日本応用数理学会論文誌
Vol. 7, No. 3, 1997, pp. 265〜279

単純多角形のサーチライトスケジューリング

服部 伯洋　中野 眞一　西関 隆夫
東北大学大学院情報科学研究科

Searchlight schedulings for simple polygons

Norihiro Hattori　Shin-ichi Nakano　Takao Nishizeki
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

Abstract. The *searchlight scheduling problem* is to search robbers moving in a simple polygon by searchlights. Each of the searchlights is fixed at a point in the polygon, emits a single ray, and can change the direction of the ray continuously. In this paper, we present a linear time algorithm to obtain a searchlight scheduling for a given polygon with searchlights on the boundary.

1　まえがき

多角形領域内に盗賊が潜んでおり，連続的に移動するとする．領域内のいくつかの点に固定されたサーチライトを用いて盗賊を捜したい．ただし，サーチライトは一つの方向しか監視できないし，監視する方向は連続的にしか変えることができないとする．どのように盗賊が移動しても必ず盗賊を発見できるようにするためには，何個のサーチライトをどこに配置したらよいかという問題を**サーチライト問題**といい，サーチライトの配置が与えられた時，実際に盗賊を発見するためにはどのようにサーチライトの方向を変えればよいかというスケジュールを求める問題を**サーチライトスケジューリング問題**という [5][6]．これらの問題は，TV カメラによる防犯対策などに応用できる．

これらの問題は，いわゆる美術館問題と関連がある [1][4]．美術館問題とは，多角形領域内のいくつかの点に警備員を配置し，領域内どの点も少なくとも 1 人の警備員から見えるようにするためには，何人の警備員をどこに配置したらよいかという問題である．美術館問題は盛んに研究されており，どのような単純な n 角形領域に対しても，高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の警備員からなる美術館問題の解が存在することが知られている [1][3]．

明らかにサーチライト問題の解は美術館問題の解でもあるが，美術館問題の解であっても，サーチライト問題の解でない例がある．例えば Fig. 1 において，サーチライトの光線を常に後ろから追うように動く盗賊は発見できない．しかし，全ての警備

員が多角形の境界に配置されている美術館問題のどの解も，サーチライト問題の解であることが証明されている [6]．その証明からサーチライトスケジュールを求めるアルゴリズムが導けるが，そのアルゴリズムは少なくとも $O(n^2)$ 時間かかってしまう。このようにサーチライトスケジューリング問題については効率の良いアルゴリズムは知られていない．

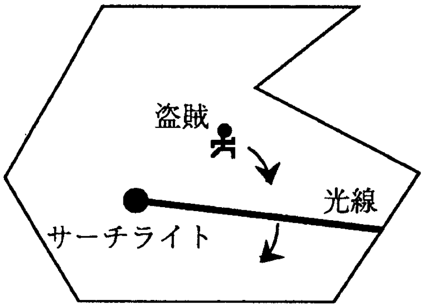

Fig. 1. An example in which the robber cannot be found out.

本論文では，与えられた単純な n 角形領域とサーチライトの配置とに対して，サーチライトスケジューリング問題を解く $O(n)$ 時間アルゴリズムを与える．このアルゴリズムは従来の少なくとも $O(n^2)$ 時間かかるアルゴリズムよりも高速であり，各サーチライトは高々一回しか回転しないという意味で，求まるスケジューリングは単純である．

2 準備

本章では用語と問題を定義する．

$v_1, v_2, \cdots, v_n$ は平面上の点とする．2 点 v_i, v_j を結ぶ直線分を v_iv_j と書く．線分列 $e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, \cdots, e_n = v_nv_1$ によって囲まれた平面の有限閉領域を**多角形**と呼ぶ．本文では，n は多角形を定義する線分の本数を表し，$n \geq 3$ とする．各線分の 2 つの端点がそれぞれ他のちょうど 1 本の線分の端点であり，かつ端点以外では線分が互いに交差しないとき，その多角形は**単純**であるという．本文では単純な多角形のみを扱う．単純な多角形 P を定義する線分上の点の集合を $B(P)$ と書く．即ち $B(P)$ は多角形の境界である．

点 v, w が多角形 P 内にあり，直線分 vw が P に含まれるとき，v は w から**見える**という．与えられた多角形 P と P 内のいくつかの点からなる集合 S とに対して，P 内の任意の点が S のいずれかの点から見えるとき，S は P の**警備集合**であるという．与えられた P に対して，警備集合 S を求める問題を**美術館問題**という．

美術館問題の警備員は常に全方向を監視することになる．これに対し，一度にひとつの方向だけしか監視できないサーチライトで多角形の部屋を警備する問題がサーチライト問題とサーチライトスケジューリング問題である．これらの問題を次のように定義する．

多角形領域のいずれかの点に盗賊が潜んでおり，盗賊は領域内を連続的に動き回るとする．領域内のいくつかの点に固定されたサーチライトを用いて盗賊を捜したい．サーチライトは配置された点を端点とする半直線の光線を出す事ができ，光線を出す向きは連続的にしか変えられないとする．ただし光線は領域の境界を貫通できないとする (Fig. 1参照)．また，同一点には高々1つのサーチライトしか配置できないものとする．盗賊が光線上にいた時，盗賊は**発見された**という．

時刻0に盗賊を捜すためにサーチライトを動かし始めるとする．各サーチライトの光線が各時刻 $t \geq 0$ でどの方向を向いているか，即ちサーチライトの光線の動きを決めることを，各サーチライトの**スケジュール**という．各スケジュールの実行によってどのように盗賊が移動しても必ず盗賊が発見されるとき，そのようなスケジュールを**サーチスケジュール**という．与えられた多角形 P とサーチライトを配置するいくつかの点からなる集合 S とに対してサーチスケジュールが存在するならば，S は P の**サーチライト集合**であるという．与えられた P に対してサーチライト集合 S を求める問題を**サーチライト問題**という．サーチライト集合 S が与えられた時，サーチスケジュールを求める問題を**サーチライトスケジューリング問題**と呼ぶ．

時刻 t において，$B(P)$ 上の点や $|S|$ 本の光線上の点を通らない曲線分で P 内の2点 u,v を結ぶ事ができるとき，時刻 t において点 u と v は**連結である**という．例えばFig. 2 では，点 u と v は連結であるが，u と w は連結でない．

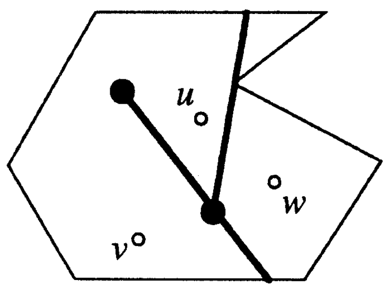

Fig. 2. Connected points and disconnected points.

次のように**疑惑点**と**安全点**を定義する．時刻0においてサーチライトの光線上にない多角形 P 内の点は時刻0において疑惑点であり，サーチライトの光線上にある点は安全点である．時刻 $t \geq 0$ において点 $p \in P$ が疑惑点であるというのは，次のよ

うな連続関数(盗賊の軌跡) $f:[0,t]\rightarrow P$ が存在するときである.

(i) 点 $f(0)\in P$ が時刻 0 で疑惑点である.

(ii) $0\leq t'\leq t$ なる各時刻 t' で点 $f(t')$ がどのサーチライトの光線上にもない.

(iii) $f(t)=p$.

時刻 $t\geq 0$ で疑惑点でない点は時刻 t において安全点であるという.また,次のように**疑惑領域**と**安全領域**を定義する.時刻 t において互いに連結した点からなる極大な領域 $R\subseteq P$ が疑惑点を含むならば,時刻 t において R は疑惑領域であるという. R が疑惑点を含まないならば, R は安全領域であるという.すなわち,盗賊がいるかもしれない領域が疑惑領域であり,盗賊がいないことがわかっている領域が安全領域である.例えば Fig. 3 において, $t<0$ の (a) では多角形全体が疑惑領域である.時刻 $t=0$ からサーチライト l_1 の光線を時計回りに回し始めると,(b) のように安全領域が生じる.ここで (b) の状態からさらに l_1 の光線を時計回りに回し続けると (c) のように再び全体が疑惑領域に戻る.一方,(b) の状態から l_2 の光線を反時計回りに回すことで (d) のように全体を安全領域にすることができる.

サーチスケジュールとは, P 全体を安全領域にするような各サーチライトのスケジュールであると言える.

次に,サーチライトの配置すなわちサーチライト集合を求める手法について述べる.全ての警備員が多角形の境界に配置されている警備集合はサーチライト集合でもあることが知られている [6].また多角形の境界上の点のみからなる警備集合については次のことが知られている.まず,警備集合の点数が少なくとも $\lfloor n/3\rfloor$ 個であるような単純 n 角形が存在する [1].また,任意の単純 n 角形 P に対して,高々 $\lfloor n/3\rfloor$ 個の多角形の頂点からなる警備集合が存在することが P の三角形分割を用いて証明されている [1][3].このような警備集合は次のようにして求められる.

まず, n 角形 P を $n-2$ 本の対角線で三角化したグラフ G_P を得る.次に G_P を 3 色で点彩色する.例えば Fig. 4 (a) では頂点が 1,2,3 の 3 色で点彩色されている.各三角形の 3 頂点は異なる色で塗られている.三角形のどの頂点もその三角形の警備集合であるので,同じ色で塗られている頂点からなる集合は P の警備集合である. 3 色のうち塗った点数が一番少ない色を選べば,その色 (Fig. 4 (a) の例では色 1) で塗られた点からなる集合は高々 $\lfloor n/3\rfloor$ 点からなる P の警備集合である (Fig. 4 (a) 参照).このような警備集合は文献 [2] の三角化アルゴリズムを用いて $O(n)$ 時間で求めることができる.

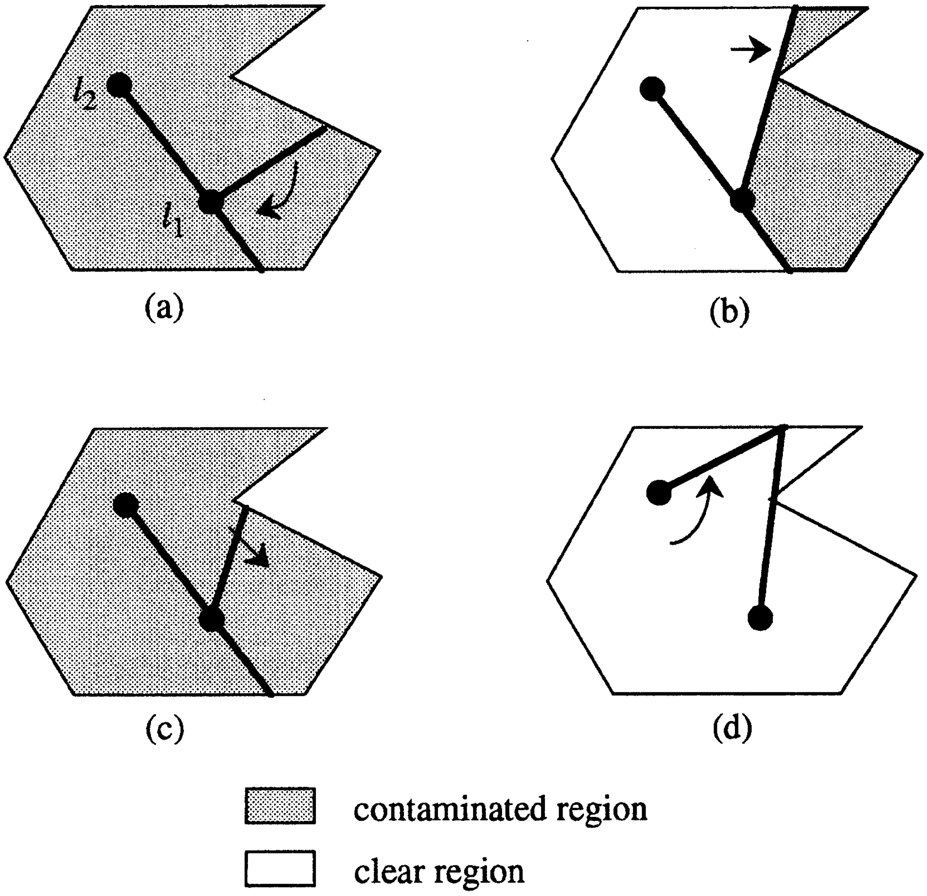

Fig. 3. Clear regions and contaminated regions.

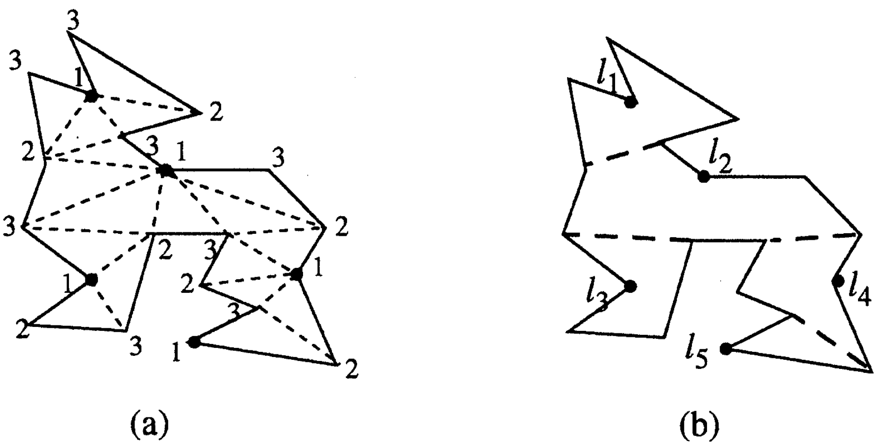

Fig. 4. (a) Guards and (b) a partition of P.

3 サーチライトスケジューリングアルゴリズム

この章では，前章で述べた方法で得られるサーチライトの配置に対して，サーチスケジュールを求めるアルゴリズムを与える．

定理 3.1 単純な n 角形 P に対し前章で述べた方法で得られるサーチライト集合を S とする．S に対して，各々のサーチライトの光線を高々 360 度しか回転させない P のサーチスケジュールが存在する．また，そのようなスケジュールを $O(n)$ 時間で求めるアルゴリズムがある．

以下ではアルゴリズムを具体的に与える．$|S|=1$ の場合は，ただ1つのサーチライトを高々360度回転させることで P を安全領域にすることができる．よって，$|S|\geq 2$ としてよい．

まず，次のように P の分割を作る．サーチライト集合 S は P を三角化したグラフ G_P を用いて作られている．両端点のいずれもサーチライト集合に含まれないような G_P の対角線を**分割線分**と呼ぶ．境界 $B(P)$ と分割線分に囲まれた高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 個の領域に P は分割される．これらを**分割領域**と呼ぶ．この各分割領域はサーチライト集合の点をちょうど1つ含む (Fig. 4 (b) 参照).

この P の分割から次のような木 T を作る．T の点集合は S とする．2点 $l_x, l_y \in S$ を含む2つの分割領域が分割線分で隣接するときかつそのときのみ，T の節点 l_x, l_y を辺で結ぶ．T の例を Fig. 5 (a) に示す．T の任意の節点 l_r を選び，T の根とする．T の節点 l_x から根 l_r へ行く道に含まれる辺の本数を節点 l_x のレベルという (Fig. 5 (a) 参照)．根 l_r のレベルは 0 とする．

本アルゴリズムでは，レベルが偶数であるサーチライトは光線を反時計回りに回転させ，レベルが奇数であるサーチライトは光線を時計回りに回転させる．そのため，最初はレベルが偶数であるサーチライトは光線を多角形の境界に接するまでできるだけ時計回りに回した方向に向けておき，レベルが奇数であるサーチライトの光線はできるだけ反時計回りに回した方向に向けておく (Fig. 5 (b) 参照).

T においてレベルが偶数であるサーチライト l_x のスケジュールについて説明する．レベルが奇数の場合は時計回りと反時計回りとを入れ換えればよい．サーチライト l_x を含む分割領域を R_x と書くことにする．木 T における節点 l_x の次数を $d(l_x)$ と書く．領域 R_x の境界 $B(R_x)$ には $d(l_x)$ 本の分割線分 $a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_{d(l_x)}b_{d(l_x)}$ がある．これらの分割線分は $B(R_x)$ 上で点 l_x から反時計回りにこの順で現れるとする．分割領域 R_x と分割線分 a_ib_i, $1 \leq i \leq d(l_x)$, を共有する分割領域を R_{x_i} と書く (Fig. 6 参照).

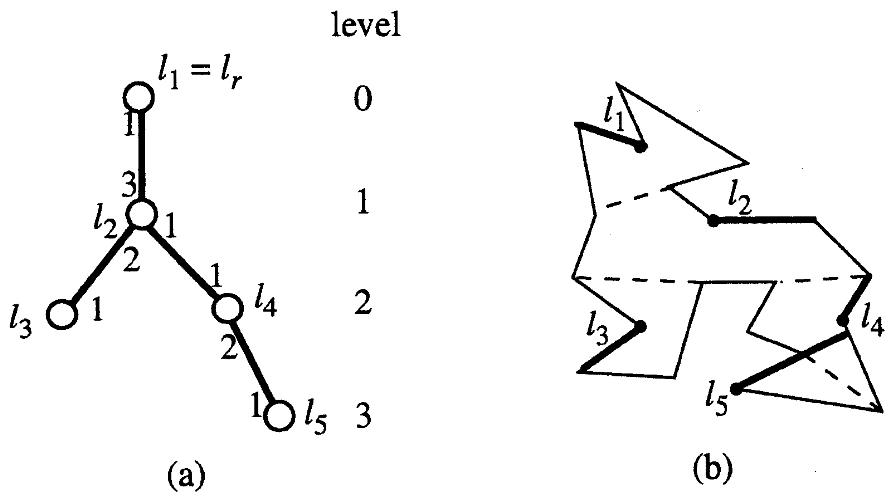

Fig. 5. (a) Tree T with root l_1, and (b) initial directions of searchlights.

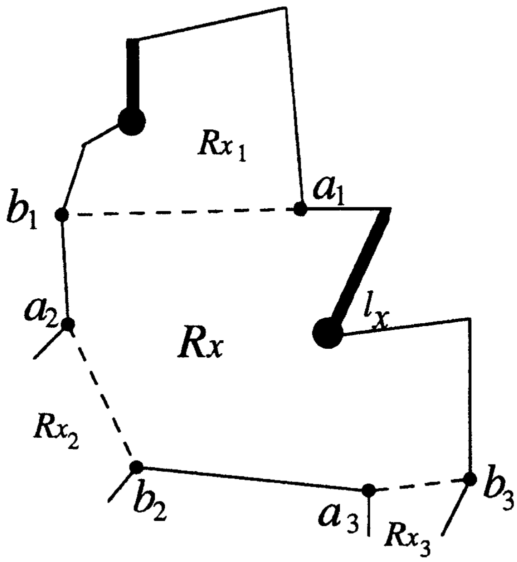

Fig. 6. Regions R_x, R_{x_1}, R_{x_2}, and R_{x_3}.

次にサーチライト l_x の方向の動かし方 $SLMS$ (Search Light Moving Scheduling) を与える.

$SLMS(l_x, R_x)$
begin

1. **for** $i = 1$ **to** $d(l_x)$ **do**
   begin
2. サーチライト l_x の光線を点 a_i を通るまで反時計回りに回す;
3. R_{x_i} 内のサーチライト l_{x_i} の光線が点 a_i を通るまで，l_x の光線を a_i を通る方向に向けたまま静止させておく;
4. l_{x_i} の光線が a_i を通る方向を向いたら，サーチライト l_x, l_{x_i} の光線の交点が常に分割線分 a_ib_i 上にあるように l_x の光線を反時計回りに，l_{x_i} の光線を時計回りに回していき，l_x と l_{x_i} の光線が点 b_i を通るところで回転を止める (Fig. 7 参照)
   end;
5. l_x の光線を境界 $B(R_x)$ に接するまで反時計回りに回して終了する

end.

上の $SLMS$ を用いてサーチスケジュールを求める方法を説明する．どのサーチライトも $SLMS$ の行 3 で無限に待ち続けることがないように，どの分割線分から安全領域にしていくかという順番を定めれば，サーチスケジュールは容易に求められる.

木 Tの各点はサーチライトに対応する. 点のレベルが偶数であるのか奇数であるのか, すなわち対応するサーチライトの光線を反時計回りに回すのか時計回りに回すのかはTの各点に記憶されているとしよう.

木 T の各辺 $e = (l_x, l_y)$ は分割線分に対応する．辺 e に次のように2つのラベル $\alpha(e, l_x)$ と $\alpha(e, l_y)$ を付ける．辺 $e = (l_x, l_y)$ が l_x において分割線分 a_ib_i , $1 \le i \le d(l_x)$, に対応するとき $\alpha(e, l_x) = i$ とし，e が l_y において分割線分 a_jb_j , $1 \le j \le d(l_y)$, に対応するとき $\alpha(e, l_y) = j$ とする (Fig. 5 (a) 参照).

T の辺に付けられたラベルは，T の節点に対応するサーチライトの光線が，辺に対応する分割線分を何番目に通るのかを表している．例えば $\alpha(e, l_x) = i$ であれば，サーチライト l_x の光線は e に対応する分割線分を分割領域 R_x において i 番目に通

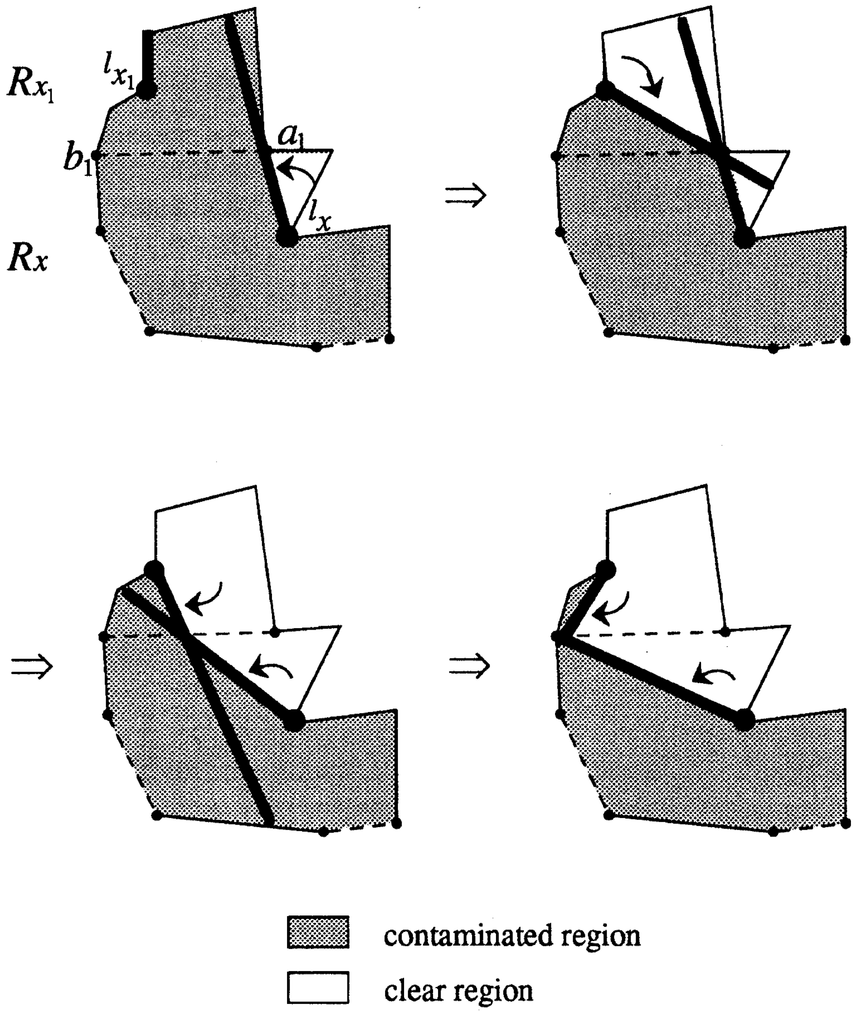

Fig. 7. Clearing a partition line a_1b_1 by two searchlights l_x and l_{x_1}.

るということを表している．よって，2つのラベルが共に1である辺 $e=(l_x,l_y)$ に対応する分割線分は，2つのサーチライト l_x と l_y の光線を初期方向から点 a_1 まで回転させ，分割線分上を同時に動かすことで，その分割線分を安全領域に含めることができる．このような辺を**安全可能辺**と呼ぶ．

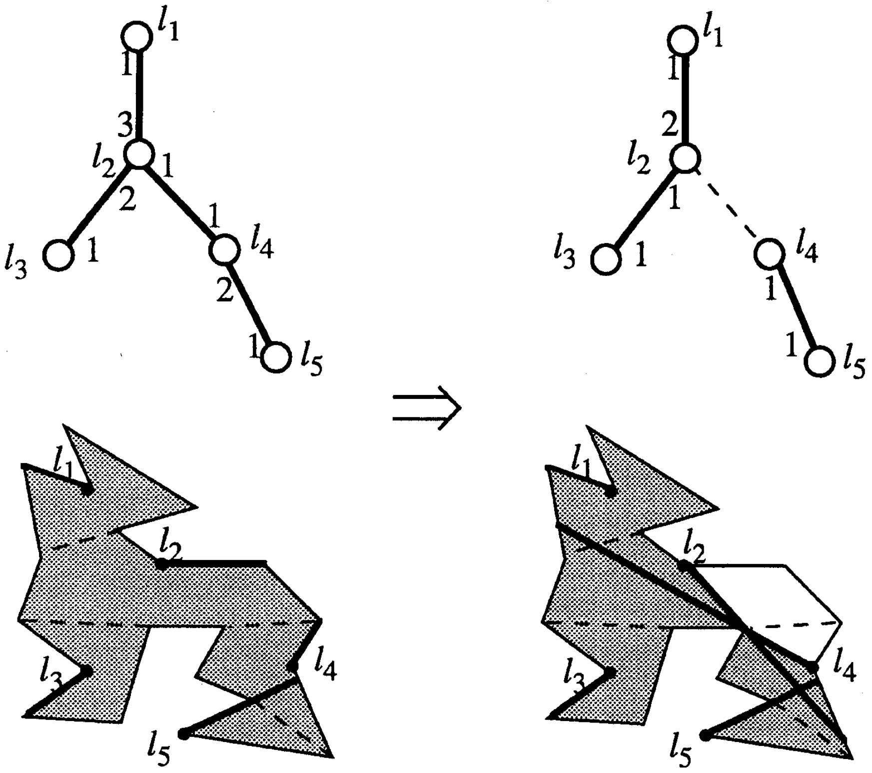

Fig. 8. Updating labels.

ラベル付けされたどのような木 T にも，安全可能辺が一本以上あることを示す．まず，T の根 $l_r=l_x$ に接続している辺で $\alpha(e,l_x)=1$ なる辺 e を選び，$e=(l_x,l_y)$ とすると，もし $\alpha(e,l_y)=1$ であれば，e は安全可能辺である．$\alpha(e,l_y)\neq 1$ であれば，節点 l_y に接続している辺で $\alpha(e',l_y)=1$ である辺 e' を選び，上の操作を続ける．いずれ安全可能辺が見つかるか，あるいは木の葉に辿り着く．しかし木の葉には辺は一本しか接続していないのでその辺のラベルは共に1であり，安全可能辺である．よって，T には安全可能辺が必ず一本以上存在する．

T の任意の安全可能辺を $e=(l_x,l_y)$ とする．e に対応する分割線分を安全領域に含めた状態，すなわち，その安全領域を切り取って P を2つの多角形に分割した状態に対応させるため，T から辺 e を除去し2つの木を作る．これらの2つの木に新たにラベル付けを行う (Fig. 8 参照)．新たに得られた木の各々にも必ず安全可能辺がある．よって安全可能辺の除去とラベルの付け直しを繰り返すことで，どの辺もい

つかは安全可能辺になる．即ち，どの分割線分もいつかは安全領域に含めることができる．

このことから，次のような方法でサーチスケジュールを求めることができる．

1. （全ての）木にラベル付けを行う．
2. 任意に木とその根を選び，根から辺を辿って安全可能辺を探す．
3. 安全可能辺を除去する．
4. 全ての辺が除去されれば終了．そうでなければ残りの木に対しラベルを付け直して 2. に戻る．

Fig. 5 (b) の例に対し上のアルゴリズムを適用すると，Fig. 9 の括弧の中に書かれている順序で木 T の辺を安全可能辺にすればよいことがわかる (ただし,(2) と (3) の順序は交換可能). このようにして Fig. 10 のサーチスケジュールが得られる．

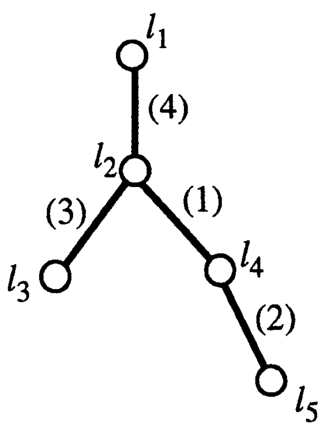

Fig. 9. Search order.

実際には，次のプログラム $PSLS$ に示すように，木の各点に接続している辺はラベルの順に隣接リストに入れられているとして，深さ優先探索を用いれば，ラベルの付け直しを行わずにサーチスケジュールを求めることができる．

program $PSLS(D)$
begin
{ l_r は木 T の根．e_i は $\alpha(e_i, l_r) = i$ である辺を表す．}

1. **for** $i = 1$ **to** $d(l_r)$ **do** $search(e_i)$

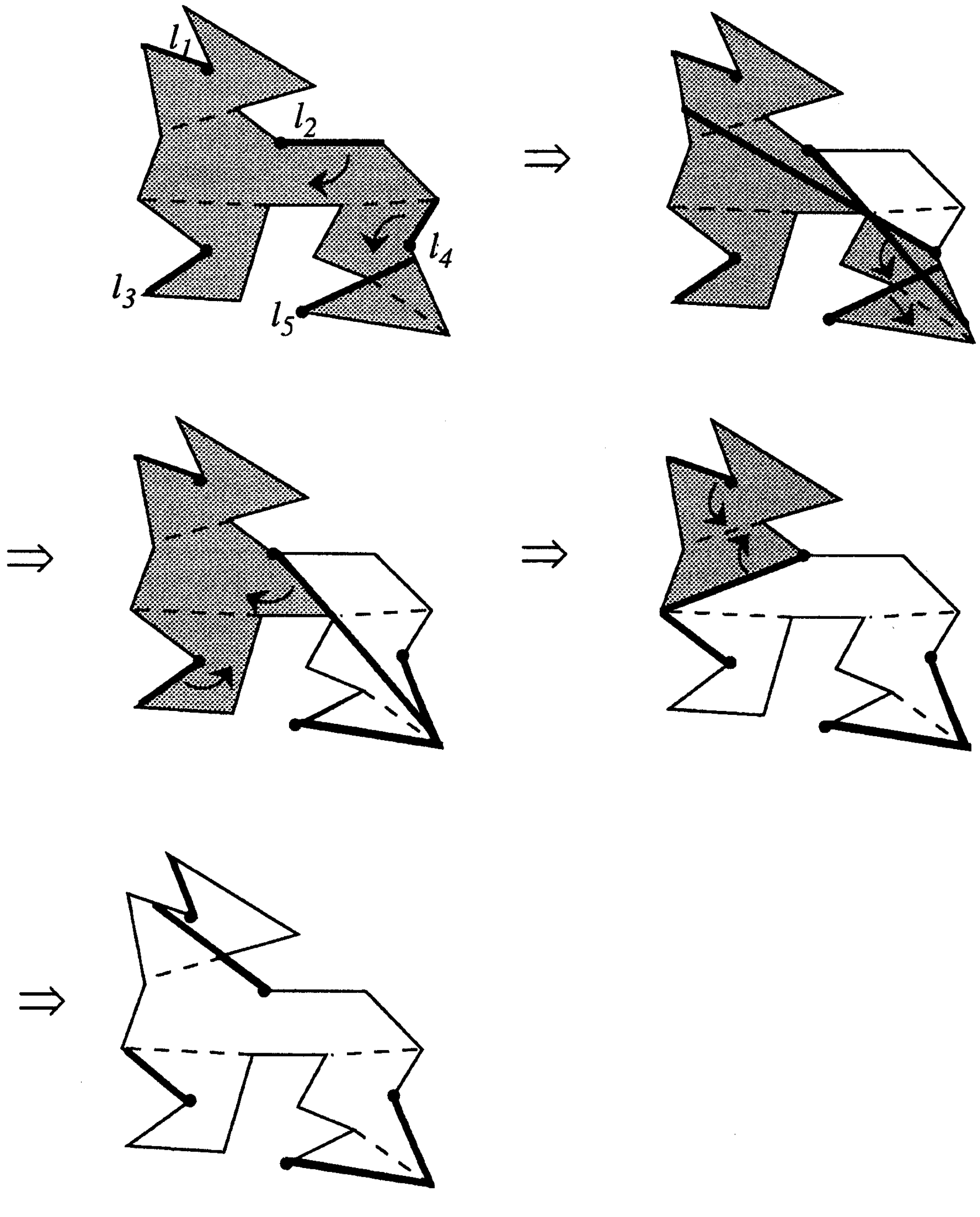

Fig. 10. A search schedule.

end.

procedure *search*(e)
begin
$\{e=(l_x,l_y)$ とする．節点 l_x のレベルは節点 l_y のレベルより小さいとする．e_j は $\alpha(e_j,l_y)=j$ である辺を表す．$\}$

1. **for** $j=1$ **to** $d(l_y)$ **do**
2. **if** $e_j=e$
   then サーチライト l_x と l_y により辺 e に対応する分割線分を安全領域にする
   else *search*(e_j)

end.

木 T の作成とラベル付けに要する時間は $O(n)$ である．また $PSLS$ は木 T の各辺を2回だけ辿るので計算時間は $O(n)$ である．よって，P のサーチスケジュールは $O(n)$ 時間で求まる．

以上により，与えられた単純な n 角形領域とサーチライトの配置とに対して，サーチライトスケジューリング問題を解く $O(n)$ 時間アルゴリズムが得られた．

上と同様の手法を用いることで，次の定理に示すように，より一般的なサーチライト集合に対するサーチスケジュールも求めることができる．

定理 3.2 単純な n 角形 P が，$B(P)$ 上の2点を結ぶ互いに交差しない $k-1$ 本の線分により k 個の部分領域 $R_1,R_2,\cdots,R_k$ に分割されており，かつ各部分領域 R_i が $S_i=\{s_i\}$, $s_i\in B(P)\cap B(R_i)$ なる警備集合 S_i を持つとき，$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}$ は P のサーチライト集合であり $O(k)$ 時間でサーチスケジュールが求められる．

4　結論

本論文では，単純な n 角形領域とサーチライトの配置とに対して，サーチライトスケジューリング問題を解く $O(n)$ 時間アルゴリズムを与えた．本論文のアルゴリズムは全てのサーチライトが多角形の境界にある場合にしか適用できない．多角形の内部にもサーチライトを置ける場合には，各サーチライトを高々360度回転するだけのサーチスケジュールを作れるとは限らないが，複雑な回転を使うことによりサーチスケジュールを作れることもある [6]．また，サーチライトが2個の場合に対してはサー

チスケジュールが存在するための必要十分条件が知られている [5]. しかし, サーチライトが3個以上の場合はそのような必要十分条件はまだ知られていない [6].

穴のある多角形領域など, より一般的な場合についてサーチライト集合やサーチスケジュールを求めることが今後の課題である.

参考文献

[1] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Combinatorial Theory(B), 18(1975), 39-41.

[2] B. Chazelle, *Triangulating a simple polygon in linear time*, Disc. Comput. Geom., 6(1991), 485-524.

[3] S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchman theorem*, J. Combinatorial Theory(B), 24(1978), 374.

[4] J. O' Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, New York, (1987).

[5] K. Sugihara, I. Suzuki and M. Yamashita, *The searchlight scheduling problem*, SIAM J. Comput., 19(1990), 1024-1040.

[6] 山下雅史, 捜索問題－移動する対象を探索する, 離散構造とアルゴリズム III, 近代科学社, (1994), 115-162.

服部伯洋（非会員）〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉

平成7年東北大学工学部情報工学科卒業．平成9年同大学院情報科学研究科博士課程前期2年の課程修了．現在,(株) アスキー勤務．電子情報通信学会会員．

中野眞一（正会員）〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉

昭和60年東北大学工学部通信工学科卒業．昭和62年同大学院博士課程前期2年の課程電気及び通信工学修了．同年セイコーエプソン（株）入社．平成2年東北大学工学部情報工学科助手．平成4年工学博士．現在，東北大学大学院工学研究科助教授．電子情報通信学会，情報処理学会，ＡＣＭ，ＩＥＥＥ会員．

西関隆夫（正会員）〒980-77 仙台市青葉区荒巻字青葉

昭和44年東北大学工学部通信工学科卒業．昭和49年同大学院博士課程電気及び通信工学修了．工学博士．現在，東北大学大学院情報科学研究科教授．電子情報通信学会，情報処理学会会員，ＡＣＭフェロー，ＩＥＥＥフェロー．

(1997年3月17日受付)