にならないときは、ビーズは球状であるために実際はその個数に多少の違いが生じてしまうということを説明した。

⑷図形の拡大と面積変化についてのまとめ

最後に、300％に拡大コピーした船の絵の面積は9倍になることを確認し、「縦の長さも3倍、横の長さも3倍しているから、面積は9倍になる」とまとめた。その際、公式そのものについては触れなかった。

＜公式群＞（2009年9月16、17日実施）

⑴拡大コピーの意味の確認

面積量変換群と同じである。

⑵図形を300％に拡大コピーしたときの面積変化の予想

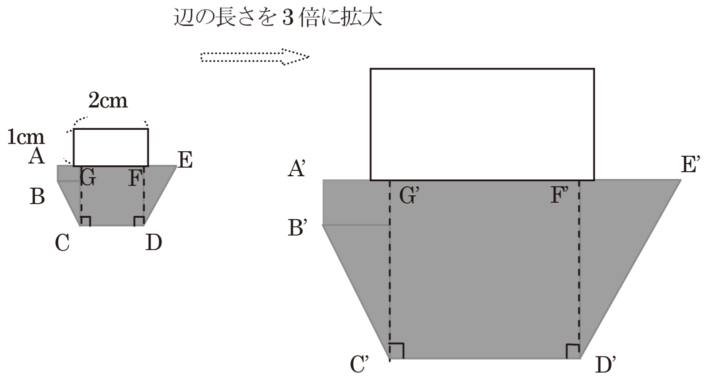
面積量変換群と同じである。

⑶面積変化の確かめ

それぞれ、拡大前と拡大後の船の絵の長さを測り、図形を分割して面積を求めさせた（計算の際は電卓を使わせた）。なお、公式群の五角形の部分の寸法は、面積量変換群で用いた五角形の寸法とはやや異なっている。ただし、面積量変換群と同様、㎜単位の長さになるように（㎝単位で測ると小数が生じるように）長さを設定した。五角形の寸法は（Figure2）、AB＝1.0㎝、CD＝2.3㎝、EF＝0.6㎝、FG＝2.3㎝、GA＝0.6㎝、CG＝DF＝1.5㎝（300％に拡大コピー後は、それらの寸法の3倍）であった。

⑷図形の拡大と面積変化についてのまとめ

面積量変換群と同じである。



※便宜上，A〜G（A'〜G'）の記号と点線および長さを記入しているが，実際の学習プリントではこれらの記号，点線および長さは記入されていない。

Figure 2　学習セッションで使用した船の絵（複合図形）

5. 直後テストの課題構成

不規則図形（ボート）拡大課題　曲線で構成された図形であるボートの絵（Figure 3）を提示し、その絵を5倍に拡大コピーしたらその図形の面積は拡大前の図形の面積の何倍になるかわかるかどうかを2択（この図形でもわかると思う／この図形ではわからないと思う）で問うた。また、そう判断した理由も書かせた。

不規則図形（女の子）拡大課題　事前テストの課題と同一である。

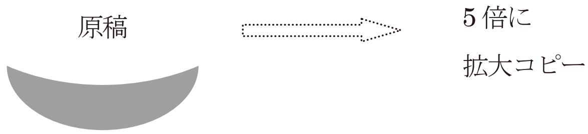


Figure 3　直後テスト不規則図形（ボート）の図形

6. 事後テストの課題構成

拡大コピーの意味の説明　事前テストと同様である。

問1（不規則図形：りす形）「太郎くん」が砂絵を作る状況を設定した。りすの絵が描かれたものを下絵として、それを4倍に拡大コピーしたものを「大きい砂絵」、拡大する前を「小さい砂絵」として示した。ただし、「大きい砂絵」の図は視覚による判断を防ぐために提示しなかった（Figure 4）。「小さい砂絵」を作るのにボウル1杯分の砂を使ったとき、「大きい砂絵」を作るのに必要な砂の量はいくらになるかを問うた（6択：1. ボウル4杯分の砂が必要だ／2. ボウル8杯分／3. ボウル12杯分／4. ボウル16杯分／5. ボウル何杯の砂が必要か、これだけではわからない／6. その他（自由記述））。またその判断理由も記入させた。

問2（台形）　下底の長さ（5㎝）が太線で示された面積10㎠の不等脚台形を6倍に拡大コピーする前（台形ア）と後（台形イ）について、⑴台形イの太線の長さは何㎝になるか記入させた。⑵台形イの面積はいくらになるか6択で問うた（1. 面積は60㎠だ／2. 面積は120㎠だ／3. 面積は300㎠だ／4. 面積は360㎠だ／5. 面積はいくらになるか、これだけではわからない／6. その他（自由記述））。またその判断理由も記入させた。なお、図は台形アのみ提示した（Figure 4）。

問3（平行四辺形）　図形内に底辺と平行な線分（2㎝）が点線で示された面積10㎠の平行四辺形を3倍に拡大コピーする前（平行四辺形ア）と後（平行四辺形イ）について、⑴平行四辺形イの点線の長さは何㎝になるか記入させた。⑵平行四辺形イの面積はいくらになるか6択で問うた（1. 面積は30㎠だ／2. 面積は60㎠だ／3. 面積は90㎠だ／4. 面積は120㎠だ／5. 面積はいくらになるか、これだけではわからない／6. その他（自由記述））。またその判断理由も記入させた。なお、図は平行四辺形アのみ提示した（Figure 4）。

問4（チーズケーキ問題）　直径12㎝の円形チーズケーキが3人で食べるのにちょうどよい分量だとすると、高さが同じ直径24㎝の円形チーズケーキは、何人で食べるのがちょうどよい分量なのかを問うた。なお、それぞれの円形チーズケーキを図で示した。

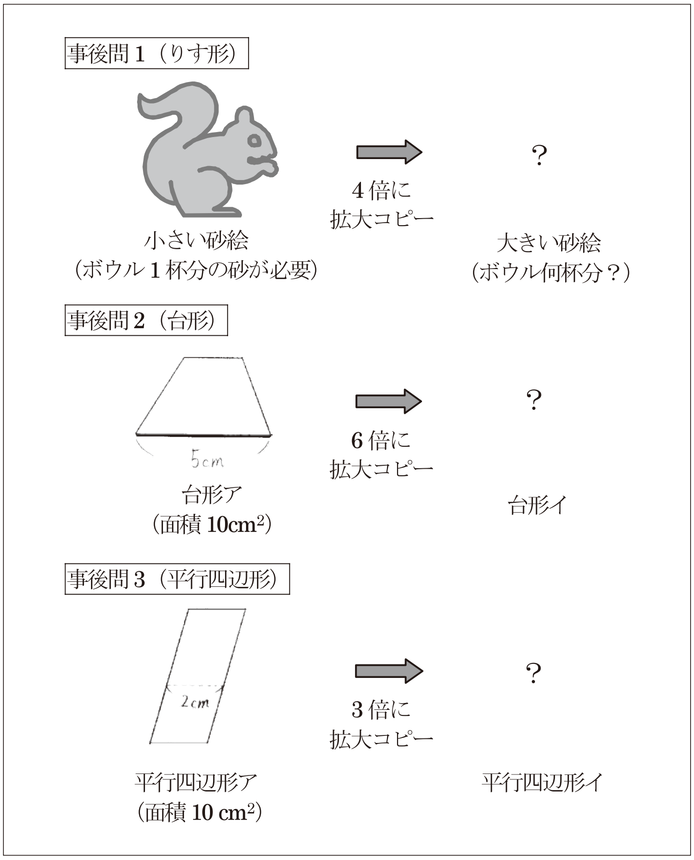


Figure 4　事後テスト問1、問2、問3の提示図形

結果

事前テスト、学習セッション、直後テスト、事後テストのうちいずれか1つでも欠席があった者および不備のあった者を分析から除外した。その結果、分析対象者は面積量変換群25名、公式群25名となった。

0. 授業

面積量変換群では、「面積変化の確かめ」において生徒から提出された面積変化の確認方法と「面積の粒子置き換え」方略を用いて、300%に拡大コピーした後の船の絵の面積は何倍になるのかを求めさせた。このとき生徒側から提出された面積変化の確認方法は、(a)長さを測り、図形を分割して面積を求める方法、(b)長さと面積の関係について正方形に置き換えて考える方法であった。なお(b)は、正方形の1辺の長さが1cm、2cm、3cm、…6cmになると面積は1cm²、4cm²、9cm²、…36cm²になるということを表にまとめた上で、辺の長さが3倍になると面積は9倍になることを確認するというものであった。また、「面積の粒子置き換え」方略を用いて面積を確認させた際、どの班でも小さい五角形には12個のビーズが敷きつめられた。一方、大きい五角形の方にビーズが108個敷きつめられた班は2班であり、他の3班が敷きつめた個数はそれぞれ101個、102個、110個であった。

1. 各課題の解答結果

1. 1　事前テスト

<u>公式再生課題</u>　適切に公式を再生できた者は、長方形では面積量変換群23名(92.0%)、公式群21名(84.0%)、平行四辺形では面積量変換群13名(52.0%)、公式群14名(56.0%)、三角形では面積量変換群16名(64.0%)、公式群17名(68.0%)[1]、円では面積量変換群18名(72.0%)、公式群18名(72.0%)、台形では面積量変換群9名(36.0%)、公式群10名(40.0%)であった。これら群間における適切解答率の差は有意ではなかった。2群の事前状態はほぼ同じとみなすことができる。

<u>不規則図形(女の子)拡大課題</u>　3倍に拡大コピーした後の絵に必要なペンキの量は求められるか否か(質問1)について、「求められる」と答えた者は、面積量変換群、公式群ともに21名(84.0%)であった。そのうち、必要なペンキの量(質問2)について、「90ml」と正しく答えた者は公式群1名のみであり、「30ml」と比例的推論に基づいた判断が最も多かった(面積量変換群18名、公式群19名、Table 1)。また、質問1で「求められない」と答えた者(面積量変換群、公式群ともに4名)に対して、どうして求められないか(質問2)を問うた結果、「3倍したとき30mlにはなるとは限らないと思う」などと、面積は3倍になっていないと判断した者が4名、「面積がわからないといけないが横の長さがわからない」と、横の長さがわからないから面積がわからないと判断した者が3名、「ポスターと看板では質が違う」と答えた者が1名であった。

Table 1　事前不規則図形（女の子）拡大課題の解答

群＼解答（必要なペンキの量は）	90ml	30ml	その他	（求められない）
面積量変換群（25名）	0	18	3	4
公式群（25名）	1	19	1	4
計	1	37	4	8

数字は人数。正答は「90ml」。

1．2　直後テスト

<u>不規則図形（ボート）拡大課題</u>　曲線で構成された図形（ボートの絵）を5倍に拡大コピーしたらその図形の面積は拡大前の図形の面積の何倍になるかわかるかどうかを問うたところ、「求められる」と判断した者は面積量変換群11名（44.0%）、公式群14名（56.0%）であり、比の差は有意ではなかった。また、「求められる」と答えた者の判断理由について、「25倍になる」と具体的数値まで答えた者は、面積量変換群1名、公式群8名であった。一方、「求められない」と答えた者の判断理由について、「何cmか書いていない」と測定が不可であることに言及した者は、面積量変換群5名、公式群5名、図形が曲線で構成されていることに言及した者は、面積量変換群5名、公式群2名（うち、1名が測定不可にも言及）であった。

<u>不規則図形（女の子）拡大課題</u>　3倍に拡大コピーした後の絵に必要なペンキの量を求められるか否か（質問1）について、「求められる」と答えた者は、面積量変換群25名（100%）、公式群21名（84.0%）であった。そのうち、必要なペンキの量（質問2）について、「90ml」と正しく答えたものは面積量変換群5名、公式群9名と少なかった。一方、「30ml」と比例的推論に基づいた判断した者は、面積量変換群15名、公式群10名と依然として多かった（Table 2）。

Table 2　直後不規則図形（女の子）拡大課題の解答

群＼解答（必要なペンキの量は）	90ml	30ml	その他	（求められない・無答）
面積量変換群（25名）	5	15	5	0
公式群（25名）	9	10	2	4
計	14	25	7	4

数字は人数。正答は「90ml」。

1．3　事後テスト

問1、2、3の解答は選択式によるものであったが、それぞれの解答カテゴリーを、「2乗倍ルール」（「図形をk倍したら面積量はk^2倍になる」という判断）、「比例的推論」（「図形をk倍したら面積量もk倍になる」という判断）、「その他」（いずれにもあてはまらない判断）、「求められない」（「問題中に書かれている情報だけでは求められない」という判断）に分類した上で分析を行った。

問1（不規則図形：りす形）の結果をTable 3に示す。各群において、2乗倍ルールによる判断、比例的推論、他解答（「その他」と「求められない」を統合）の割合について比の差の検定を行ったところ、有意差が認められた（$\chi^2(2) = 6.56$、$p < .05$）。残差分析の結果、面積量変換群で比例的推論の割合が高く（調整済み残差＋2.3）、公式群で他解答の割合が高かった（調整済み残差＋2.0）。

Table 3　各群における事後問1（不規則図形）の解答

群＼解答	2乗倍ルール「16杯分」	比例的推論「4杯分」	その他	求められない
面積量変換群（25名）	7（28.0）	17（68.0）	1（ 4.0）	0（ 0.0）
公式群（25名）	10（40.0）	9（36.0）	3（12.0）	3（12.0）
計	17（34.0）	26（52.0）	4（ 8.0）	3（ 6.0）

数字は人数、（　）内は％を表す。

次に、問2（台形）、問3（平行四辺形）の結果を記す。これらの課題では、長さと面積の双方の判断を問うた。そのため、長さ判断で「k倍に拡大したら長さはk倍になる」と適切に判断した者を「比例判断」、そうでない者を「非比例判断」と分類した上で分析を行った。結果はTable 4の通りである。長さ判断を適切に行った者を対象に、2乗倍ルールによる判断、比例的推論、他解答（「その他」と「求められない・無答」）の割合について、比の差の検定を行ったところ、いずれの課題においても群間に有意な差は認められなかった。

問4（チーズケーキ問題）の結果については、2乗倍ルールを適用し「12人用」と正答した者は公式群の2名のみであり、比例的推論である「6人用」との解答をした者は、面積量変換群19名、公式群13名とともに多かった。このチーズケーキ問題は、2乗倍ルールを適用することで解決可能な問題であるが、その正答率は、面積量を直接問う問2、問3よりも極端に低かった。そこで、台形（問2）との問題間で解答の偏りの違いをみる。台形と比較するのは、求積公式が存在するが基準図形を拡大図形内に敷きつめられない図形であるという点で、円と共通する特徴をもつためである。群を統合し、解答を「2乗倍ルール」「比例的推論」「他解答」に分類し問題間の解答の違いを検討したところ（Table 5）、チーズケーキ問題では台形よりも「比例的推論」の解答が多く、「2乗倍ルール」の解答が少ないことが示された（$CR = 3.36$、$p < .01$）。

Table 4　各群における事後問2（台形）および問3（平行四辺形）の解答

事後問2（台形）

群＼解答	長さ＼面積	2乗倍ルール「360㎠」	比例的推論「60㎠」	その他	求められない・無答	計
面積量変換群	比例判断	3	9	4	6	22
（25名）	非比例判断	2	1	0	0	3
公式群	比例判断	6	7	3	5	21
（25名）	非比例判断	1	2	1	0	4

事後問3（平行四辺形）

群＼解答	長さ＼面積	2乗倍ルール「90㎠」	比例的推論「30㎠」	その他	求められない・無答	計
面積量変換群	比例判断	4	12	3	3	22
（25名）	非比例判断	2	0	0	1	3
公式群	比例判断	7	5	4	3	19
（25名）	非比例判断	2	4	0	0	6

数字は人数。下線部が適切解答。

Table 5　事後台形とチーズケーキ問題の問題間分析

台形＼チーズケーキ問題	2乗倍ルール	比例的推論	他解答	計
2乗倍ルール	2	8	2	12
比例的推論	0	15	4	19
他解答	0	9	10	19
計	2	32	16	50

数字は人数。

2. 解答パターン別分析

以上の結果の分析は、事前テストでの解答を考慮していないものである。事前テストでは、「図形をk倍すると面積もk倍になる」という比例的推論が最も多くみられた。その一方で、事前の段階でそのような判断を行わず「単に3倍になっているとは思えない、横の長さがわからないから面積もわからない」というように、（面積は）求められないと反応するものもみられた。前者は、拡大図形の面積に対する線型ルールの過剰適用、後者は単純にそれに線型ルールを適用することへの懸念とみなすことができる。このように単に「2乗倍ルールを適用できない誤り」といっても質が異なる。ここでは、それら事前の解答の違いによって、事後テストの解答の様相が異なるかどうかについて探索的に検討する。その際、まず事前、直後、事後とも課題として提示されていた不規則図形についての面積判断パターンをみることとする。そして、それらのパターン別に、事後テストの規則図形（台形、平行四辺形）に対する解答の様相を検討する。

2. 1　不規則図形の面積判断パターン分類

不規則図形に対する面積判断について、事前（女の子）、直後（女の子）、事後（りす形）の解答パターンは以下の通りとなった（Table 6）。

まず、事前、直後、事後とも一貫して比例的推論を行った者をパターンL（Linear：比例）と記述した。そのような学習者は、面積量変換群14名、公式群8名であった。それに対し、事前で比例的推論を行ったが事後で「求められない」との判断に変容した者をパターンNL（non-Linear：非比例）と記述した。そのような学習者は公式群の2名のみであった。そして、事前で比例的推論を行ったが事後に2乗倍ルールを適用した者をパターンC（Change：変容）として記述した。そのような学習者は、面積量変換群3名、公式群6名であった。また、比例的推論から直後テストで2乗倍ルール適用に変容したものの事後では2乗倍ルールを適用しなかった者はパターンC’として記述した。そのような学習者は、面積量変換群2名、公式群3名であった。以上は事前で比例的推論を行った者のパターンであり（面積量変換群1名を除く）、事後テストにおける解答の様相が複数あることが示された。それに対し、事前の段階で比例的推論ではなく「求められない」と判断した者は全員、事後で2乗倍ルールを適用していた。この反応を示した学習者をパターンA（Application：適用）として記述した。そのような学習者は面積量変換群、公式群ともに4名であった。

2. 2　パターン別事後テスト解答

上記のパターン別に、事後テスト問2（台形）、問3（平行四辺形）の結果を分析する。ここでは特に、

一貫して比例的推論を行い変容がみられなかったパターン L、比例的推論から2乗倍ルール適用への変容がみられたパターン C、事前で比例的推論を行わず事後で2乗倍ルール適用に至ったパターン A を取り上げる。なお、ここではパターン別に他の図形に対する解答の様相をみるのが目的であること、また群差もみられないことから、以下の分析では群を統合した結果を示す。

パターン別の解答結果は Table 7の通りである。まず、パターン L の学習者については、台形、平行四辺形でも「長さ」と「面積」の両方に対して比例的推論を行っている者が多いことがうかがえる。一方、パターン C の学習者については台形、平行四辺形とも、5名が面積判断で2乗倍ルールに基づいた適切な判断を行っているが、そのうち3名が長さ判断で比例判断を行っていない。それに対し、パターン A の学習者は、面積判断で2乗倍ルールに基づき適切な判断を行った者のほとんどが、長さ判断でも適切な判断（比例判断）を行っていることがうかがえる。このことから、適切解答者（「長さ」「面積」の双方に正答した者）は、パターン C （9名）では台形、平行四辺形とも2名（22.2%）に過ぎなかったのに対し、パターン A （8名）では、台形4名（50.0%）、平行四辺形5名（62.5%）と、パターン C よりも高い割合で存在していることがわかる。これらの結果から、事前テストにおける判断の違いによって、2乗倍ルールの学習結果が異なることが示唆される。

Table 6　不規則図形の面積判断パターン

群	事前（女の子）	直後（女の子）	事後（りす形）	合計	パターン
面積量変換群	比例的推論	比例的推論	比例的推論	14名	L（比例）
		2乗倍ルール	比例的推論	1名	C’
			その他	1名	C’
		その他	2乗倍ルール	2名	C（変容）
	求められない	比例的推論	2乗倍ルール	1名	A（適用）
		2乗倍ルール	2乗倍ルール	3名	A
	その他	その他	比例的推論	2名	その他
			2乗倍ルール	1名	C
公式群	比例的推論	比例的推論	比例的推論	8名	L
			2乗倍ルール	2名	C
		2乗倍ルール	比例的推論	1名	C’
			2乗倍ルール	3名	C
			その他	2名	C’
		求められない・無答	求められない	2名	NL（非比例）
		その他	2乗倍ルール	1名	C
	2乗倍ルール	2乗倍ルール	求められない	1名	その他*
	求められない	2乗倍ルール	2乗倍ルール	2名	A
		求められない・無答	2乗倍ルール	2名	A
	その他	その他	その他	1名	その他

L（比例）：一貫して比例的推論を行った者、NL（非比例）：事前で比例的推論を行ったが事後で「求められない」と判断した者、C（変容）：事前で比例的推論（もしくは「その他」の解答）を行ったが事後に2乗倍ルール適用に変容した者、C’：直後にのみ2乗倍ルールを適用した者（事後では適用していない）、A（適用）：事前で「求められない」と判断し事後に2乗倍ルールを適用した者、その他：それ以外のパターン（* は事前で2乗倍ルールを適用していた者）

Table 7　各パターンにおける事後問2（台形）および問3（平行四辺形）の解答

事後問2（台形）

パターン	長さ判断＼面積判断	2乗倍	比例	その他	求められない・無答	計
L（比例）	比例	1	11	3	5	20
	非比例	0	2	0	0	2
C（変容）	比例	2	2	0	0	4
	非比例	3	1	1	0	5
A（適用）	比例	4	0	2	2	8
	非比例	0	0	0	0	0

事後問3（平行四辺形）

パターン	長さ判断＼面積判断	2乗倍	比例	その他	求められない・無答	計
L（比例）	比例	1	13	3	2	19
	非比例	0	2	0	1	3
C（変容）	比例	2	1	1	0	4
	非比例	3	2	0	0	5
A（適用）	比例	5	0	1	1	7
	非比例	1	0	0	0	1

数字は人数。下線部が適切解答。

考察

事後テストの結果から、公式計算方略に対する「面積の粒子置き換え」方略の効果の優位性はみられなかった。しかしながら、中学生における拡大図形の面積判断と2乗倍ルール適用について特筆すべきことがみられた。以下、これらの点について考察を進める。

本研究の処遇の効果について　まず、本研究の処遇の効果について考察する。面積量変換群の学習セッションでは、公式計算をし、ビーズを敷きつめて面積を比べ、また授業の流れから正方形に置き換えて面積比を考えるなど、複数の方法によって面積比を算出する活動が行われた。にもかかわらず、事後テストのいずれの課題においても公式群以上の効果はみられなかった。この原因として、ビーズの敷きつめが、学習者にとっては単なる「現前の図形の面積を比較するための一つの方法」に過ぎず、他のどのような図形に対しても見通しを立てられる方略であるという理解までには至っていなかったことが考えられる。それは、2乗倍ルールの学習において次のような問題点があったためと想定される。

まず1点目として、ビーズの敷きつめの際に縦と横への拡がりに着目させる教示がなかったことである。学習セッションにおいてビーズの敷きつめの活動を行ったのは五角形の部分であるが、五角形では、公式が適用可能な図形に分割し求積することで面積比を算出できる。一方、ビーズの敷きつめは、物理量であるために誤差が生じる。その点で、五角形では、ビーズの敷きつめよりも公式計算の方が面積比算出における信頼性が高い。ここで、ビーズの敷きつめによる面積比の確認方法の有効性を認識させるには、ビーズの敷きつめを行わせる際に、縦方向、横方向への敷きつめ個数の変化に注目させる必要がある。そもそも敷きつめによる面積比算出は、拡大図形内に基準図形

を敷きつめその個数を数えることによって行われるが、その際、縦方向にも横方向にも同じ倍だけ拡がっていることが視覚的に把握可能である。このことは、面積が直交する縦方向、横方向の2次元に拡がる量であることを具体的に示すものとなる。しかし、授業や学習セッションのプリントではそのことに対して特に注意を向けさせていなかった。縦、横の拡がりに着目させることなく、ビーズの敷きつめを、面積比を算出するためのものとしてのみ位置づけるならば、「面積比を確かめる方法」という点で機能的に公式計算と同じである。そのため面積量変換群では、面積比を算出する方法が複数提示されたという格好になり、学習者はそのうち自身にとって信頼性の高い方略（公式計算）を採用したために、事後テスト遂行において公式群との差がみられなかったと考えられる。

2点目は、上記のこととも関連するが、「図形をk倍に拡大すると、面積はk^2倍になる」という2乗倍ルールを命題の形では特に明示しなかったため、結果的に2乗倍ルールの学習が帰納的に行われたことである。これでは、学習者にとって、「面積の粒子置き換え」方略は2乗倍ルールを導出するための1つの方法に過ぎないという認識に終始してしまう可能性がある。「面積の粒子置き換え」方略がより効果をもつのは、次のような思考がなされたときであると考えられる。つまり、「2乗倍ルールをもとに演繹的に推測した面積変化は、不規則図形でも当てはまるものなのか確かめる方法がない。しかし、どのような図形にも敷きつめられる方法である「面積の粒子置き換え」方略を使うと、それを確かめることが可能になるであろう」ということである。2乗倍ルールに基づく推論の妥当性は「面積の粒子置き換え」方略によって確かめられうる、という認識を学習者に持たせることが肝要となる。

2乗倍ルールの学習の様相　しかしながら、上記のような学習の問題とは別に、次の問題もみられた。すなわち、面積量変換群、公式群でも、2乗倍ルールの学習が行われたにもかかわらず、事後においてもなお「図形をk倍に拡大すると、面積もk倍になる」とする比例的推論を行う者が多かったことである（パターンL）。これは、事前の段階で既に多くみられたつまずきである。このように拡大図形の面積に対する比例的推論が根強く残るという結果は、De Bock, et al. (1998), De Bock, et al. (2002)でみられたものと同じである。本研究で対象とした中学1年生の段階では拡大図形（相似図形）と面積比の関係については未学習であるが、面積の考え方や公式については小学校で学習済である。しかし、図形の拡大とは直交する2方向への拡大であるということやその面積が乗法によって求められるということが概念的に理解されておらず、2乗倍ルールを学習しても「一方の量がk倍になるともう一方の量もk倍になる」という線型ルールが依然として強く影響していることが本研究においても明らかになった。

ところでその一方で、事後テストにおいて、不規則図形の面積に対して比例的推論ではなく2乗倍ルールに基づいた適切な面積判断を行った者もみられた。そのような者は、事前における判断によって2パターンに分けられた。それは、事前では比例的推論を行ったが事後に2乗倍ルールに基づく判断に変容した者（パターンC）と、事前で面積（テストでは「ペンキの量」）は「求められない」と判断し事後に2乗倍ルールを適用した者（パターンA）である。このように、「2乗倍ルールを適用できない誤り」といっても、不適切なルールの干渉のために適用できない場合と、適切なルールの

理解がなされていないために適用できない場合とがある。それらの事前状態の違いによって事後の解答の様相が異なるかどうかを検討するため、不規則図形に対する面積判断パターン別に、事後テスト（台形、平行四辺形）の解答について分析を行った。その結果、パターンＣでは、面積に対しては2乗倍ルールを適用し適切判断を行ったにもかかわらず、長さ判断において不適切な非比例判断を行った学習者がみられた。そうした学習者は「どのような量でも、一方がｋ倍になると他方は必ずしもｋ倍になるのではない」というルールを形成し、それを面積や長さにかかわらずに適用してしまったと考えられる。一方、パターンＡは、事後面積課題で2乗倍ルールに基づいた適切判断が行われていたという点ではパターンＣと同じであるが、これらの学習者のほとんどは、長さ判断でも適切な判断（比例判断）を行っていた。これらそれぞれのパターンにおける2乗倍ルールの学習の様相について詳察すると次のようになろう。

パターンＣにおいてみられた結果は、面積課題への線型ルール適用による誤判断（比例的推論）は減少したが、比例関係が成立する問題（図形の周長）に線型ルールを適用しなくなってしまったという Van Dooren, et al.（2004）の結果と同様である。これは、Vosniadou（2003）の指摘する“non-critical belief change”ともいえる。それは、一度正しい答え（事実）が示されると、それ以上意識することがなくなるということ、つまり、正しい事実のみを捉え、それを説明する関係性までは着目しなくなってしまうという事態である。本研究の学習セッションでは、以前に学習者自身の依拠していた線型ルールがなぜ拡大図形の面積に適用できないのかについては特に説明されなかった。そのため、事前テストにおいて比例的推論を行っていた学習者にとっては、「なぜ拡大図形の面積は比例ではないのか（2乗倍になるのか）」が理解されないままであった可能性がある。そうすると、パターンＣの学習者は、「図形をｋ倍すると縦・横の“長さ”がそれぞれｋ倍になり、“面積”はそれらの掛け算で決まるから、k^2倍になる」というような長さと面積との関係性についての理解が不十分なまま、単に「面積はｋ倍ではなく、2乗倍になる」という結果のみを受容していたと考えられる。

2乗倍ルールの学習では、単に拡大図形の面積が2乗倍になるということの理解だけではなく、それが「面積は直交する縦の距離と横の距離の積によって決まる」という面積の乗法性と結びつくことが必要である。パターンＡの学習者の多くは、そのような学習を行っていたと考えられる。このパターンＡはパターンＣとは異なり、事前テストの段階において「（面積は）求められない」と判断し、線型ルールを単純には適用しなかった者である。なぜ、事前の解答パターンによって2乗倍ルールの学習結果が異なったのか。このことについては、パターンＡの学習者が挙げた「（面積が）求められない」理由から推測できる。それには、「単純に3倍になるとは限らないから」という線型ルール適用への疑念（4名）に加え、「（縦の長さは示されているが）横の長さがわからないから面積もわからない」という面積を規定する縦・横への着目（3名）があった。事前テストにおいて線型ルールをやみくもに適用することに対して懸念を抱いていた学習者は、「拡大図形の面積がｋ倍にならないのなら、では実際は、面積は何倍になっているのだろうか」と2乗倍ルールの学習に動機づけられていたと想定できる。また、事前テストにおいて既に面積を規定する縦・横に着目していた学習者は、2乗倍ルールの学習段階でも面積変化と同時にそれらの長さの変化に着目することができ、結果的

に縦・横の変化と面積変化との関係性についての理解がなされたと考えられる。以上の推測に基づけば、2乗倍ルールの学習が効果的であるためには、まず、「拡大図形の面積は、k倍にはならない」ということを学習者が認識する段階が必要になると思われる。そしてその上で、「面積は縦方向と横方向の2方向に拡がる量であり、それは掛け算によって決まるために、拡大図形の面積は2乗倍になる」ということを規則図形、不規則図形で学習することが肝要となる。したがって、援助においては、まず、①線型ルールの過剰適用を抑制させ、そして②不規則図形のもつ制約を乗り越えさせる、つまり基準図形の敷きつめも公式計算も不可である図形の面積変化の見通しを持たせることが求められることとなる。

ただし②については、本研究の公式群でも、公式計算による面積変化の確認の限界を乗り越え、不規則図形の面積判断を適切に行っている者がみられた。これは、学習者が「一度成立したルールは同じようなどの領域にも当てはまる」というような外挿を積極的に行ったためであると考えられる。このような、学習者の認知的要因である論理操作は、ルールの適用にとって大きい問題であることが近年指摘されてきている（工藤, 2005；立木・伏見, 2008など）。しかし、「あるルールは領域にかかわらずいつでもどこでも成立する」と考えることは、認識の発展につながる一方、誤りのもとにもなる。領域にかかわらずに適用し誤判断を行ってしまうという点では、例えばmore A- more Bルール、same A- same Bなどの直観的ルール（Tirosh & Stavy, 1999a, 1999b）の発動が考えられる。本研究でみられたような拡大図形に対する面積判断の誤りも、直観的な線型ルールが発動されたことによるものとして記述できる。本研究では、事後不規則図形の面積判断において、面積量変換群の比例的推論の解答が公式群よりも多くみられたが、これは学習の効果としては説明がつけがたく、むしろ学習者側の要因（線型ルールの過剰適用者）ととれる。しかし、線型ルール適用の度合いを測るような指標はなかったため、本研究の結果からのみでは厳密には判断しかねる。このような、特定の学習領域にかかわらずに発動する直観的ルールの保持など学習者側の認知的要因とルール適用の問題については追求の余地がある。

今後の課題　本研究の結果から導出される課題としては、次の3点が挙げられる。1点目は、2乗倍ルール適用の困難さである。拡大図形に対する適切な面積判断がなされにくい要因の一つとして、線型ルールが過剰適用されるということが挙げられる。考察では、線型ルールの過剰適用を抑制させる段階が必要であることを指摘したが、本研究で行ったような「面積の粒子置き換え」方略ではそれには不十分であることが示唆されるため、その抑制の具体的な手立てを考える必要がある。それは単に「図形をk倍したら面積はk倍にならない」ということを、実際に求積し確かめさせれば達成されるものなのか、さらにメタ認知的機能を働かせるように促すことも必要なのか。2乗倍ルールの学習について、具体的なプロセスを追って詳細に検討する必要があるだろう。2点目は、ルールを適用した問題解決がみられても、ルールの概念的理解がなされていないことがあるという問題である。それは、事後の面積問題に対して比例的推論を行わずに2乗倍ルールを適用したにもかかわらず、長さ問題に対して本来適切な比例判断を行わなかった学習者が存在したという事態に表れている。そうした事態を回避し2乗倍ルールに概念的理解を伴わせるには、2乗倍ルールが面積の

乗法性から導かれるものであることを理解させる段階が必要であることが示唆された。2乗倍ルールを面積の乗法性に結びつけるためには、まず2乗倍ルールを命題の形で教示し、さらに直交する縦・横の2方向の拡がりが視覚的に把握できる図形の敷きつめを行い、その中で、縦・横の両方向にk倍ずつ敷きつめられることを理解させたり、また、公式による説明でも、その変数が直交する縦方向と横方向を示していること[2]に気づかせたりする必要があるだろう。3点目は、ある問題ではルールを適用できるにもかかわらず、異なる問題になると適用できず、以前の考えが活性化されてしまうということである。それは、直接面積量を問う問題では2乗倍ルールに基づいた判断がなされるのに、面積量を他の量に変換した問題では2乗倍ルールが適用されず、むしろ線型ルールが適用されてしまう事態として表れている。事後のチーズケーキ問題（問4）では、面積量が「食べられるケーキの量に対応する人数」に変換されていた。そこでは、問題で問われている人数を求めるために面積比を考えなければならないため、認知的負荷が大きい。直接面積を問われているのではないため、問題中に書かれている長さ（円の直径）と人数を手がかりにすると、それらは1次元量と分離量であるためにかえって比例的推論が行われやすかったと考えられる。このような、問題構造としてはルールを適用すれば解決できるという点で同じであるのに、ルール適用に差が生じてしまうこともまた、学習の転移の問題として今後も取り上げていかなければならないであろう。

【引用文献】

De Bock, D., Verschaffel, L., & Jassens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 65-83.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Jassens, D. (2002). The effect of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical thinking and learning*, 4, 65-89.

De Bock, D., Verschaffel, L., Jassens, D., Van Dooren, W., & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a benefical impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems.　*Learning and Instruction*, 13, 441-463.

堀部佑子（1971）．面積の指導　数学教室，No. 209, 6-12.

工藤与志文（2005）．概念的知識の適用可能性に及ぼす知識操作水準の影響―平行四辺形求積公式の場合―　教育心理学研究，53, 405-413.

大津悦夫（1981）．面積概念の形成―加法性の授業の分析―　日本教育心理学会第23回総会発表論文集，84-85.

大津悦夫（1982）．量概念としての面積概念の習得　日本教育心理学会第24回総会発表論文集，696-697.

佐藤誠子（2009）．図形の拡大・縮小場面における大学生の面積判断―面積の乗法性に着目させる教授の効果―　東北教育心理学研究，11, 21-29.

立木徹・伏見陽児（2008）．テスト得点の伸びを抑制するのは本当に誤概念なのか？―「論理操作の不十分さ」の可能性の検討―　教授学習心理学研究，4, 10-16.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999a). Intuitive rules: A way to explain and predict student's reasoning. *Educational studies in mathematics*, 38, 51-66.

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999b). Intuitive rules and comparison tasks. *Mathematical thinking and learning*, 1, 179-194.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and instruction*, 14, 485-501.

Vosniadou (2003). Exploring the relationships between conceptual change and intentional learning. In Sinatra, G. M., & Pintrich, P. R. (Eds.), *Intentional conceptual change*. London: Lawrence Erlbaum Associates. pp. 377-406.

【註】

1 「平行四辺形の面積＝縦×横」、「三角形の面積＝縦×横÷2」と解答したものは、ここでは適切解答としてカウントしなかった。それは、図形のどの部分を「縦」「横」とみなすかによって適切解答であるかどうかが異なってしまうためである。もし、これらの「縦」「横」が、図形の直交する縦と横の部分を指しているのであれば適切解答となる。ちなみに、これらの解答を適切解答として含めると、それぞれの適切解答者数は、平行四辺形では面積量変換群18名（72.0％）、公式群15名（60.0％）、三角形では面積量変換群22名（88.0％）、公式群20名（80.0％）となる。

2 「長方形＝縦×横」、「平行四辺形＝底辺×高さ」、「三角形＝底辺×高さ÷2」、「台形＝（上底＋下底）×高さ÷2」、「ひし形＝対角線×対角線÷2」の下線部分が、面積を規定する縦と横を表している。

Junior high school students' judgments of the area of enlarged geometrical figures

: Effects of instruction to materialize the change in the area on students' judgments

Seiko SATO
(Graduate Student, Graduate School of Education, Tohoku University)

This article investigates effects of instruction on junior high school students' judgments of the areas of enlarged geometrical figures. The rule that the area of a figure enlarges with factor k^2 when a figure is enlarged k times must be applied to all geometrical figures. So it is important for students to be able to view the area of enlarged irregular figures which cannot be covered with its original figures and don't have an area formula. In this experiment, based on iteration of a figure unit covering the area, the figure unit is changed to a small bead so that any figure is covered with, and beads covering the area are counted. The author examined whether this method could encourage students to apply the rule regardless of types of a figure. As a result, some students estimated the area correctly by applying the rule, while still many students applied the linear rule that if a geometrical figure enlarges k times, its area becomes k times larger too. From the results, conditions which would be required for learning the appropriate rule about areas are supposed.

Key words : judgment of areas, materialization, the areas of similar figures, the multiplicative rule, junior high school students