

博士論文

拡張超対称模型における
荷電レプトンフレーバーの破れ

中村 佳祐

平成27年

目次

第 1 章	序論	1
1.1	本論文の構成	3
第 I 部	超対称性と荷電レプトンフレーバーの破れ	4
第 2 章	超対称標準模型	6
2.1	超対称性 (Supersymmetry)	6
2.2	最小超対称標準模型 (MSSM)	8
2.3	まとめ	16
付録 2.A	超対称性 (SUSY)	18
付録 2.B	SUSY 代数	19
付録 2.C	MSSM のくりこみ群方程式	26
第 3 章	ニュートリノ	29
3.1	はじめに	29
3.2	ニュートリノ振動	30
3.3	ニュートリノ混合	32
3.4	ニュートリノ質量	33
3.5	Majorana 質量とシーソー機構	34
3.6	Non-Unitary 効果	36
付録 3.A	The standard type-I seesaw	39
付録 3.B	Inverse seesaw	39
第 4 章	荷電レプトンフレーバーの破れ	41
4.1	はじめに	41
4.2	有効 Lagrangian と cLFV 過程の一般表式	44
4.3	$\mu \rightarrow e\gamma$ 崩壊と MEG 実験	46
4.4	まとめ	47
第 II 部	Supersymmetric Seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れ	49
第 5 章	νMSSM における荷電レプトンフレーバーの破れ	51
5.1	はじめに	51
5.2	Lagrangian とニュートリノ湯川	51

5.3	$\mu \rightarrow e\gamma$ 過程	53
5.4	数値計算のための準備	55
5.5	結果	55
5.6	まとめ	57
第 6 章	νNMSSM における荷電レプトンフレーバーの破れ	59
6.1	はじめに	59
6.2	今回考える模型	60
6.3	荷電レプトンフレーバーの破れ	62
6.4	Constraints on the Parameters in the Model	64
6.5	Numerical Results	66
6.6	Summary	70
付録 6.A	Renormalization Group Equations	71
付録 6.B	CP-even higgs mass	73
第 7 章	Supersymmetric Inverse Seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れ	75
7.1	Introduction	75
7.2	Supersymmetric Inverse Seesaw 模型	76
7.3	Lepton Flavor Violation	78
7.4	Numerical Setup	82
7.5	Numerical Result 1	83
7.6	Numerical Result 2	91
7.7	Summary	95
付録 7.A	Inverse seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れ (レビュー)	97
第 8 章	まとめ	103
	参考文献	106

第 1 章

序論

2015 年のノーベル物理学賞の受賞理由は「ニュートリノが質量を持つことを示すニュートリノ振動の発見」であった。素粒子標準模型ではかねてよりニュートリノの質量はゼロとされてきたが、ニュートリノ振動が観測されたことにより、ニュートリノには質量があることが明らかになった。標準模型の範囲内でニュートリノに質量があることを説明できないのは、標準模型の中にカイラリティが右のニュートリノ (ν_R) が無いためである。ニュートリノ質量を説明するために標準模型に ν_R を加えることは、 ν_R が標準模型のゲージ群 $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ の singlet であるために可能であるが、その場合、ニュートリノの質量が他の物質粒子とくらべて非常に小さいこと、つまりニュートリノ湯川結合 (Y_ν) が他の物質粒子に比べて小さいことが非常に不自然であるように思われる。この不自然さを解消する枠組みとして知られているのが seesaw 機構である。右巻きニュートリノ ν_R は gauge singlet であるために通常のディラック質量項の他にマヨラナ質量項を組むことが出来る。このマヨラナ質量 (M_R) は標準模型からいかなる制限も受けないため、ゼロから Planck スケールまでの好きなエネルギースケールの値を持つことが出来る。もし M_R がディラック質量 ($m_\nu^D = \frac{1}{\sqrt{2}}vY_\nu, v = 256\text{GeV}$) とくらべて十分に大きい場合、ニュートリノ質量は

$$m_\nu = (m_\nu^D)^2 / M_R \quad (1.0.1)$$

となり、 $M_R \sim 10^{15}\text{GeV}$ ならば $Y_\nu \sim \mathcal{O}(1)$ でも自然に小さなニュートリノの質量を説明することが出来る。これがいわゆる type-I seesaw 機構と呼ばれるものである [68–70]。type-I seesaw は確かに自然に小さなニュートリノ質量を説明することはできるが、 M_R が非常に重たいために右巻きニュートリノ由来のステライルニュートリノを地上の加速器実験で観測することは非常に困難である。一方、type-I seesaw のように ν_R のマヨラナ質量が GUT スケール付近の非常に高いエネルギースケールの大きさでなくても小さなニュートリノ質量を説明することが知られており、Low-scale seesaw 機構と呼ばれている。本研究ではとくに Low-scale seesaw の中でも Inverse seesaw 機構 [71–73] に注目する。Inverse seesaw 機構は通常の type-I seesaw とは違い 6 つ (2 種類 \times 3 世代) の gauge singlet な右巻きニュートリノを加える。ニュートリノ質量は

$$m_\nu = (m_\nu^D)^2 / (M_R^2 / \mu_X) \quad (1.0.2)$$

となり、 M_R が仮に数 TeV 程度の大きさであっても、 $\mu_X \ll M_R$ の場合には自然に小さなニュートリノ質量を説明することが出来る。このように、Inverse Seesaw 機構は、TeV スケールの実験に感度があるために、ステライルニュートリノを地上の実験で観測できる可能性があるという通常の type-I seesaw にはない利点を持つ。

標準模型が抱える問題はニュートリノ質量だけではない。標準模型の範囲内にはダークマターの候補がなく、ヒッグス質量の階層性問題、ミューオン $g-2$ のズレや重力の量子化など様々な問題がある。そのために現在の素粒子物理学では標準模型の拡張をすることで標準模型が持つ様々な問題を解決しようという試み、つま

り拡張標準模型 (Beyond the Standard Model(BSM), New Physics) の研究が理論・実験の両方から行われている。BSM の中で Supersymmetry(以下: SUSY) は現在でも有力な候補であり、LHC において精力的に探索がなされているが、現在までその徴候は見つかっていない。SUSY を含む模型の中でもっともよく調べられている模型は最小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model: MSSM) であるが、以前より MSSM には μ 問題など様々な問題があることが指摘されており、現在までに様々な形で拡張がなされている。Next-to-MSSM(NMSSM) は MSSM の拡張模型の 1 つで、MSSM に gauge singlet な superfield を加えた模型である [56]。NMSSM では MSSM における μ -term は singlet superfield の真空期待値で与えられるため、MSSM の抱える μ 問題を解決することができるという利点を持つ。その意味で NMSSM は MSSM の自然な拡張となっている。また MSSM における困難の 1 つにヒッグス質量がある。MSSM の場合、tree level のヒッグス質量は

$$m_{h,\text{MSSM}}^2 \approx M_Z^2 \cos^2 2\beta + \Delta m_{h,1\text{Loop}}^2 \quad (1.0.3)$$

より M_Z 程度にしかならず、126GeV ヒッグス質量を再現するためには量子補正であげなければならない [18–20]。補正の主な寄与は top yukawa であり、その効果を大きくするためには stop mass が top mass に比べて十分大きくある必要がある。しかし SUSY mass scale が重たいと SUSY を考える利点である Higgs mass の Fine tuning が問題となる。一方 NMSSM では CP-even のヒッグス質量は

$$m_{h,\text{NMSSM}}^2 \approx M_Z^2 \cos^2 2\beta + \lambda^2 v^2 \sin^2 2\beta + \Delta m_{h,1\text{Loop}}^2 \quad (v \sim 174\text{GeV}) \quad (1.0.4)$$

のように書け [56]、新たに加えた singlet のおかげで MSSM とくらべて tree level higgs mass を特に small $\tan\beta$ の領域で上げることができる。このように NMSSM は MSSM が抱える問題の多くを解決できる可能性をもつ模型であると期待されている。

最後に、本研究の主題である荷電レプトンフレーバーの破れ (charged Lepton Flavor Violation: cLFV) に関して触れることとする。ニュートリノに質量あることが明らかになったことにより、標準模型では起こり得なかった反応が起こるようになる。荷電レプトンフレーバーの破れはそうした現象の 1 つである。ニュートリノに質量がある場合、ニュートリノの質量固有状態はフレーバー固有状態と一般に異なる。そのため標準模型においてレプトンフレーバーは保存せず、荷電レプトンフレーバーの破れもループレベルで起こるようになる。単純に標準模型に右巻きニュートリノを加えた模型でも荷電レプトンフレーバーの破れは起こるが、その分岐比の大きさはニュートリノの質量が W ボソンの質量に比べて非常に小さいために抑制され非常に小さくなり、近い将来の実験で観測することは非常に困難となっている [29–31]。またニュートリノ質量を考えずとも、BSM では一般に模型に含まれる新粒子や相互作用により、荷電レプトンフレーバーの破れが起こるようになる。そのため荷電レプトンフレーバーの破れは BSM 探索の意味で非常に重要なものとなっている。cLFV 過程において最もよく調べられている BSM 模型は MSSM に右巻きニュートリノ (ν_R) を加えた模型 (ν MSSM) である [110]。現在までのところ、荷電レプトンフレーバーの破れは実験で未発見である。一番強い制限を与えているのが MEG 実験である。最近 MEG 実験が $Br(\mu \rightarrow e\gamma)$ の上限を更新し、その値は現在 5.7×10^{-13} となっている [32]。実験の精度が上がるにつれて、BSM のパラメータに強い制限を与えるようになるため、その精度向上も非常に重要なものとなっている。

以上の状況を踏まえた上で、本論文では大きく 2 つのことを扱った。1 つが NMSSM に ν_R を加えた模型 (ν NMSSM) における荷電レプトンフレーバーの破れが ν MSSM 模型と比べてどのように変わるのか、どのようなパラメータ領域が好まれるのかを NMSSM の利点の 1 つである「ヒッグス質量をツリーレベルであげられること」と結びつけて調べた。もう 1 つが、MSSM において、ニュートリノ質量を通常の type-I seesaw ではなく Inverse Seesaw 機構を用いて導入した場合に cLFV にどのような違いが現れるのかを調べることであ

る。本論文では Supersymmetric Inverse seesaw 模型における cLFV についてマヨラナ質量の非対角成分が与える影響について詳細に調べた。

1.1 本論文の構成

本論文の構成は次のとおりである。

- 第 2 章：超対称標準模型
素粒子標準模型に超対称性を課して最小限拡張した最小超対称標準模型 (MSSM) の導入を行う。またこの模型がいかにして標準模型が抱える問題を解決するか簡単なレビューを行う。
- 第 3 章：ニュートリノ
荷電レプトンフレーバーの破れと密接に関係のあるニュートリノの性質に関して簡単にまとめる。
- 第 4 章：荷電レプトンフレーバーの破れ
荷電レプトンフレーバーの破れの歴史と、現状について簡単なレビューを行う。また、effective な Lagrangian を書き下し、その Wilson 係数を用いて各種 cLFV 過程の一般表式を与える。
- 第 5 章： ν MSSM における荷電レプトンフレーバーの破れ
MSSM に右巻きニュートリノを加えて拡張した ν MSSM 模型における荷電レプトンフレーバーの破れについて、その特徴を簡単にまとめる。
- 第 6 章： ν NMSSM における荷電レプトンフレーバーの破れ
NMSSM に右巻きニュートリノを加えて拡張した ν NMSSM 模型における荷電レプトンフレーバーの破れをヒッグス質量を再現できるパラメータ領域と合わせて考えることで、好まれるパラメータ領域が ν MSSM の場合とどのように異なるのか議論する。
- 第 7 章：Supersymmetric Inverse Seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れ
Supersymmetric Inverse Seesaw 機構において、マヨラナ質量行列の構造が cLFV に与える影響について議論する。
- 第 8 章：まとめ
本論文の全体のまとめと今後の展望についてまとめる。

第I部

超対称性と荷電レプトンフレーバーの破れ

第 2 章

超対称標準模型

標準模型に超対称性を課して最小限拡張したものを最小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model : MSSM) と呼ぶ。この章ではまず超対称性を導入しそれが標準模型で現れる階層性問題をいかに解決するかを見る。その後で MSSM の簡単なレビューを行う。なお、SUSY の代表的なレビューとしては [3-7] などがある。また MSSM のレビューとしては [3, 8-16] などがある。

2.1 超対称性 (Supersymmetry)

この節では超対称性 (Supersymmetry : SUSY) を導入する。そしてがいかに階層性問題を解決するのを見る。

2.1.1 超対称性 (SUSY) とは

SUSY とはボソンとフェルミオンの間の対称性である。SUSY 演算子を $Q(\bar{Q})$ とし、フェルミオン、ボソンの状態をそれぞれ $|F\rangle$, $|B\rangle$ とする。次の変換でラグランジアンが不変であるとき理論は超対称性を持つという。

$$Q|B\rangle \rightarrow |F\rangle \quad (2.1.1)$$

$$Q|F\rangle \rightarrow |B\rangle \quad (2.1.2)$$

SUSY 変換や SUSY 代数の基礎部分は付録 2.A, 2.B に簡単にまとめている。

2.1.2 階層性問題 (Fine Tuning 問題)

2012 年、標準模型における最後の未発見だった Higgs 粒子が発見された。Higgs 粒子は標準模型における唯一のスカラー粒子である。スカラー粒子はループの効果によって次の様な補正を受ける。

$$m^2 = m_0^2 + \delta m^2 \quad (2.1.3)$$

$$\delta m^2 \sim -\lambda\Lambda^2 \quad (2.1.4)$$

理論の適用限界 (Λ) が GUT スケール ($\mathcal{O}(10^{15})\text{GeV}$) だとすると補正は $\mathcal{O}(10^{30})\text{GeV}^2$ となり、そこから電弱スケール ($\mathcal{O}(10^2)\text{GeV}$) の Higgs 質量を求めなければならない。摂動のすべての次数で $\mathcal{O}(10^{26})$ もの調整をして 125GeV 程度の Higgs 質量を出すのは非常に不自然なため、この不自然さは「階層性問題」または「fine tuning 問題」と呼ばれている。

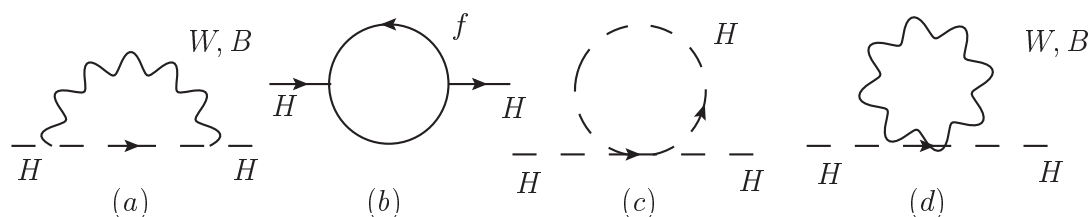


図 2.1 標準模型における Higg 粒子の自己エネルギー

階層性問題の詳細

ここではそもそもなぜ Higgs 粒子の質量だけが輻射補正に対して不安定なのかを説明する*1。次元を持った量が輻射補正に対して安定であるかそうでないかは、その量が natural なパラメータかそうでないかで決まる。では natural であるかどうかはどうやって判断するのか。それはその量をゼロとする極限をとった時に対称性が復活するかどうかで決まる。対称性が回復する時その量は natural であるという*2。このことを具体的に見るために標準模型における Higgs 粒子、フェルミオン、ゲージボソンの質量を例にとって見る。

質量 m を持つフェルミオンのラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{fermion}} &= \bar{\psi}i\partial_{\mu}\gamma^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}_L i\cancel{\partial}\psi_L + \bar{\psi}_R i\cancel{\partial}\psi_R - m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)\end{aligned}\quad (2.1.5)$$

であり、 $m \rightarrow 0$ の極限を取ると

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \bar{\psi}_L i\cancel{\partial}\psi_L + \bar{\psi}_R i\cancel{\partial}\psi_R \quad (2.1.6)$$

となる。このラグランジアンは次の変換で不変である。

$$\begin{cases} \psi_L \mapsto e^{i\theta_L}\psi \\ \psi_R \mapsto e^{i\theta_R}\psi \end{cases} \quad (2.1.7)$$

この変換でラグランジアンが不変なとき、ラグランジアンは「カイラル対称性」を持つと言う。つまりフェルミオン質量は $m \rightarrow 0$ 極限でカイラル対称性 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ が復活する natural なパラメータであることがわかる。

同様のことはゲージボソンにも言える。もともとゲージ対称性のためゲージボソンは質量項を持つことができないので、Higgs 機構を通じて質量を獲得している。標準模型ではゲージ対称性の自発的破れ

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em} \quad (2.1.8)$$

の過程で質量を得る。そのため $m \rightarrow 0$ 極限ではもともとあったゲージ対称性が復活すると考えることができる。よってゲージボソンの質量も natural なパラメータであると言える。

一方、Higgs 粒子 (スカラー場) のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{scalar}} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (2.1.9)$$

と書けるが、 $\mu \rightarrow 0$ 極限をとったところで何の対称性も復活しない。つまり Higgs 粒子の質量は natural なパラメータではないことがわかる。

*1 輻射補正に対して不安定というのは、輻射補正が 2 次発散を含むという意味である。

*2 「naturalness」の概念は t'Hooft によって提唱された [17]。

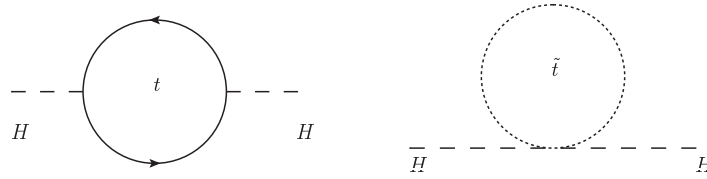


図 2.2 top,stop ループ

ではそもそもなぜ natural なパラメータが輻射補正に対して安定なのかというと、natural なパラメータに対する輻射補正は必ずそのパラメータに比例する形を取るからである。フェルミオン質量の場合だと輻射補正は

$$m = m_0 - m \cdot \mathcal{O} \left(\ln \left[\frac{\Lambda}{\Lambda_{EW}} \right] \right) \quad (2.1.10)$$

となる。これは対数発散しかしていないため輻射補正に対して安定であるといえる。この「naturalness」の視点から、階層性問題 (fine tuning 問題) は naturalness 問題とも呼ばれている。

2.1.3 SUSY における階層性問題

上で見たように Higgs 質量は natural な量ではなく輻射補正に対して安定ではない。しかし SUSY を考えることでこの問題を解決することができる。標準模型における Higgs の輻射補正は図 2.1 のダイアグラムからくる。その中で一番効くのが最も重いトップクォークからの寄与である。以下トップクォークの寄与のみを考える。

SUSY を考えるとその理論の中には超対称パートナーが現れる。超対称パートナーはもとの粒子と統計性が異なり、もとはフェルミオンの場合、その超対称パートナーはボソンになる。ボソンとフェルミオンではループの符号が逆なため、そのダイアグラムを足すことで標準模型で現れる発散をキャンセルすることができる。つまり SUSY では Higgs 粒子の二次発散の問題は自然と解決される。もう少し定量的に見てみるとトップクォークからのループの寄与は図 2.2 左で与えられ

$$\delta m^2 = -\frac{3}{4\pi} y_t^2 \Lambda_{SM}^2 \quad (2.1.11)$$

のように書ける。一方、トップクォークの超対称パートナーであるストップのループは図 2.2 右で与えられ

$$\delta m^2 = \frac{3}{4\pi} y_t^2 \Lambda_{SM}^2 \quad (2.1.12)$$

と書ける。上で述べたようにボソンとフェルミオンでループの符号が違うので、ヒッグス粒子の 2 次発散はキャンセルすることになり、結果として階層性問題は解決される。

2.2 最小超対称標準模型 (MSSM)

標準模型を超対称性を持つように最小限に拡張した模型を最小超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model : MSSM) と呼ぶ。以下、そのラグランジアンと模型に現れる粒子、パラメータをまとめる。

2.2.1 MSSM におけるラグランジアン

この小節では MSSM におけるラグランジアンを示す。

SF	Spin $\frac{1}{2}$	Spin 1	$SU(N)$	Coupling	Name
\hat{B}	$\lambda_{\hat{B}}$	B	$U(1)$	g_1	hypercharge
\hat{W}	$\lambda_{\hat{W}}$	W	$SU(2)$	g_2	left
\hat{g}	$\lambda_{\hat{g}}$	g	$SU(3)$	g_3	color

表 2.1 MSSM に含まれる vector superfield

SF	Spin 0	Spin $\frac{1}{2}$	Generations	$(U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3))$
\hat{Q}	\tilde{Q}	q	3	$(\frac{1}{6}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$
\hat{L}	\tilde{L}	l	3	$(-\frac{1}{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$
\hat{H}_d	H_d	\tilde{H}_d	1	$(-\frac{1}{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$
\hat{H}_u	H_u	\tilde{H}_u	1	$(\frac{1}{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$
\hat{D}	\tilde{D}_R^*	d_R^*	3	$(\frac{1}{3}, \mathbf{1}, \mathbf{\bar{3}})$
\hat{U}	\tilde{U}_R^*	u_R^*	3	$(-\frac{2}{3}, \mathbf{1}, \mathbf{\bar{3}})$
\hat{E}	\tilde{E}_R^*	e_R^*	3	$(1, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

表 2.2 MSSM に含まれる chiral superfield

スーパーポテンシャル

$\mathcal{N} = 1$ の SUSY に関して言えば、SUSY 不変なラグランジアンは正しくスーパーポテンシャルを書けば自然と求まる。ゲージ対称性を課するのであれば、ゲージ変換に対してラグランジアンが不変になるようにゲージ場を導入すれば良い。MSSM に含まれる Superfield は表 2.1, 表 2.2 でまとめる。それらを用いて時 MSSM におけるスーパーポテンシャルは次のようになる。

$$W = \mu \hat{H}_u \cdot \hat{H}_d - Y_d \hat{D} \hat{Q} \cdot \hat{H}_d - Y_e \hat{E} \cdot \hat{L} \hat{H}_d + Y_u \hat{U} \hat{Q} \cdot \hat{H}_u \quad (2.2.1)$$

これは明らかに $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ singlet になっている。また「 \cdot 」は $SU(2)$ の singlet を作る操作を表す。

ソフトブレーキング項

SUSY を考えた時、既存の粒子に対する超対称パートナーが現れる。それは統計性以外は量子数が全く同じ粒子である。しかし今までの実験で電子と同じ質量のスカラ電子は発見されていないように、超対称パートナーは見つかっていない。つまり SUSY は破れていなければならないことになる。SUSY がどのようにして破れるか、その機構の詳細は未だ明らかになっていないが、どこか高いスケールで SUSY が破れている必要がある。低エネルギーの有効理論として考える場合は、ラグランジアンに手で SUSY を破る項を入れることになる。もちろん SUSY を導入した理由の一つに階層性問題の解決があったので、あくまで階層性問題を解決できるような形で SUSY を破る項を導入する必要がある。そのような項を一般に「ソフトブレーキング項」と呼んでいる。以下では可能なソフトブレーキング項を列挙する。

- ゲージノ質量項

$$\mathcal{L}_{gaugino} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 M_i \bar{\lambda}_i \lambda_i = -\frac{1}{2} (M_3 \tilde{g} \tilde{g} + M_2 \tilde{W} \tilde{W} + M_1 \tilde{B} \tilde{B} + \text{h.c.}) \quad (2.2.2)$$

- スカラー質量項

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{scalar} &= -\sum_{ij} \tilde{m}_{i,j}^2 \phi_i^* \phi_j \\ &= -\tilde{Q}_i^\dagger \tilde{m}_{\tilde{Q}}^{2(ij)} \tilde{Q}_j - \tilde{L}_i^\dagger \tilde{m}_{\tilde{L}}^{2(ij)} \tilde{L}_j - \tilde{u}_i^\dagger \tilde{m}_{\tilde{u}}^{2(ij)} \tilde{u}_j - \tilde{d}_i^\dagger \tilde{m}_{\tilde{d}}^{2(ij)} \tilde{d}_j - \tilde{e}_i^\dagger \tilde{m}_{\tilde{e}}^{2(ij)} \tilde{e}_j\end{aligned}\quad (2.2.3)$$

- ヒッグス質量項

$$\mathcal{L}_{higgs} = -\tilde{m}_{H_d}^2 H_d^\dagger H_d - \tilde{m}_{H_u}^2 H_u^\dagger H_u - (B\mu H_d \cdot H_u + \text{h.c.}) \quad (2.2.4)$$

- スカラー3点結合 (Aterm)

$$\mathcal{L}_A = -(\tilde{u}_i a_u^{(ij)} \tilde{Q}_j \cdot H_u + \tilde{d}_i a_d^{(ij)} \tilde{Q}_j \cdot H_d + \tilde{e}_i a_e^{(ij)} \tilde{L}_j \cdot H_d + \text{h.c.}) \quad (2.2.5)$$

$$= -(\tilde{u}_i A_u^{(ij)} f_u^{(ij)} \tilde{Q}_j \cdot H_u + \tilde{d}_i A_d^{(ij)} A_d^{(ij)} \tilde{Q}_j \cdot H_d + \tilde{e}_i A_e^{(ij)} A_e^{(ij)} \tilde{L}_j \cdot H_d + \text{h.c.}) \quad (2.2.6)$$

2.2.2 MSSM ラグランジアンまとめ

MSSM のラグランジアンをまとめる。MSSM のラグランジアンは2つの部分から成る。一つが SUSY 不変なラグランジアンを作る時の一般的な手順を踏んで出てくる項 \mathcal{L}_{SUSY} であり、もうひとつがソフトブレーキング項 \mathcal{L}_{soft} である。

$$\mathcal{L}_{MSSM} = \mathcal{L}_{SUSY} + \mathcal{L}_{soft} \quad (2.2.7)$$

Superpotential から SUSY 不変なラグランジアンを作り方の詳細には触れずここでは結果だけを書く*3。

$$\mathcal{L}_{SUSY} = \mathcal{W}(\Phi_i)|_F + \sum_i \sum_j \Phi_i^\dagger e^{2q\nu_j} \Phi_i + \sum_j \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathcal{F}_j^a \mathcal{F}_{aj}) \quad (2.2.8)$$

Φ はカイラルスーパーフィールドの物質場であり、 ν_j はベクトルスーパーフィールドであるゲージ場を表す。 i, j はそれぞれスーパーフィールドの種類を表し、 a は非可換ゲージの足である。 \mathcal{F} はベクトルスーパーフィールドから作ることができる field strength tensor である。

ソフトブレーキング項をまとめると次のようになる。

$$\mathcal{L}_{soft} = \mathcal{L}_{gaugino} + \mathcal{L}_{scalar} + \mathcal{L}_{higgs} + \mathcal{L}_A \quad (2.2.9)$$

以上、具体的な形は示していないが、これを成分場で書下してやると欲しいラグランジアンが手に入る。

2.2.3 MSSM における Higgs Sector

MSSM における Higgs ポテンシャルは次のように与えられる。

$$\begin{aligned}V &= m_1^2 H_d^\dagger H_d + m_2^2 H_u^\dagger H_u + (m_3^2 H_d \cdot H_u + \text{h.c.}) \\ &\quad + \frac{1}{8} g^2 (H_d^\dagger \tau^a H_d + H_u^\dagger \tau^a H_u)^2 + \frac{1}{8} g'^2 (H_d^\dagger H_d - H_u^\dagger H_u)^2\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

ここで、

$$m_1^2 = \tilde{m}_{H_d}^2 + |\mu|^2 \quad (2.2.11)$$

$$m_2^2 = \tilde{m}_{H_u}^2 + |\mu|^2 \quad (2.2.12)$$

$$m_3^2 = B\mu \quad (2.2.13)$$

*3 詳しくは [3-16] を参照

である。

$$H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}, \quad H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

Higgs 場の真空期待値 (vacuum expectation value : vev) を

$$\langle H_d \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_u \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}v_u \end{pmatrix} \quad (2.2.15)$$

とすることで、標準模型における $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ を再現できる。

Higgs ポテンシャルの中性部分だけを抜き出すと

$$V = m_1^2 |H_d^0|^2 + m_2^2 |H_u^0|^2 + (m_3^2 H_d^0 H_u^0 + \text{h.c.}) + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(|H_d^0|^2 - |H_u^0|^2)^2 \quad (2.2.16)$$

となる。この形から明らかなように $|H_d^0|^2 = |H_u^0|^2$ の時に、4次の項が消えてしまい、この方向はポテンシャルの平坦な方向であることがわかる。その場合、この方向にポテンシャルが落ち込まない条件、すなわち2次の項が正である条件を課さなければならない。

$$m_1^2 + m_2^2 - 2|m_3^2| > 0 \quad (2.2.17)$$

また、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ が破れるためには質量固有値が1つだけ負であることが必要である。すなわち質量行列の行列式が負でなければならないので、

$$|m_3^2|^2 > m_1^2 m_2^2 \quad (2.2.18)$$

が必要となる。上の真空期待値を用いてポテンシャルを書きなおすと

$$V = \frac{1}{2}m_1^2 v_d^2 + \frac{1}{2}m_2^2 v_u^2 + m_3^2 v_d v_u + \frac{1}{32}(g^2 + g'^2)(v_d^2 - v_u^2)^2 \quad (2.2.19)$$

となり、これが最小になる条件は v_d, v_u の微分がゼロなので

$$m_1^2 v_d + m_3^2 v_u + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(v_d^2 - v_u^2)v_d = 0 \quad (2.2.20)$$

$$m_2^2 v_u + m_3^2 v_d - \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(v_d^2 - v_u^2)v_u = 0 \quad (2.2.21)$$

となる。

2.2.4 Higgs 場の質量

中性 Higgs

標準模型では、Higgs 場は複素スカラー場の doublet として導入していた。一方、MSSM ではスーパーポテンシャルをカイラルスーパーフィールドで書くため、標準模型とは違い Higgs doublet 1つだけではうまくいかない。Higgs doublet を2つ入れている。これが標準模型との最大の違いである。そのおかげで実成分としてのヒッグス場は全部で8個あることになる。

$$H_d^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{iA_d/v_d}(v_d + h_d(x)) \quad (2.2.22)$$

$$H_u^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{iA_u/v_u}(v_u + h_u(x)) \quad (2.2.23)$$

と非線形表現をとって真空から場を展開する。式 (2.2.16) よりポテンシャルは

$$V_u = \frac{1}{2}m_1^2 h_d^2 + \frac{1}{2}m_2^2 h_u^2 - \frac{v_d}{v_u}m_3^2 \left(\frac{A_d}{v_d} + \frac{A_u}{v_u} \right)^2 + m_3^2 h_d h_u + \frac{1}{16}(g^2 + g'^2)[2(v_u h_u - v_d h_d)^2 + (v_u^2 - v_d^2)(h_u^2 - h_d^2)] \quad (2.2.24)$$

となる。 A_d, A_u の質量項は、質量固有状態として

$$A \equiv A_d \sin \beta + A_u \cos \beta, \quad \tan \beta \equiv \frac{v_u}{v_d} \quad (2.2.25)$$

が質量

$$m_A^2 = B\mu \frac{v_d^2 + v_u^2}{v_d v_u} = \frac{2B\mu}{\sin 2\beta} \quad (2.2.26)$$

を持つことがわかる。これに直行する成分は、今考えているのが Higgs の中性部分であることから、Z ボソンに吸収される南部・ゴールドストーンボソン (NG ボソン) になることがわかる。 h_d, h_u の質量に関しては式 (2.2.24) の残りの部分を見れば明らかであり、

$$V = \frac{1}{2}(m_A^2 \sin^2 \beta + m_Z^2 \cos^2 \beta)h_1^2 + \frac{1}{2}(m_Z^2 \sin^2 \beta + m_A^2 \cos^2 \beta)h_2^2 - (m_A^2 + m_Z^2) \sin \beta \cos \beta h_d h_u \quad (2.2.27)$$

となる。これを対角化することで質量固有状態 h, H の質量を求めることができ、その値は

$$m_{H,h}^2 = \frac{1}{2} \left[m_A^2 + m_Z^2 \pm \sqrt{(m_A^2 + m_Z^2)^2 - 4m_A^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta} \right] \quad (2.2.28)$$

となる。ここで注目する点は、 A, H の質量は $B\mu$ を大きくすればいくらでも大きな値を取ることができる一方で、 h はそうはいかないことである。なぜならどんなに頑張っても

$$m_h^2 \leq m_Z^2 \cos^2 \beta \quad (2.2.29)$$

となるからである ($m_A^2 > m_Z^2$)。結局 Higgs の質量は m_Z^2 以下にならなければならない、発見された Higgs 粒子の質量と矛盾するように見える。実際はトップ湯川が大きいため、そのループの効果が MSSM における 1 ループヒッグス質量は

$$m_h^2 \approx M_Z^2 \cos^2 2\beta + \frac{3}{4\pi^2} \frac{m_t^2}{v^2} \left[\frac{1}{2} \tilde{X}_t + t + \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{3}{2} \frac{m_t^2}{v^2} - 32\pi\alpha_3 (\tilde{X}_t t + t^2) \right) \right] \quad (2.2.30)$$

となり、ヒッグス質量を m_Z^2 よりも大きくすることが出来る [18–23]。ここで

$$t = \log \frac{M_{\text{SUSY}}^2}{m_t^2} \quad (2.2.31)$$

である。またパラメータ \tilde{X}_t は

$$\tilde{X}_t = \frac{2\tilde{A}_t^2}{M_{\text{SUSY}}^2} \left(1 - \frac{\tilde{A}_t^2}{12M_{\text{SUSY}}^2} \right) \quad (2.2.32)$$

$$\tilde{A}_t = A_t - \mu \cot \beta \quad (2.2.33)$$

である。

荷電 Higgs

標準模型において、Higgs 場は実スカラーとして4つの成分を持っていた。その内の1つが Higgs 粒子として振る舞い、残りの3つはゲージ場に吸収される NG ボソンと考えられる。 $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ を実現するに荷電 Higgs はすべてゲージ場に吸収されたことになる。一方、MSSM では Higgs 場は実スカラーとして8つの成分を持っているので、ゲージ場3つでは吸収しきれない。よって荷電 Higgs が必然的に現れることになる。荷電 Higgs に関するポテンシャルは2次の部分だけ書き下すと

$$V_u = (m_A^2 + m_W^2) \sin^2 \beta |H_d^-|^2 + (m_A^2 + m_W^2) \cos^2 \beta |H_u^+|^2 + (m_A^2 + m_W^2) \sin \beta \cos \beta (H_u^+ H_d^- + H_u^{+\dagger} H_d^{-\dagger}) \quad (2.2.34)$$

となる。質量固有状態を χ^+, H^+ した時、それぞれの質量は行列を対角化することにより

$$m_{H^+}^2 = m_A^2 + m_W^2, \quad m_{\chi^+}^2 = 0 \quad (2.2.35)$$

となる。つまり χ^\pm がウィークボソン (W^\pm) に吸収される NG ボソンになっている事がわかる。

まとめ

以上の話をまとめると、MSSM では Higgs 場は実スカラー場として 8 つの成分を持つ。それぞれ質量固有状態に直すと $h, H, A, Z, \chi^\pm, H^\pm$ であり、そのうち Z, χ^\pm がゲージ場に吸収される NG ボソンとなっている。よって標準模型とは違い MSSM では Higgs 粒子が 5 つあることになる。

2.2.5 ゲージボソン (Z, W^\pm) の質量

ゲージ場の質量項は、共変微分を通しての Higgs 場とのカップリングによって起こる。必要な項を抜き出して書くと

$$\begin{aligned} & |D_\mu H_d|^2 + |D_\mu H_u|^2 \\ &= \left| \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g B_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^a \tau^a \right) H_d \right|^2 + \left| \left(\partial_\mu + \frac{i}{2} g B_\mu - \frac{i}{2} A_\mu^a \tau^a \right) H_u \right|^2 \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

この式に vev を与えることで、質量項は

$$\frac{v_d^2 + v_u^2}{8} (b_\mu A_\mu^3) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\mu \\ A^{3\mu} \end{pmatrix} + \frac{g'^2}{8} (v_d^2 + v_u^2) ((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2) \quad (2.2.37)$$

となる。質量固有状態は

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \pm A_\mu^2) \quad (2.2.38)$$

$$A_\mu \equiv B_\mu \cos \theta_W + A_\mu^3 \sin \theta_W \quad (2.2.39)$$

$$Z_\mu \equiv -B_\mu \sin \theta_W + A_\mu^3 \cos \theta_W \quad (2.2.40)$$

であり、それぞれの質量は

$$m_Z^2 = \frac{v_d^2 + v_u^2}{4} (g^2 + g'^2), \quad m_W^2 = \frac{v_d^2 + v_u^2}{4} g'^2, \quad m_A^2 = 0 \quad (2.2.41)$$

と求まる。結果は明らかに標準模型と一致する。

2.2.6 超対称粒子 (SUSY particle)

MSSM では標準模型に現れる粒子の超対称パートナーが存在する。以下ではその粒子について簡潔にまとめる。本論文では超対称パートナーには「 $\tilde{}$ 」をつけて区別することとする。

スクォーク、スレプトン (Squarks and Sleptons)

スクォーク (Squarks)、スレプトン (Sleptons) は標準模型のクォーク、レプトンの超対称パートナーであり、スピン 0 のボソンである。接頭辞の「ス」で超対称パートナーであることを示す。スクォーク、スレプトンは合わせてスフェルミオンと呼ばれる。スフェルミオンの質量行列は

$$-\mathcal{L}_{\text{mass}} = (\tilde{f}_L^* \ \tilde{f}_R^*) \begin{pmatrix} m_{\tilde{f}_L}^2 & m_{\tilde{f}_{LR}}^2 \\ m_{\tilde{f}_{LR}}^{2*} & m_{\tilde{f}_R}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} \quad (2.2.42)$$

$$m_{\tilde{f}_L}^2 = \tilde{m}_{\tilde{f}_L}^2 + m_f^2 + m_Z^2 \cos 2\beta (T_{3L} - Q \sin^2 \theta_W) \quad (2.2.43)$$

$$\begin{aligned} m_{\tilde{f}_R}^2 &= \tilde{m}_{\tilde{f}_R}^2 + m_f^2 + m_Z^2 \cos 2\beta (T_{3R} - Q \sin^2 \theta_W) \\ &= \tilde{m}_{\tilde{f}_R}^2 + m_f^2 + m_Z^2 \cos 2\beta Q \sin^2 \theta_W \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

$$m_{\tilde{f}_{LR}}^2 = \begin{cases} -m_u(A_u^* + \mu \cot \beta) & f = u \\ -m_f(A_f^* + \mu \tan \beta) & f = d, l \end{cases} \quad (2.2.45)$$

のように書くことができる*4。

イーノ (Inos)

イーノ (Inos) とは、標準模型でボソンだった粒子の超対称パートナーである。接尾辞 (-ino) で表す。例えば Higgs 粒子の超対称パートナーはヒッグシーノ (Higgsino)、ゲージボソンの超対称パートナーはゲージーノ (gaugino) となる。

電荷を持つものが2種類あり、ヒッグシーノ (higgsino)、ウィーノ (wino) であり、それぞれ $\tilde{H}_1^-, \tilde{H}_2^+, \tilde{W}^\pm$ と表す。電荷を持たないものが4種類あり、中性ヒッグシーノ ($\tilde{H}_{1,2}^0$) と中性ゲージノ (\tilde{B}, \tilde{W}^0) である。ヒッグシーノやゲージーノはそれぞれ質量固有状態にはなっておらず、電荷を持つものの質量固有状態としてはチャージーノ (chargino)、電荷を持たないものとしてはニュートラリーノ (Neutralino) になる。最も軽いニュートラリーノは LSP の場合にダークマターの候補にもなっている。

● ゲージーノ質量 (gaugino mass)

ゲージーノの質量は SUSY のソフトブレイキング項から来ている。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(M\lambda_L \cdot \lambda_L + \text{h.c.}) \quad (2.2.46)$$

$$\lambda_L \cdot \lambda_L \equiv -\lambda_L^T C^\dagger \lambda_L = \bar{\lambda}_R \lambda_L \quad (2.2.47)$$

● ヒッグシーノ質量 (higgsino mass)

ヒッグシーノの質量はスーパーポテンシャルから現れる

$$W = \mu \tilde{H}_d \cdot \tilde{H}_u \quad (2.2.48)$$

$$-\mathcal{L}_m = -\mu(\tilde{H}_{dL}^0 \cdot \tilde{H}_{uL}^0 - \tilde{H}_{dL}^- \cdot \tilde{H}_{uL}^+) + \text{h.c.} \quad (2.2.49)$$

ニュートラリーノ (Neutralino : $\tilde{\chi}^0$)

ニュートラリーノは中性ヒッグスと中性ゲージーノの質量固有状態である。非対角成分はそれぞれの相互作用項から出てくる。

$$-\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}(\tilde{B}_L \ \tilde{W}_L^0 \ \tilde{H}_{1L}^0 \ \tilde{H}_{2L}^0) \cdot \mathcal{M}_N \begin{pmatrix} \tilde{B}_L \\ \tilde{W}_L^0 \\ \tilde{H}_{1L}^0 \\ \tilde{H}_{2L}^0 \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.2.50)$$

ここで \mathcal{M}_N は次のように与えられている。

$$\mathcal{M}_N = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_Z \sin \theta_W \cos \beta^* & m_Z \sin \theta_W \sin \beta^* \\ 0 & M_2 & m_Z \cos \theta_W \cos \beta^* & -m_Z \cos \theta_W \sin \beta^* \\ -m_Z \sin \theta_W \cos \beta^* & m_Z \cos \theta_W \cos \beta^* & 0 & -\mu \\ m_Z \sin \theta_W \sin \beta^* & -m_Z \cos \theta_W \sin \beta^* & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

*4 ここでは1世代しか考えていない。本来は世代の足がつく

$$(2.2.51)$$

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{if the mass eigenvalue is positive} \\ i & \text{if the mass eigenvalue is negative} \end{cases} \quad (2.2.52)$$

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M}_N &= \mu[-M_1 M_2 \mu + (M_1 \cos^2 \theta_W + M_2 \sin^2 \theta_W) m_Z^2 \sin 2\beta] \\ &= -\frac{1}{3} \mu M_2 \tan^2 \theta_W (5M_2 \mu - 8m_W^2 \sin 2\beta) \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

行列 \mathcal{M}_N を対角化するような基底をとった時、次のようになる。

$$m_{\tilde{\chi}_1^0} = M_1 + \frac{m_Z^2 \sin^2 \theta_W}{M_1^2 - \mu^2} (M_1 + \mu \sin 2\beta) \quad (2.2.54)$$

$$m_{\tilde{\chi}_2^0} = M_2 + \frac{m_Z^2 \cos^2 \theta_W}{M_2^2 - \mu^2} (M_2 + \mu \sin 2\beta) \quad (2.2.55)$$

$$m_{\tilde{\chi}_3^0} = \mu + \frac{m_Z^2 (1 + \sin 2\beta)}{2(\mu - M_1)(\mu - M_2)} (\mu - M_{\tilde{\gamma}}) \quad (2.2.56)$$

$$m_{\tilde{\chi}_4^0} = \mu + \frac{m_Z^2 (1 - \sin 2\beta)}{2(\mu + M_1)(\mu + M_2)} (\mu + M_{\tilde{\gamma}}) \quad (2.2.57)$$

これがニュートラリーノの質量である。対角化する行列などを以下でまとめる。

$$U_N = \Phi_N O_N \quad (2.2.58)$$

$$\Phi_N = \text{diag.}(1 \ 1 \ 1 \ i) \quad (2.2.59)$$

$$O_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{m_Z s_W}{M_1^2 - \mu^2} (M_1 c_\beta + \mu s_\beta) & \frac{m_Z s_W}{M_1^2 - \mu^2} (M_1 s_\beta + \mu c_\beta) \\ 0 & 1 & \frac{m_Z c_W}{M_2^2 - \mu^2} (M_2 c_\beta + \mu s_\beta) & -\frac{m_Z s_W}{M_2^2 - \mu^2} (M_2 s_\beta + \mu c_\beta) \\ \frac{m_Z s_W c_{\beta'}}{M_1 - \mu} & -\frac{m_Z c_W c_{\beta'}}{M_2 - \mu} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{m_Z s_W s_{\beta'}}{M_1 + \mu} & \frac{m_Z c_W s_{\beta'}}{M_2 + \mu} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.2.60)$$

$$O_N \mathcal{M}_N^T = \text{real diagonal} \quad (2.2.61)$$

$$U_N^* \mathcal{M}_N^\dagger = \text{positive diagonal} \quad (2.2.62)$$

チャージーノ (Chargino : $\tilde{\chi}^\pm$)

チャージーノは荷電ヒッグシーノとウィーノから出てくる。ニュートラリーノの場合と同様、非対角成分は各々の相互作用項から出てくる。

$$-\mathcal{L}_m = (\tilde{W}_R^- \ \tilde{H}_{2R}^-) \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2} m_W \cos \beta^* \\ \sqrt{2} m_W \sin \beta^* & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{W}_L^- \\ \tilde{H}_{1L}^- \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.2.63)$$

ここで \mathcal{M}_C は次のように与えられている。

$$\mathcal{M}_C = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2} m_W \cos \beta^* \\ \sqrt{2} m_W \sin \beta^* & \mu \end{pmatrix} \quad (2.2.64)$$

ニュートラリーノの場合と同様に、この行列を対角化することでチャージーノが得られる。

$$O_R \mathcal{M}_C O_L^T = \text{diagonal} \quad (2.2.65)$$

$$O_{L,R} = \begin{pmatrix} \cos \phi_{L,R} & \sin \phi_{L,R} \\ -\sin \phi_{L,R} & \cos \phi_{L,R} \end{pmatrix} \quad (2.2.66)$$

$$\tilde{\chi}_i^- = \tilde{\chi}_{iL}^- + \tilde{\chi}_{iR}^-, \quad i = 1, 2 \quad (2.2.67)$$

$$\tilde{\chi}_{1L}^- = \tilde{W}_L^- \cos \phi_L + \tilde{H}_{1L}^- \sin \phi_L \quad (2.2.68)$$

$$\tilde{\chi}_{1L}^- = -\tilde{W}_L^- \sin \phi_L + \tilde{H}_{1L}^- \cos \phi_L \quad (2.2.69)$$

$$m_{\tilde{\chi}_{1,2}}^2 = \frac{1}{2}(M_2^2 + \mu^2 + 2m^2 \mp \Delta_C) \quad (2.2.70)$$

$$\begin{aligned} \Delta_C^2 &= (M_2^2 + \mu^2 + 2m_W^2)^2 - 4(M_2\mu - m_W^2 \sin 2\beta)^2 \\ &= [(M_2 + \mu)^2 + 4m_W^2 \sin^2(\beta - \frac{\pi}{4})][(M_2 - \mu)^2 + 4m_W^2 \cos^2(\beta - \frac{\pi}{4})] \\ &= (M_2^2 - \mu^2)^2 + 4m_W^2(M_2^2 + \mu^2 + 2M_2\mu \sin \beta) + 4m_W^4 \cos^2 2\beta \end{aligned} \quad (2.2.71)$$

となる。

2.3 まとめ

この章では SUSY の導入を行い、それがいかに標準模型が抱える Higgs 粒子の階層性問題を解決することが出来るかを見た。MSSM は標準模型の Supersymmetric なものとしては最も自然であり、非常に多くの先行研究がなされている。最後にまとめとして MSSM における particle contents を表 2.4 にまとめる。

Name	Type	complex/real	Generations	Indices
\tilde{d}	Scalar	complex	6	generation, 6, color, 3
$\tilde{\nu}$	Scalar	complex	3	generation, 3
\tilde{u}	Scalar	complex	6	generation, 6, color, 3
\tilde{e}	Scalar	complex	6	generation, 6
h	Scalar	real	2	generation, 2
A^0	Scalar	real	2	generation, 2
H^-	Scalar	complex	2	generation, 2
\tilde{g}	Fermion	Majorana	1	color, 8
ν	Fermion	Dirac	3	generation, 3
$\tilde{\chi}^0$	Fermion	Majorana	4	generation, 4
$\tilde{\chi}^-$	Fermion	Dirac	2	generation, 2
e	Fermion	Dirac	3	generation, 3
d	Fermion	Dirac	3	generation, 3, color, 3
u	Fermion	Dirac	3	generation, 3, color, 3
g	Vector	real	1	color, 8, lorentz, 4
γ	Vector	real	1	lorentz, 4
Z	Vector	real	1	lorentz, 4
W^-	Vector	complex	1	lorentz, 4
η^G	Ghost	real	1	color, 8
η^γ	Ghost	real	1	
η^Z	Ghost	real	1	
η^-	Ghost	complex	1	
η^+	Ghost	complex	1	

表 2.4 MSSM における particle contents

付録 2.A 超対称性 (SUSY)

この節では超対称性 (SUSY) の導入を行う。なお、ここで扱うのはグローバルな超対称性だけである。

2.A.1 超対称性 (SUSY) とは

超対称性 (SUSY) とはボソンとフェルミオンの間の対称性のことである。これはあるボソン場 (今はスカラー場) を変換すると、その変化分がフェルミオン場 (Weyl 場) になるという事を意味する。式で書くと

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi \quad (2.A.1)$$

$$\delta\phi \simeq \zeta\chi \quad (2.A.2)$$

である。ここで ζ は無限小パラメータである。両辺の次元、スピノルの足を考えることで

$$\delta\phi = \zeta^a \chi_a = \zeta \cdot \chi \quad (2.A.3)$$

であればいいことがわかる。つまり無限小パラメータ ζ も 2 成分であり

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \quad (2.A.4)$$

次元 $-\frac{1}{2}$ を持つ量であることがわかる。

フェルミオン \rightarrow ボソン

今度は逆に、フェルミオンの微小変化分がボソンになるということを見る。

$$\delta\chi \simeq C\zeta\phi^\dagger \quad (2.A.5)$$

右辺が次元 1 足りないので、 ∂_μ を入れる。ここでほかの場を入れないのは、変換を線形にしたいためである。 ∂_μ を入れると、今度は両辺でローレンツ変換性が異なる。そのため無次元でローレンツ添え字を持つ量を入れる必要がある。それを $\bar{\sigma}^\mu$ とする。

$$\delta\chi \simeq C\bar{\sigma}^\mu \zeta \partial_\mu \phi^\dagger \quad (2.A.6)$$

添え字を明示して書くと

$$\delta\chi_a \simeq C(\partial_\mu \phi^\dagger)(\bar{\sigma}^\mu)^{ab} \zeta_b \quad (2.A.7)$$

添え字の位置と種類が合わないので、種類を合わせて (\dagger をとる) 添え字を下げる ($\epsilon_{ab} = (-i\sigma^2)_{ab}$ を作用)。つまり

$$\delta\chi_a \simeq \epsilon_{ac} (C(\partial_\mu \phi^\dagger)(\bar{\sigma}^\mu)^{cb} \zeta_b)^{\dagger T} \quad (2.A.8)$$

結局

$$\delta\chi_a = -C^*(\partial_\mu \phi) \sigma^\mu i \sigma^2 \zeta^* \quad (2.A.9)$$

となる。あとは係数 C を決めればよい。これは方針だけ示す。超対称性を含んだ一番単純なラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger + \chi^\dagger i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \quad (2.A.10)$$

である。このラグランジアンが SUSY 変換に対して不変になる、つまり $\delta\mathcal{L} = 0$ になるように C を決めればよく、結果は

$$C = -i \quad (2.A.11)$$

である。以上 SUSY 変換をまとめると

$$\delta\phi = \zeta \cdot \chi \quad (2.A.12)$$

$$\delta\phi^\dagger = \bar{\zeta} \cdot \bar{\chi} \quad (2.A.13)$$

$$\delta\chi = -i(\partial_\mu\phi)\sigma^\mu i\sigma^2\zeta^* \quad (2.A.14)$$

$$\delta\chi^\dagger = -i(\partial_\mu\phi^\dagger)\zeta^T i\sigma^2\sigma^\mu \quad (2.A.15)$$

となる。

付録 2.B SUSY 代数

SUSY 代数、つまり SUSY のチャージ (生成子) の (反) 交換関係を導出するのがこの節の目的である。代数構造の導出は前に述べた 2 つの方法で行う。なお、本論文では $\mathcal{N} = 1$ SUSY のみを扱うこととする。

2.B.1 場の変換 \Rightarrow 代数構造

場の変換から SUSY の代数を求める。 $\mathcal{N} = 1$ SUSY では無限小パラメータが ζ, ζ^* 、それぞれ 2 成分ずつあるので計 4 つある。よってチャージも 4 つある。 $\mathcal{N} = 2$ 以上の SUSY を考えるとチャージの数が増える。SUSY におけるチャージのことを超電荷 (スーパーチャージ : supercharge) と呼ぶ。

$$U_\zeta = \exp(iQ \cdot \zeta + i\bar{Q} \cdot \bar{\zeta}) \quad (2.B.1)$$

とする。 $\pm[\epsilon \cdot Q, \phi] = -i\delta\phi$ から

$$[Q \cdot \zeta + \bar{Q} \cdot \bar{\zeta}, \phi] = -i\delta\phi \quad (2.B.2)$$

$$[Q \cdot \zeta + \bar{Q} \cdot \bar{\zeta}, \chi] = -i\delta\chi \quad (2.B.3)$$

以前求めた $\delta\phi, \delta\chi$ を代入すると

$$[Q \cdot \zeta + \bar{Q} \cdot \bar{\zeta}, \phi] = -i\zeta \cdot \chi \quad (2.B.4)$$

$$[Q \cdot \zeta + \bar{Q} \cdot \bar{\zeta}, \chi] = -i(\partial_\mu\phi)\sigma^\mu\sigma^2\zeta^* \quad (2.B.5)$$

つまり

$$[Q \cdot \zeta, \phi] = -i\zeta \cdot \chi \quad (2.B.6)$$

$$[\bar{Q} \cdot \bar{\zeta}, \chi] = -i(\partial_\mu\phi)\sigma^\mu\sigma^2\zeta^* \quad (2.B.7)$$

$$[\bar{Q} \cdot \bar{\zeta}, \phi] = [Q \cdot \zeta, \chi] = 0 \quad (2.B.8)$$

である。あとは

$$U_\beta = \exp(iQ \cdot \beta + i\bar{Q} \cdot \bar{\beta}) \quad (2.B.9)$$

として $(\delta_\beta\delta_\zeta\phi - \delta_\zeta\delta_\beta\phi)$, $(\delta_\beta\delta_\zeta\chi - \delta_\zeta\delta_\beta\chi)$ を計算すれば (反) 交換関係が求まる。

$$\{Q_a, Q_b\} = 0 \quad (2.B.10)$$

$$\{Q_a^\dagger, Q_b^\dagger\} = 0 \quad (2.B.11)$$

$$\{Q_a, Q_b^\dagger\} = (\sigma^\mu)_{ab}P_\mu \quad (2.B.12)$$

ポアンカレ代数との交換関係

次に SUSY の生成子とポアンカレ群の生成子 P_μ , $M^{\mu\nu}$ の (反) 交換関係を見る。やることは上の議論と全く同じなのでここでは結果だけ示す。

$$[Q_a, P_\mu] = 0 \quad (2.B.13)$$

$$[Q_a^\dagger, P_\mu] = 0 \quad (2.B.14)$$

$$[Q_a, M_{\mu\nu}] = (\sigma_{\mu\nu})_a^b Q_b \quad (2.B.15)$$

$$[\bar{Q}^{\dot{a}}, M_{\mu\nu}] = (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}}_{\dot{b}} \bar{Q}^{\dot{b}} \quad (2.B.16)$$

補助場 (Auxiliary Field) と off-shell 条件

実はここまでの話はスピノル場が on-shell でしか成り立たず off-shell では成り立たない。なぜなら Weyl 場 χ は複素 2 成分、つまり実数では 4 個の自由度を持っている。しかしスカラー場 ϕ は 2 つの自由度しか持っておらず、一致していない。仮に Weyl スピノルが運動方程式に従う、つまり on-shell であるならば

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi = 0 \quad (2.B.17)$$

が成り立ち、2 つの拘束条件を与える。結果、自由度は 2 つとなりスカラー場のそれと一致する。

SUSY 代数が off-shell でも成り立つようにするにはスカラー場の自由度を 2 つ増やせばよく、またその自由度は on-shell で消える必要がある。一般に on-shell の自由度を持たない場のことを補助場 (auxiliary field) と言う。つまり off-shell でも SUSY 代数が成り立つようにするには自由度を 2 つ持った、言い換えると複素スカラー場の補助場を導入すれば良いことがわかる。その補助場を F とした時、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger + \chi^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + FF^\dagger \quad (2.B.18)$$

と書き換わる。補助場 F を入れたことで SUSY に対する変換性も少し変わり、以前と同様の議論を行うことで

$$\delta\phi = \zeta \cdot \chi \quad (2.B.19)$$

$$\delta\chi = -i\sigma^\mu (i\sigma^2 \zeta^*) \partial_\mu \phi + F\zeta \quad (2.B.20)$$

$$\delta F = -i\zeta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi \quad (2.B.21)$$

となる。

2.B.2 座標変換 \Rightarrow 代数構造

この節では、座標変換から微分演算子としてのチャージを求める。そのためには通常の 4 次元時空を拡張した超空間 (superspace) を考える必要がある。

超空間 (スーパースペース : superspace)

通常の 4 次元時空は x^μ のように書く。これに 4 つの Grassmann 座標 $(\theta_1, \theta_2, \bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2)$ を加えたものを超空間 (superspace) と読んでいく。Grassmann 座標は

$$\theta \equiv \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\theta}^1 \\ \bar{\theta}^2 \end{pmatrix} \quad (2.B.22)$$

のように Weyl スピノルになっている。

超場 (スーパーフィールド : superfield)

スーパーフィールドとはスーパースペースの関数であり、

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.B.23)$$

と書く。一般に、Grassmann 数を含む関数はその性質により有限項だけで書き表すことができる。

$$\mathcal{F}(x, \theta) = \phi(x) + \theta \cdot \chi(x) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(x) \quad (2.B.24)$$

一般のスーパーフィールドは

$$\begin{aligned} S(x, \theta, \bar{\theta}) = & A(x) + \theta \cdot \alpha(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\beta} + \theta \cdot \theta B(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} H(x) \\ & + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} V_\mu(x) + \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\gamma}(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \eta(x) + \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} P(x) \end{aligned} \quad (2.B.25)$$

のように書ける。 $\phi(x), \chi(x), F(x), \dots, P(x)$ のことを成分場 (component field) という。

スーパースペースの座標変換

$$U(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(ix \cdot P + i\bar{Q} \cdot \bar{\theta} + iQ \cdot \theta) \quad (2.B.26)$$

とする。

$$U(x', \theta', \bar{\theta}') = U(a, \zeta, \bar{\zeta}) U(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.B.27)$$

右辺を計算することにより、結局スーパースペースの変換は

$$x' = x + a + \frac{i}{2} \zeta \sigma^\mu \bar{\theta} - \frac{i}{2} \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \quad (2.B.28)$$

$$\theta' = \theta + \zeta \quad (2.B.29)$$

$$\bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\zeta} \quad (2.B.30)$$

となる。

微分演算子としての SUSY チャージ

やることは以前やっている方法と同じ。つまり一般のスーパーフィールド \mathcal{S} が

$$\mathcal{S}(x', \theta', \bar{\theta}') = \exp(-ia^\mu \hat{P}_\mu - i\zeta \cdot Q - i\bar{\zeta} \cdot \bar{Q}) \mathcal{S}(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.B.31)$$

と座標変換を受けることから微分演算子としての \hat{P}_μ, Q, \bar{Q} を求める。詳細は省いて結果だけ書くと

$$\hat{P}_\mu = \partial_\mu \quad (2.B.32)$$

$$Q_a = i\partial_a - \frac{1}{2} (\sigma^\mu)_{ab} \bar{\theta}^b \hat{P}_\mu \quad (2.B.33)$$

$$\bar{Q}^{\dot{a}} = i\bar{\partial}^{\dot{a}} - \frac{1}{2} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \theta_b \partial_\mu \quad (2.B.34)$$

となる。この計算の途中で注意が必要なのが

$$\zeta^a \partial_a = \zeta_a \partial^a \quad (2.B.35)$$

となる部分である。これは通常の規則 \searrow とは逆になっている。

微分演算子と代数構造

\hat{P}_μ, Q, \bar{Q} の微分演算子としての表現がわかったのでそれぞれの交換関係等を取ると

$$\{Q_a, Q_b\} = 0 \quad (2.B.36)$$

$$\{\bar{Q}_{\dot{a}}, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = 0 \quad (2.B.37)$$

$$\{Q_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} = (\sigma^\mu)_{ab} \hat{P}_\mu \quad (2.B.38)$$

を満たしていることが確かめられる。

2.B.3 カイラルスーパーフィールド (Chiral Superfield)

カイラルスーパーフィールドとは次の拘束条件を課されたスーパーフィールドの事を言う。

$$\bar{D}_{\dot{a}} \mathcal{S}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = 0 \text{ or } D_a \mathcal{S}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad (2.B.39)$$

ここで、

$$\bar{D}_{\dot{a}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} - \frac{i}{2} \theta^c (\sigma^\mu)_{c\dot{a}} \partial_\mu \quad (2.B.40)$$

$$D_a = \frac{\partial}{\partial \theta^a} - \frac{i}{2} (\sigma^\mu)_{ab} \bar{\theta}^{\dot{b}} \partial_\mu \quad (2.B.41)$$

$$(2.B.42)$$

である。特に条件が左の時を左カイラルスーパーフィールド、右の時を右カイラルスーパーフィールドという。

$$D \cdot D \equiv D^a D_a \quad (2.B.43)$$

$$\bar{D} \cdot \bar{D} \equiv \bar{D}_{\dot{a}} \bar{D}^{\dot{a}} \quad (2.B.44)$$

もよく使うのでここで定義しておく。

一般のカイラルスーパーフィールド

この節では一般のカイラルスーパーフィールドの構築を行う。なお以下では左カイラルスーパーフィールドをカイラルスーパーフィールドと呼び、右カイラルスーパーフィールドは扱わないこととする。

$$y^\mu(x^\mu, \bar{\theta}) = x^\mu - \frac{i}{2} \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \quad (2.B.45)$$

としたとき常に

$$\bar{D}_{\dot{a}} y^\mu(x^\mu, \bar{\theta}) = 0 \quad (2.B.46)$$

が成り立つ。この新しい座標 y^μ を用いると必ず

$$\bar{D}_{\dot{a}} \Phi(y^\mu, \theta) = 0 \quad (2.B.47)$$

が成り立つ。よってこの $\Phi(y^\mu, \theta)$ が最も一般的なカイラルスーパーフィールドとなる。この Φ を成分場 (component field) で書くと

$$\Phi = \phi(y) + \theta \cdot \chi(y) + \frac{1}{2} \theta \cdot \theta F(y) \quad (2.B.48)$$

$$\begin{aligned} &= \phi(x) - \frac{i}{2} \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \phi(x) - \frac{1}{16} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \square \phi(x) \\ &\quad + \theta \cdot \chi(x) - \frac{i}{2} \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \cdot \partial_\mu \chi(x) + \frac{1}{2} F(x) \theta \cdot \theta \end{aligned} \quad (2.B.49)$$

成分場の変換

SUSY 変換に関してスーパーフィールドの中の成分場がどのように変換するのかを見る。結果だけ示すと

$$\phi' = \phi + \zeta \cdot \chi \quad (2.B.50)$$

$$\chi' = \chi - i\sigma^\mu (i\sigma^2)\zeta^* \partial_\mu \phi + \zeta F \quad (2.B.51)$$

$$F' = F + i(\partial_\mu \chi)\sigma^\mu \bar{\zeta} \quad (2.B.52)$$

となり、変化分は以前示したものと全く同じ形になる。

よく使われる座標変換

カイラルスーパーフィールドの計算の際に、次の座標変換がよく用いられる。

$$y^\mu = x^\mu - \frac{i}{2}\theta^a (\sigma^\mu)_{ab} \bar{\theta}^b \quad (2.B.53)$$

$$\theta' = \theta \quad (2.B.54)$$

$$\bar{\theta}' = \bar{\theta} \quad (2.B.55)$$

その時の微分演算子は

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (2.B.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^a} = \frac{\partial}{\partial \theta'^a} - \frac{i}{2}(\sigma_\mu)_{ab} \bar{\theta}'^b \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (2.B.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{a}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'^{\dot{a}}} + \frac{i}{2}\theta'^b \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (2.B.58)$$

となる。またそうすることで

$$D_a = \frac{\partial}{\partial \theta'^a} - i(\sigma_\mu)_{ab} \bar{\theta}'^b \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad (2.B.59)$$

$$\bar{D}_{\dot{a}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'^{\dot{a}}} \quad (2.B.60)$$

ともなる。

2.B.4 スーパーフィールドとラグランジアン

この節では、スーパーフィールドを使っていかに SUSY 不変なラグランジアンを構成していくかということについて述べる。

カイラルスーパーフィールドの成分場は ϕ, χ, F の 3 つある。その中で F は SUSY のもとで全微分として変換している。つまり F は SUSY 不変である。もっと言うと F は $\frac{1}{2}\theta \cdot \theta$ の係数なので、結局 SUSY 不変なのは $\frac{1}{2}\theta \cdot \theta$ に比例するこうだということがわかる。この項だけを分離する方法があつて、それが以前述べた Grassmann 積分を使い方法である。

$$\int d^2\theta \Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.B.61)$$

とすることで $\frac{1}{2}\theta \cdot \theta$ に比例する項だけ取り出すことができる。つまり

$$\int d^4x d^2\theta \Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.B.62)$$

は SUSY 変換のもとで不変な量である。これを更に一般化する。 \mathcal{F} をスーパーフィールドの holomorphic 関数つまり、 \mathcal{S}_i だけを含み、 \mathcal{S}_i^\dagger を含まない関数だとした時

$$\int d^2\theta \mathcal{F}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots) \equiv \mathcal{F}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots)|_F \quad (2.B.63)$$

が SUSY 不変なラグランジアン密度になる。 $|_F$ は F-term と言う。カイラルスーパーフィールドの holomorphic 関数の時は特に

$$\mathcal{W}(\Phi_1, \Phi_2, \dots)|_F \quad (2.B.64)$$

と書く。この \mathcal{W} のことをスーパーポテンシャル (superpotential) と言う。

$$\mathcal{W}(\Phi_1, \Phi_2, \dots)|_F = \frac{\partial \mathcal{W}(\phi_1 \cdots \phi_n)}{\partial \phi_i} F_i - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\phi_1 \cdots \phi_n)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \chi_i \cdot \chi_j + \text{h.c.} \quad (2.B.65)$$

ここで、 ϕ_i, χ_i, F_i は成分場である。これは SUSY 不変なら相互作用項を出す。

自由場

また、

$$\frac{1}{4} \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} = 1 \quad (2.B.66)$$

を使うことで

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi^\dagger \Phi = (\Phi^\dagger \Phi)|_D \quad (2.B.67)$$

ケーラーポテンシャルという。繰り込み可能なとき

$$\mathcal{K}_{ren}(\Phi_i, \Phi_j^\dagger) = \Phi_i^\dagger \Phi_i \quad (2.B.68)$$

これから SUSY 不変なラグランジアン密度の自由場部分が現れる。

ベクトルスーパーフィールド

理論にゲージ場を導入する方法をこの説では簡単にまとめる。カイラルスーパーフィールドに次のゲージ変換をさせる。

$$\Phi \rightarrow e^{2iq\Lambda} \Phi \quad (2.B.69)$$

ここで Λ 自身もカイラルスーパーフィールドであり

$$\begin{aligned} \Lambda = & \phi_\Lambda(x) - \frac{i}{2} \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \phi_\Lambda(x) - \frac{1}{16} \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \square \phi_\Lambda(x) \\ & + \theta \cdot \chi_\Lambda(x) - \frac{i}{2} \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \cdot \partial_\mu \chi_\Lambda(x) + \frac{1}{2} F_\Lambda(x) \theta \cdot \theta \end{aligned} \quad (2.B.70)$$

とする。この変換のもとでラグランジアンを不変にするためにゲージ場を導入する。ゲージ場の入れ方は

$$\Phi^\dagger e^{2q\mathcal{V}} \Phi \quad (2.B.71)$$

この \mathcal{V} のことをゲージスーパーフィールド (gauge superfield) といい、ゲージ変換は

$$\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} - i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (2.B.72)$$

とする。そうすることで、カイラルスーパーフィールドのゲージ変換でラグランジアンが不変になる。ここで \mathcal{V} は実スーパーフィールド ($\mathcal{V} = \mathcal{V}^\dagger$) とする。具体的な形は

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x) = & A(x) + \theta \cdot \alpha(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\beta}(x) + \theta \cdot \theta B(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} H(x) + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} V_\mu(x) \\ & + \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\gamma}(x) + \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} \theta \cdot \eta(x) + \theta \cdot \theta \bar{\theta} \cdot \bar{\theta} P(x) \end{aligned} \quad (2.B.73)$$

となり、実という条件から

$$A^\dagger = A, V_\mu^\dagger = V_\mu, P^\dagger = P, B^\dagger = H, \alpha = \beta, \gamma = \eta \quad (2.B.74)$$

である。ゲージスーパーフィールドはベクトルスーパーフィールドとも呼ばれる。理由は成分場にベクトルが入っているからである。これに Wess-Zumino ゲージを取ることで整理すると

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + \frac{1}{2\sqrt{2}}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}\theta\cdot\lambda - \frac{1}{8}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}D \quad (2.B.75)$$

となる。

$$\Phi^\dagger e^{2q\mathcal{V}}\Phi|_D = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) + i\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\chi + FF^\dagger - q\phi^\dagger\phi D - (\sqrt{2}q\chi\cdot\lambda\phi^\dagger + \text{h.c.}) \quad (2.B.76)$$

である。

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu \quad (2.B.77)$$

である。

フィールドストレングススーパーフィールド (Field-strength superfield)

ここではゲージ場の運動量項を入れる方法を簡単にまとめる。フィールドストレングススーパーフィールドを

$$\mathcal{F}_a \equiv \bar{D}\cdot\bar{D}D_a\mathcal{V} \quad (2.B.78)$$

のように定義する。これは明らかに

$$\bar{D}_b\mathcal{F}_a = 0 \quad (2.B.79)$$

を満たすので \mathcal{F}_a はカイラルスーパーフィールドである。成分場で表すと

$$\mathcal{F}_a(y) = \sqrt{2}\lambda_a(y) - D(y)\theta_a - F_{\mu\nu}(y)(\sigma^{\mu\nu})_a{}^b\theta_b + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\cdot\theta(\sigma^\mu)_{ab}\partial_\mu\bar{\lambda}^b(y) \quad (2.B.80)$$

となる。

$$\frac{1}{4}(\mathcal{F}^a\mathcal{F}_a)|_F = \frac{1}{2}D^2 + i\bar{\lambda}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{*\mu\nu}(x) \quad (2.B.81)$$

最後の項は非自明な位相を持つ場以外はゼロとすることができる。ここで $F^{*\mu\nu}$ は dual field strength tensor と呼ばれ

$$F^{*\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (2.B.82)$$

と定義されている。

非可換ゲージ場の時

今までは可換なゲージ場だけを扱っていたので、それを非可換な場合に拡張する。

$$\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}^i T_F^i \quad (2.B.83)$$

とし

$$\mathcal{V}^i = \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu^i + \frac{1}{2\sqrt{2}}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\lambda}^i + \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}\theta\cdot\lambda^i - \frac{1}{8}\theta\cdot\theta\bar{\theta}\cdot\bar{\theta}D^i \quad (2.B.84)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \exp(2ig\Lambda)\Phi \quad (2.B.85)$$

$$\Lambda \equiv \Lambda^i T_F^i \quad (2.B.86)$$

$$\exp(2g\mathcal{V}) \rightarrow \exp(2g\mathcal{V}') = \exp(2ig\Lambda^\dagger)\exp(2g\mathcal{V})\exp(-2ig\Lambda) \quad (2.B.87)$$

$$\mathcal{F}_a \equiv \bar{D} \cdot \bar{D} \exp(-2g\mathcal{V}) D_a \exp(2g\mathcal{V}) \quad (2.B.88)$$

ゲージ不変になるのは

$$\text{Tr}(\mathcal{F}^a \mathcal{F}_a) \quad (2.B.89)$$

である。

2.B.5 まとめ

ここでは SUSY 不変なラグランジアンを構成する方法をまとめる。

- スーパーポテンシャル \mathcal{W} を作り、F-term を取る。
- ケーラーポテンシャルを作り、D-term を取る。
- ゲージ場を入れるときは、ゲージ場を導入する。
- ゲージ場の運動量項を入れる

これで SUSY 不変なラグランジアンを構成することができる。

付録 2.C MSSM のくりこみ群方程式

この付録では、1 ループレベルでの MSSM のくりこみ群方程式を与える。

• Anomalous Dimensions

$$\gamma_{\hat{q}}^{(1)} = -\frac{1}{30} (45g_2^2 + 80g_3^2 + g_1^2) \mathbf{1} + Y_d^\dagger Y_d + Y_u^\dagger Y_u \quad (2.C.1)$$

$$\gamma_{\hat{l}}^{(1)} = -\frac{3}{10} (5g_2^2 + g_1^2) \mathbf{1} + Y_e^\dagger Y_e \quad (2.C.2)$$

$$\gamma_{\hat{H}_d}^{(1)} = 3\text{Tr}(Y_d Y_d^\dagger) - \frac{3}{10} (5g_2^2 + g_1^2) + \text{Tr}(Y_e Y_e^\dagger) \quad (2.C.3)$$

$$\gamma_{\hat{H}_u}^{(1)} = -\frac{3}{10} (-10\text{Tr}(Y_u Y_u^\dagger) + 5g_2^2 + g_1^2) \quad (2.C.4)$$

$$\gamma_{\hat{d}}^{(1)} = 2Y_d^* Y_d^T - \frac{2}{15} (20g_3^2 + g_1^2) \mathbf{1} \quad (2.C.5)$$

$$\gamma_{\hat{u}}^{(1)} = 2Y_u^* Y_u^T - \frac{8}{15} (5g_3^2 + g_1^2) \mathbf{1} \quad (2.C.6)$$

$$\gamma_{\hat{e}}^{(1)} = 2Y_e^* Y_e^T - \frac{6}{5} g_1^2 \mathbf{1} \quad (2.C.7)$$

• Gauge Couplings

$$\beta_{g_1}^{(1)} = \frac{33}{5} g_1^3 \quad (2.C.8)$$

$$\beta_{g_2}^{(1)} = g_2^3 \quad (2.C.9)$$

$$\beta_{g_3}^{(1)} = -3g_3^3 \quad (2.C.10)$$

• Gaugino Mass Parameters

$$\beta_{M_1}^{(1)} = \frac{66}{5} g_1^2 M_1 \quad (2.C.11)$$

$$\beta_{M_2}^{(1)} = 2g_2^2 M_2 \quad (2.C.12)$$

$$\beta_{M_3}^{(1)} = -6g_3^2 M_3 \quad (2.C.13)$$

- **Trilinear Superpotential Parameters**

$$\beta_{Y_d}^{(1)} = 3Y_d Y_d^\dagger Y_d + Y_d \left(-3g_2^2 + 3\text{Tr}(Y_d Y_d^\dagger) - \frac{16}{3}g_3^2 - \frac{7}{15}g_1^2 + \text{Tr}(Y_e Y_e^\dagger) \right) + Y_d Y_u^\dagger Y_u \quad (2.C.14)$$

$$\beta_{Y_e}^{(1)} = 3Y_e Y_e^\dagger Y_e + Y_e \left(-3g_2^2 + 3\text{Tr}(Y_d Y_d^\dagger) - \frac{9}{5}g_1^2 + \text{Tr}(Y_e Y_e^\dagger) \right) \quad (2.C.15)$$

$$\beta_{Y_u}^{(1)} = 3Y_u Y_u^\dagger Y_u - \frac{1}{15}Y_u \left(13g_1^2 + 45g_2^2 - 45\text{Tr}(Y_u Y_u^\dagger) + 80g_3^2 \right) + Y_u Y_d^\dagger Y_d \quad (2.C.16)$$

- **Bilinear Superpotential Parameters**

$$\beta_\mu^{(1)} = 3\mu \text{Tr}(Y_d Y_d^\dagger) - \frac{3}{5}\mu \left(5g_2^2 - 5\text{Tr}(Y_u Y_u^\dagger) + g_1^2 \right) + \mu \text{Tr}(Y_e Y_e^\dagger) \quad (2.C.17)$$

- **Trilinear Soft-Breaking Parameters**

$$\begin{aligned} \beta_{T_d}^{(1)} = & +4Y_d Y_d^\dagger T_d + 2Y_d Y_u^\dagger T_u + 5T_d Y_d^\dagger Y_d + T_d Y_u^\dagger Y_u - \frac{7}{15}g_1^2 T_d - 3g_2^2 T_d - \frac{16}{3}g_3^2 T_d \\ & + 3T_d \text{Tr}(Y_d Y_d^\dagger) + T_d \text{Tr}(Y_e Y_e^\dagger) + Y_d \left(2\text{Tr}(Y_e^\dagger T_e) + 6g_2^2 M_2 + 6\text{Tr}(Y_d^\dagger T_d) \right) + \frac{14}{15}g_1^2 M_1 + \frac{32}{3}g_3^2 M_3 \end{aligned} \quad (2.C.18)$$

$$\begin{aligned} \beta_{T_e}^{(1)} = & +4Y_e Y_e^\dagger T_e + 5T_e Y_e^\dagger Y_e - \frac{9}{5}g_1^2 T_e - 3g_2^2 T_e + 3T_e \text{Tr}(Y_d Y_d^\dagger) + T_e \text{Tr}(Y_e Y_e^\dagger) \\ & + Y_e \left(2\text{Tr}(Y_e^\dagger T_e) + 6g_2^2 M_2 + 6\text{Tr}(Y_d^\dagger T_d) \right) + \frac{18}{5}g_1^2 M_1 \end{aligned} \quad (2.C.19)$$

$$\begin{aligned} \beta_{T_u}^{(1)} = & +2Y_u Y_d^\dagger T_d + 4Y_u Y_u^\dagger T_u + T_u Y_d^\dagger Y_d + 5T_u Y_u^\dagger Y_u - \frac{13}{15}g_1^2 T_u - 3g_2^2 T_u - \frac{16}{3}g_3^2 T_u \\ & + 3T_u \text{Tr}(Y_u Y_u^\dagger) + Y_u \left(6g_2^2 M_2 + 6\text{Tr}(Y_u^\dagger T_u) \right) + \frac{26}{15}g_1^2 M_1 + \frac{32}{3}g_3^2 M_3 \end{aligned} \quad (2.C.20)$$

- **Bilinear Soft-Breaking Parameters**

$$\begin{aligned} \beta_{B_\mu}^{(1)} = & +\frac{6}{5}g_1^2 M_1 \mu + 6g_2^2 M_2 \mu + B_\mu \left(-3g_2^2 + 3\text{Tr}(Y_d Y_d^\dagger) + 3\text{Tr}(Y_u Y_u^\dagger) - \frac{3}{5}g_1^2 + \text{Tr}(Y_e Y_e^\dagger) \right) \\ & + 6\mu \text{Tr}(Y_d^\dagger T_d) + 2\mu \text{Tr}(Y_e^\dagger T_e) + 6\mu \text{Tr}(Y_u^\dagger T_u) \end{aligned} \quad (2.C.21)$$

$$(2.C.22)$$

- **Soft-Breaking Scalar Masses**

$$\sigma_{1,1} = \sqrt{\frac{3}{5}}g_1 \left(-2\text{Tr}(m_u^2) - \text{Tr}(m_l^2) - m_{H_d}^2 + m_{H_u}^2 + \text{Tr}(m_d^2) + \text{Tr}(m_e^2) + \text{Tr}(m_q^2) \right) \quad (2.C.23)$$

$$\begin{aligned}
\beta_{m_q^2}^{(1)} = & -\frac{2}{15}g_1^2\mathbf{1}|M_1|^2 - \frac{32}{3}g_3^2\mathbf{1}|M_3|^2 - 6g_2^2\mathbf{1}|M_2|^2 + 2m_{H_d}^2 Y_d^\dagger Y_d + 2m_{H_u}^2 Y_u^\dagger Y_u + 2T_d^\dagger T_d \\
& + 2T_u^\dagger T_u + m_q^2 Y_d^\dagger Y_d + m_q^2 Y_u^\dagger Y_u + 2Y_d^\dagger m_d^2 Y_d + Y_d^\dagger Y_d m_q^2 + 2Y_u^\dagger m_u^2 Y_u \\
& + Y_u^\dagger Y_u m_q^2 + \frac{1}{\sqrt{15}}g_1\mathbf{1}\sigma_{1,1}
\end{aligned} \tag{2.C.24}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{m_l^2}^{(1)} = & -\frac{6}{5}g_1^2\mathbf{1}|M_1|^2 - 6g_2^2\mathbf{1}|M_2|^2 + 2m_{H_d}^2 Y_e^\dagger Y_e + 2T_e^\dagger T_e + m_l^2 Y_e^\dagger Y_e + 2Y_e^\dagger m_e^2 Y_e \\
& + Y_e^\dagger Y_e m_l^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}g_1\mathbf{1}\sigma_{1,1}
\end{aligned} \tag{2.C.25}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{m_{H_d}^2}^{(1)} = & -\frac{6}{5}g_1^2|M_1|^2 - 6g_2^2|M_2|^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}g_1\sigma_{1,1} + 6m_{H_d}^2 \text{Tr}(Y_d Y_d^\dagger) + 2m_{H_d}^2 \text{Tr}(Y_e Y_e^\dagger) + 6\text{Tr}(T_d^* T_d^T) \\
& + 2\text{Tr}(T_e^* T_e^T) + 6\text{Tr}(m_d^2 Y_d Y_d^\dagger) + 2\text{Tr}(m_e^2 Y_e Y_e^\dagger) + 2\text{Tr}(m_l^2 Y_e^\dagger Y_e) + 6\text{Tr}(m_q^2 Y_d^\dagger Y_d)
\end{aligned} \tag{2.C.26}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{m_{H_u}^2}^{(1)} = & -\frac{6}{5}g_1^2|M_1|^2 - 6g_2^2|M_2|^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}g_1\sigma_{1,1} + 6m_{H_u}^2 \text{Tr}(Y_u Y_u^\dagger) + 6\text{Tr}(T_u^* T_u^T) + 6\text{Tr}(m_q^2 Y_u^\dagger Y_u) \\
& + 6\text{Tr}(m_u^2 Y_u Y_u^\dagger)
\end{aligned} \tag{2.C.27}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{m_d^2}^{(1)} = & -\frac{8}{15}g_1^2\mathbf{1}|M_1|^2 - \frac{32}{3}g_3^2\mathbf{1}|M_3|^2 + 4m_{H_d}^2 Y_d Y_d^\dagger + 4T_d T_d^\dagger + 2m_d^2 Y_d Y_d^\dagger + 4Y_d m_q^2 Y_d^\dagger \\
& + 2Y_d Y_d^\dagger m_d^2 + 2\frac{1}{\sqrt{15}}g_1\mathbf{1}\sigma_{1,1}
\end{aligned} \tag{2.C.28}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{m_u^2}^{(1)} = & -\frac{32}{15}g_1^2\mathbf{1}|M_1|^2 - \frac{32}{3}g_3^2\mathbf{1}|M_3|^2 + 4m_{H_u}^2 Y_u Y_u^\dagger + 4T_u T_u^\dagger + 2m_u^2 Y_u Y_u^\dagger + 4Y_u m_q^2 Y_u^\dagger \\
& + 2Y_u Y_u^\dagger m_u^2 - 4\frac{1}{\sqrt{15}}g_1\mathbf{1}\sigma_{1,1}
\end{aligned} \tag{2.C.29}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{m_e^2}^{(1)} = & -\frac{24}{5}g_1^2\mathbf{1}|M_1|^2 + 2\left(2m_{H_d}^2 Y_e Y_e^\dagger + 2T_e T_e^\dagger + 2Y_e m_l^2 Y_e^\dagger + m_e^2 Y_e Y_e^\dagger + Y_e Y_e^\dagger m_e^2\right) \\
& + 2\sqrt{\frac{3}{5}}g_1\mathbf{1}\sigma_{1,1}
\end{aligned} \tag{2.C.30}$$

• Vacuum expectation values

$$\beta_{v_d}^{(1)} = \frac{1}{20}v_d \left(-20\text{Tr}(Y_e Y_e^\dagger) + 3(5g_2^2 + g_1^2)(1 + \text{Xi}) - 60\text{Tr}(Y_d Y_d^\dagger) \right) \tag{2.C.31}$$

$$\beta_{v_u}^{(1)} = \frac{3}{20}v_u \left(-20\text{Tr}(Y_u Y_u^\dagger) + (5g_2^2 + g_1^2)(1 + \text{Xi}) \right) \tag{2.C.32}$$

第3章

ニュートリノ

3.1 はじめに

2015年のノーベル物理学賞の受賞理由は「ニュートリノが質量を持つことを示すニュートリノ振動の発見」であった。素粒子標準模型ではかねてよりニュートリノの質量はゼロとされてきたが、ニュートリノ振動が観測されたことにより、ニュートリノには質量があることが明らかになった。標準模型の範囲内でニュートリノに質量があることを説明できないのは、標準模型の中にカイラリティが右のニュートリノ (ν_R) が無いためである。ニュートリノ質量を説明するために標準模型に ν_R を加えることは、 ν_R が標準模型のゲージ群 $SU(3)_c \times SU(3)_L \times U(1)_Y$ の singlet であるために可能であるが、その場合、ニュートリノの質量が他の物質粒子とくらべて非常に小さいこと、つまりニュートリノ湯川結合 (Y_ν) が他の物質粒子に比べて小さいことが非常に不自然であるように思われる。この不自然さを解消する枠組みとして知られているのが seesaw 機構である。右巻きニュートリノ ν_R は gauge singlet であるために通常のディラック質量項の他にマヨラナ質量項を組むことが出来る。このマヨラナ質量 (M_R) は標準模型からいかなる制限も受けないため、ゼロから Planck スケールまでの好きなエネルギースケールの値を持つことが出来る。もし M_R がディラック質量 ($m_\nu^D = \frac{1}{\sqrt{2}}vY_\nu, v = 256\text{GeV}$) とくらべて十分に重い場合、ニュートリノ質量は

$$m_\nu = (m_\nu^D)^2 / M_R \quad (3.1.1)$$

となり、 $M_R \sim 10^{15}\text{GeV}$ ならば $Y_\nu \sim \mathcal{O}(1)$ でも自然に小さなニュートリノの質量を説明することが出来る。これがいわゆる type-I seesaw 機構と呼ばれるものである [68–70]。type-I seesaw は確かに自然に小さなニュートリノ質量を説明することはできるが、 M_R が非常に重たいために右巻きニュートリノ由来のステライルニュートリノを地上の加速器実験で観測することは非常に困難である。一方、type-I seesaw のように ν_R のマヨラナ質量が GUT スケール付近の非常に高いエネルギースケールの大きさでなくても小さなニュートリノ質量を説明することが知られており、Low-scale seesaw 機構と呼ばれている。本研究ではとくに Low-scale seesaw の中でも Inverse seesaw 機構 [71–73] に注目する。Inverse seesaw 機構は通常の type-I seesaw とは違い 6 つ (2 種類 \times 3 世代) の gauge singlet な右巻きニュートリノを加える。ニュートリノ質量は

$$m_\nu = (m_\nu^D)^2 / (M_R^2 / \mu_X) \quad (3.1.2)$$

となり、 M_R が仮に数 TeV 程度の大きさであっても、 $\mu_X \ll M_R$ の場合には自然に小さなニュートリノ質量を説明することが出来る。このように、Inverse Seesaw 機構は、TeV スケールの実験に感度があるために、ステライルニュートリノを地上の実験で観測できる可能性があるという通常の type-I seesaw にはない利点を持つ。この章ではニュートリノの性質を簡単に紹介する。なお本章の内容は、参考文献 [28] に従う。

3.2 ニュートリノ振動

ニュートリノ振動とは、ニュートリノが質量をもつことであるフレーバー固有状態にあったニュートリノが時間がたつにつれ別のフレーバー固有状態に変化する現象である。以下では2世代間、3世代間のニュートリノ振動について見ていく。

3.2.1 2世代のニュートリノ間の振動

$|\nu_{\alpha,\beta}\rangle$ をフレーバーの固有状態、 $|\nu_{1,2}\rangle$ を質量固有状態としたとき、それぞれの間には一般に次のような関係が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} |\nu_{\alpha}\rangle \\ |\nu_{\beta}\rangle \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

質量固有状態は、通常の量子力学と同様に時間発展する。

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i(0)\rangle \quad (i = 1, 2) \quad (3.2.2)$$

$$E_i = \sqrt{m_{\nu_i}^2 + \mathbf{p}_i^2} \quad (3.2.3)$$

時刻 t におけるフレーバー固有状態をそれぞれ $|\nu_{\alpha,\beta}(t)\rangle$ とした時、式 (3.2.1) よりその時間発展は次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} |\nu_{\alpha}(t)\rangle \\ |\nu_{\beta}(t)\rangle \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} |\nu_1(t)\rangle \\ |\nu_2(t)\rangle \end{pmatrix} \\ &= U \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_2 t} \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} |\nu_{\alpha}(t=0)\rangle \\ |\nu_{\beta}(t=0)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta e^{-iE_1 t} + \sin^2\theta e^{-iE_2 t} & -\sin\theta \cos\theta e^{-iE_1 t} + \sin\theta \cos\theta e^{-iE_2 t} \\ -\sin\theta \cos\theta e^{-iE_1 t} + \sin\theta \cos\theta e^{-iE_2 t} & \sin^2\theta e^{-iE_1 t} + \cos^2\theta e^{-iE_2 t} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

時刻 0 でフレーバー固有状態 $|\nu_{\alpha}\rangle$ だったニュートリノが、時刻 t でも同じ状態である確率、つまり「存在確率 (survival probability)」は

$$\begin{aligned} P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}) &= |\langle \nu_{\alpha}(t) | \nu_{\alpha}(0) \rangle|^2 \\ &= |(\cos^2\theta e^{-iE_1 t} + \sin^2\theta e^{-iE_2 t})|^2 \\ &= 1 - 2 \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{E_1 - E_2}{2} t \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

となる。ここで

$$E_1 - E_2 \simeq \frac{m_{\nu 1}^2 - m_{\nu 2}^2}{2E_{\nu}} \equiv \frac{\Delta m_{12}^2}{2E_{\nu}} \quad (3.2.6)$$

$$L = vt = t \quad (v \simeq c (= 1)) \quad (3.2.7)$$

に注意して式 (3.2.5) を変形すると

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}) = 1 - 2 \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m_{12}^2}{4E_{\nu}} L \quad (3.2.8)$$

となる。つまりニュートリノの存在確率はニュートリノの走る距離 L とエネルギー E_{ν} で決まることがわかる。

3.2.2 3世代のニュートリノ間の振動

ニュートリノは3世代あることが知られている。そこで前の節の2世代間の振動を3世代間の振動に拡張する。

ν_e, ν_μ, ν_τ をそれぞれフレーバー固有状態とし、 ν_1, ν_2, ν_3 を質量固有状態とする。それらの間はユニタリ行列 U によって関係づけられている*1。

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

つまり

$$\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i \quad (3.2.10)$$

と書ける*2。フレーバー固有状態の時間発展は式 (3.2.5) と同様に

$$|\nu_\beta(t)\rangle = \sum_i U_{\beta i} |\nu_i(t)\rangle = \sum_i U_{\beta i} e^{-iE_i t} |\nu_i(0)\rangle = \sum_i \sum_\gamma U_{\beta i} e^{-iE_i t} U_{\gamma i}^* |\nu_\gamma(0)\rangle \quad (3.2.11)$$

となる。時刻 t で状態が β に変わるような確率は

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = |\langle \nu_\alpha(0) | \nu_\beta(t) \rangle|^2 = \left| \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} \right|^2 = \sum_i \sum_j U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_i - E_j)t} \quad (3.2.12)$$

となる。指数部分を変形すると

$$\begin{aligned} e^{-i(E_i - E_j)t} &= \cos[(E_i - E_j)t] - i \sin[(E_i - E_j)t] \\ &= 1 - 2 \sin^2\left(\frac{E_i - E_j}{2}t\right) - 2i \sin\left(\frac{E_i - E_j}{2}t\right) \cos\left(\frac{E_i - E_j}{2}t\right) \\ &= 1 - 2 \sin^2\left(\frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_\nu}\right) - 2i \sin\left(\frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_\nu}\right) \cos\left(\frac{L\Delta m_{ij}^2}{4E_\nu}\right) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2 \quad (3.2.14)$$

のように書ける。

*1 この U は牧・中川・坂田行列と呼ばれる。詳細は後で説明する。

*2 i が質量固有状態の足で、 α はフレーバーの足である。

これを用いることで確率は

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \sum_i \sum_j U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \\
&\quad \times \left[1 - 2 \sin^2 \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right) - 2i \sin \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right) \cos \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right) \right] \\
&= \delta_{\alpha\beta} - \sum_i \sum_j (U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j}^* + U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\alpha i} U_{\beta i}^*) \sin^2 \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right) \\
&\quad - \sum_i \sum_j (U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j}^* - U_{\beta j} U_{\alpha j}^* U_{\alpha i} U_{\beta i}^*) \\
&\quad \quad \quad \times \sin \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right) \cos \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right) \\
&= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re}(U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right) \\
&\quad - 4 \sum_{i>j} \text{Im}(U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right) \sin \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right) \cos \left(\frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \right)
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

となる。ここで $\eta_{ij}^{\alpha\beta}$ や「Jarlskog の再位相不変量」と呼ばれる J を次のように定義する。

$$\text{Im}(U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) = J \sum_\gamma \sum_k \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{ijk} \tag{3.2.16}$$

$$\sum_\gamma \sum_k \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{ijk} \equiv \eta_{ij}^{\alpha\beta} = \pm 1 \tag{3.2.17}$$

$$\sin^2 2\theta_{ij}^{\alpha\beta} \equiv (1 - 2\delta_{\alpha\beta}) 4 \text{Re}(U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \tag{3.2.18}$$

これらを用いて式 (3.2.15) を整理すると最終的に確率は

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} + (1 - 2\delta_{\alpha\beta}) \sum_{i>j} \sin^2 \frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} - 2J \sum_{i>j} \eta_{ij}^{\alpha\beta} \sin 2 \frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} \tag{3.2.19}$$

となる。

もし $L, \Delta m^2, E_\nu$ の単位を自然単位系ではなく $\text{km}, \text{eV}^2, \text{GeV}$ で表す場合には

$$\Theta \equiv \frac{L \Delta m_{ij}^2}{4E_\nu} = 1.27 \frac{L[\text{km}] \Delta m_{ij}^2[\text{eV}^2]}{E_\nu[\text{GeV}]} \tag{3.2.20}$$

と変更すれば良い。

3.3 ニュートリノ混合

ニュートリノ振動の事実から、ニュートリノのフレーバー固有状態と質量固有状態は異なる。その間の関係をつけるのが牧・中川・坂田行列 (MSN 行列) であり、これはクォークセクターにおけるカビボ・小林・益川行列 (CKM 行列) に相当するものである。

牧・中川・坂田行列 (MNS matrix)

牧・中川・坂田行列は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 U_{MNS} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{diag}(1, e^{i\alpha_{21}/2}, e^{i\alpha_{31}/2}) \\
 &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{12}s_{23} - s_{12}s_{13}c_{23}e^{i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix} \text{diag}(1, e^{i\alpha_{21}/2}, e^{i\alpha_{31}/2}) \quad (3.3.1)
 \end{aligned}$$

のように書ける。ここで $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ であり、 θ_{ij} は質量の固有状態 ν_i と ν_j の混合角、 $\delta, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ は複素位相で、それぞれ Dirac phase, Majorana phase を表す。最新のデータ [28] によると MNS 行列の混合角は

$$\sin^2 2\theta_{12} = 0.846 \pm 0.021 \quad (3.3.2)$$

$$\sin^2 2\theta_{23} = \begin{cases} 0.999^{+0.001}_{-0.018} & (\text{normal mass hierarchy}) \\ 1.000^{+0.000}_{-0.017} & (\text{inverted mass hierarchy}) \end{cases} \quad (3.3.3)$$

$$\sin^2 2\theta_{13} = 0.093 \pm 0.008 \quad (3.3.4)$$

となっている。ここで NH, IH はそれぞれニュートリノ質量の順階層性、逆階層性を表している (次小節)。またニュートリノ質量 2 乗差は

$$\Delta m_{21}^2 = 7.53 \pm 0.18 (10^{-5} \text{eV}^2) \quad (3.3.5)$$

$$\Delta m_{32}^2 = \begin{cases} 2.52 \pm 0.07 (10^{-3} \text{eV}^2) & (\text{normal mass hierarchy}) \\ 2.44 \pm 0.06 (10^{-3} \text{eV}^2) & (\text{inverted mass hierarchy}) \end{cases} \quad (3.3.6)$$

となっている。

MNS 行列はクォークセクターにおけるカビボ・小林・益川行列 (CKM 行列) に相当するので、ここで比較のために CKM 行列を記しておく。

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 0.97427 \pm 0.00015 & 0.22534 \pm 0.00065 & 0.00351^{+0.00015}_{-0.00014} \\ 0.22520 \pm 0.00065 & 0.97344 \pm 0.00016 & 0.0412^{+0.0011}_{-0.0005} \\ 0.00867^{+0.00029}_{-0.00031} & 0.0404^{+0.0011}_{-0.0005} & 0.999146^{+0.000021}_{-0.000046} \end{pmatrix} \quad (3.3.7)$$

MNS 行列と CKM 行列を比べると、MNS 行列のほうが非対角成分が大きいことがわかる。この大きな非対角成分が SUSY 模型などでは実験で観測されうる大きさの cLFV を引き起こす。

3.4 ニュートリノ質量

ニュートリノの質量としては 3 つの可能性がある。なぜこのようなことが起こるかという、ニュートリノ振動の確率からは 2 乗質量差の大きさだけしか決まらず、その符号まで決められないからである。太陽ニュートリノの物質効果によって $\Delta m_{12}^2 > 0$ であることはわかっているが、 Δm_{23}^2 に関してはその大きさしかわかっていない。そのためニュートリノ質量がどういう階層になっているか決まらないのである。

さらにニュートリノは質量の絶対値もわかっていないため、もし個々の質量が 2 乗質量差に比べて大きい時にはそれぞれの質量は縮退する。

- Normal Hierarchical (NH)

$$m_1 \ll m_2 < m_3 \quad (3.4.1)$$

$$m_2 \cong (\Delta m_{12}^2)^{1/2} \cong 0.0086 \text{ eV} \quad (3.4.2)$$

$$m_3 \cong |\Delta m_{23}^2|^{1/2} \cong 0.048 \text{ eV} \quad (3.4.3)$$

- Inverted Hierarchical (IH)

$$m_3 \ll m_1 < m_2 \quad (3.4.4)$$

$$m_{1,2} \cong |\Delta m_{23}^2|^{1/2} \cong 0.048 \text{ eV} \quad (3.4.5)$$

- Quasi-Degenerate (QD)

$$m_1 \cong m_2 \cong m_3 \cong m_0 \quad (3.4.6)$$

$$m_j^2 \gg |\Delta m_{23}^2|^{1/2} \quad (3.4.7)$$

$$m_0 \gtrsim 0.10 \text{ eV} \quad (3.4.8)$$

3.5 Majorana 質量とシーソー機構

ここでは Majorana 質量とシーソー機構について簡単にまとめる。

3.5.1 Majorana 質量

質量には2種類ある。一つが Dirac 質量であり、もう一つが Majorana 質量である。通常のラグランジアンに現れるが Dirac 質量である。

- Dirac 質量

$$m_D(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R) \quad (3.5.1)$$

- Majorana 質量

$$m_M\bar{\psi}_L^c\psi_L \text{ など} \quad (3.5.2)$$

Dirac 質量から、質量とはカイラリティの入れ替えであると考えられる*3。あるカイラリティ左の粒子の荷電共役を取ると

$$(\psi_L)^c \equiv C\bar{\psi}_L^T = -i\gamma^2\gamma^0 \left[\left(\frac{1-\gamma_5}{2} \psi \right)^\dagger \gamma^0 \right]^T = (\psi^c)_R \quad (3.5.3)$$

となり、カイラリティ右の反粒子となっている。質量をカイラリティの入れ替えと考えると

$$(\bar{\psi}^c)_R\psi_L = \bar{\psi}_L^c\psi_L \quad (3.5.4)$$

は質量項になる。これが Majorana 質量である。つまり Majorana 質量とは、自分自身とその反粒子で作る質量のことである。

しかし Majorana 質量を見るとわかるように、これは位相変換に対して不変になっておらず、電荷の保存則が成り立たない。結局 Majorana 質量を書けるのは電荷を持たない中性フェルミオンに限ることになる。

*3 相対論的に見れば、質量があると慣性系を変えることによってカイラリティが変わる。

3.5.2 Type-I seesaw 機構

標準模型において、ニュートリノは左巻きしか無いために Dirac 質量項を作ることができない。それを右巻きニュートリノを入れることで拡張した場合、Dirac 質量項を作ることができる。しかし、Dirac 質量は通常 Higgs 機構を通じて得るため、ニュートリノの質量が非常に小さいことから湯川結合も非常に小さくなり不自然であると考えられる。右巻きニュートリノはゲージ singlet なため、粒子と反粒子を区別する量子数がなく、Majorana 粒子になる。重い右巻きニュートリノの Majorana 質量を用いて、軽いニュートリノ質量を導くのがシーソー機構である [68–70]。右巻きニュートリノを入れた時のラグランジアンは次のように変更を受ける。

$$\mathcal{L} \supset (f_\nu \bar{\nu}_R H \cdot L + \text{h.c.}) + M_{\nu R} \bar{\nu}_R \nu_R \quad (3.5.5)$$

Higgs 場が vev を持つと

$$f_\nu v (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R) + M_{\nu R} \bar{\nu}_R \nu_R = (\bar{\nu}_L, \bar{\nu}_R) \begin{pmatrix} 0 & f_\nu v \\ f_\nu v & M_{\nu R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad (3.5.6)$$

となる。この質量行列を対角化したときの固有値は

$$\frac{1}{2}(M_{\nu R} \pm \sqrt{M_{\nu R}^2 + 4(f_\nu v)^2}) \quad (3.5.7)$$

であり、 $M_{\nu R}$ が非常に大きい時、

$$\frac{1}{2}(M_{\nu R} \pm \sqrt{M_{\nu R}^2 + 4(f_\nu v)^2}) = \begin{cases} M_{\nu R} \\ -\frac{(f_\nu v)^2}{M_{\nu R}} \end{cases} \quad (3.5.8)$$

となる。 $f = 1$ の時、1eV のニュートリノ質量を再現しようとする、右巻きマヨラナニュートリノ質量は 10^{13} GeV という非常に大きな値であることが必要となる。

3.5.3 Inverse seesaw 機構

type-I seesaw は確かに自然に小さなニュートリノ質量を説明することはできるが、 M_R が非常に重たいために右巻きニュートリノ由来のステライルニュートリノを地上の加速器実験で観測することは非常に困難である。一方、type-I seesaw のように ν_R のマヨラナ質量が GUT スケール付近の非常に高いエネルギースケールの大きさでなくても小さなニュートリノ質量を説明することが知られており、それらは一般に Low-scale seesaw 機構と呼ばれている。Inverse seesaw 機構 [71–73] は、その Low-scale seesaw 機構の 1 つであり、本研究の主なテーマであるためにこの小節では Inverse seesaw 機構の導入を行う。

Inverse seesaw 機構では、標準模型に 3 世代の右巻きニュートリノ ν_R と、3 世代の gauge singlet なフェルミオン X を加える。どちらもレプトン数 $L = +1$ を持つ。その時のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} - Y_\nu^{ij} \bar{\nu}_{Ri} \tilde{H}^\dagger L_j - M_R^{ij} \bar{\nu}_{Ri} X_j - \frac{1}{2} \mu_X^{ij} \bar{X}_i^C X_j + \text{h.c.} \quad (3.5.9)$$

となる。ここで $i, j = 1, 2, 3$ である。 μ_X がレプトン数を破るパラメータとなり、 $\mu_X \rightarrow 0$ でレプトン数保存則が回復する。

電弱対称性の破れの後、 (ν_L, ν_R^C, X) の基底で 9×9 のニュートリノ質量行列は

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D^T & 0 \\ m_D & 0 & M_R \\ 0 & M_R^T & \mu_X \end{pmatrix} \quad (3.5.10)$$

となる。ここで $m_D = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_\nu v$, $v = 256 \text{ GeV}$ の Higgs 場の真空期待値である。もし、 $\mu_X \ll m_D \ll M_R$ ならば通常の軽いニュートリノ質量は

$$M_{\text{light}} \simeq m_D^T (M_R^T)^{-1} \mu_X M_R^{-1} m_D \quad (3.5.11)$$

となる。一方重いニュートリノの質量は

$$M_{\text{heavy}}^2 \simeq M_R^2 + m_D^2 \quad (3.5.12)$$

となる。

3.6 Non-Unitary 効果

フレーバー固有状態のニュートリノ ν_α が 3 種類以上のニュートリノの質量固有状態 ν_i で書ける場合を考える。

$$\nu_\alpha = N_{\alpha i} \nu_i. \quad (3.6.1)$$

$N_{\alpha i}$ はフレーバー固有状態と質量固有状態を結びつける行列であり、一般に $\alpha \times i$ 行列となる。ギリシャ文字はフレーバー固有状態、ローマ字は質量固有状態を表す。この時、荷電カレントと中性カレントはそれぞれ

$$\mathcal{L}^{CC} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} (W_\mu^+ \bar{\ell}_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) N_{\alpha i} \nu_i + \text{h.c.}) \quad (3.6.2)$$

$$\mathcal{L}^{NC} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} (Z_\mu \bar{\nu}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) (N^\dagger N)_{ij} \nu_j + \text{h.c.}) \quad (3.6.3)$$

と書ける。重要な点としては、

$$\langle \nu_i | \nu_j \rangle = \delta_{ij} \quad (3.6.4)$$

である一方、

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle \neq \delta_{\alpha\beta} \quad (3.6.5)$$

となることである。また Fermi 定数 G_F^M は標準模型の $G_F = \sqrt{2}g^2/(8M_W^2)$ とは異なり

$$G_F = \frac{G_F^M}{\sqrt{(NN^\dagger)_{ee}(NN^\dagger)_{\mu\mu}}} \quad (3.6.6)$$

となる*4。

3.6.1 $|NN^\dagger|$ の実験的な制限

$|NN^\dagger|$ の実験的な制限は

- W boson の崩壊
- Universality tests
- charged lepton の rare decay
- Z boson の invisible decay または CKM matrix の unitarity

を組み合わせることで求まる。強調しておきたい点としては、 $|NN^\dagger|$ の非対角成分は charged lepton の rare decay で決まるということである。

*4 ミューオン崩壊から決まる。

Constraints on	Process	Bound
$\frac{(NN^\dagger)_{\mu\mu}}{(NN^\dagger)_{ee}}$	$\frac{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e)}$	0.9999 ± 0.0020
$\frac{(NN^\dagger)_{\mu\mu}}{(NN^\dagger)_{ee}}$	$\frac{\Gamma(\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi \rightarrow e \bar{\nu}_e)}$	1.0017 ± 0.0015
$\frac{(NN^\dagger)_{\mu\mu}}{(NN^\dagger)_{ee}}$	$\frac{\Gamma(W \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_e)}$	0.997 ± 0.010
$\frac{(NN^\dagger)_{\tau\tau}}{(NN^\dagger)_{\mu\mu}}$	$\frac{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\mu \rightarrow \nu_\mu e \bar{\nu}_e)}$	1.0004 ± 0.0023
$\frac{(NN^\dagger)_{\tau\tau}}{(NN^\dagger)_{\mu\mu}}$	$\frac{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \pi)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu)}$	0.9999 ± 0.0036
$\frac{(NN^\dagger)_{\tau\tau}}{(NN^\dagger)_{ee}}$	$\frac{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\mu \rightarrow \nu_\mu e \bar{\nu}_e)}$	1.0002 ± 0.0022
$\frac{(NN^\dagger)_{\tau\tau}}{(NN^\dagger)_{ee}}$	$\frac{\Gamma(W \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau)}{\Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_e)}$	1.034 ± 0.014

表 3.1 Constraints on $(NN^\dagger)_{\alpha\alpha}$ from a selection of processes [89]

W decay

W boson が荷電レプトンとニュートリノに崩壊する崩壊幅は

$$\Gamma(W \rightarrow \ell_\alpha \nu_\alpha) = \sum_i \Gamma(W \rightarrow \ell_\alpha \nu_i) = \frac{G_F M_W^3}{6\sqrt{2}\pi} (NN^\dagger)_{\alpha\alpha} \quad (3.6.7)$$

となる。これより

$$\frac{(NN^\dagger)_{\alpha\alpha}}{\sqrt{(NN^\dagger)_{ee}(NN^\dagger)_{\mu\mu}}} = \frac{\Gamma(W \rightarrow \ell_\alpha \nu_\alpha) 6\sqrt{2}\pi}{G_F^M M_W^3} \equiv f_\alpha \quad (3.6.8)$$

となる。 $G_F^M = (1.16637 \pm 0.00001) \cdot 10^{-5}$ より [28],

$$f_e = 1.000 \pm 0.024 \quad (3.6.9)$$

$$f_\mu = 0.986 \pm 0.028 \quad (3.6.10)$$

$$f_\tau = 1.002 \pm 0.032 \quad (3.6.11)$$

となる。

Universality test

leptonic W coupling の universality の test から制限がつく。つまり $g_e = g_\mu = g_\tau = g$ のチェックである。それをまとめたものが表 3.1 である。

Rare charged lepton decays

$$\frac{\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)}{\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \nu_\alpha \ell_\beta \bar{\nu}_\beta)} = \frac{3\alpha}{32\pi} \frac{|\sum_k N_{\alpha k} N_{k\beta}^\dagger F(x_k)|^2}{(NN^\dagger)_{\alpha\alpha} (NN^\dagger)_{\beta\beta}} \quad (3.6.12)$$

ここで $x_k = m_k^2/M_W^2$ であり、

$$F(x) \equiv \frac{10 - 43x + 78x^2 - 49x^3 + 4x^4 + 18x^3 \ln x}{3(x-1)^4} \quad (3.6.13)$$

である。 $F(x) \simeq 10/3$ より

$$\frac{|(NN^\dagger)_{\alpha\beta}|^2}{(NN^\dagger)_{\alpha\alpha} (NN^\dagger)_{\beta\beta}} = \frac{96\pi}{100\alpha} \frac{\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma)}{\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \nu_\alpha \ell_\beta \bar{\nu}_\beta)} \quad (3.6.14)$$

となる。

Invisible Z decay , CKM matrix unitarity

ここまでの話で、 $|NN^\dagger|$ の各成分の相対的な値は求めることが出来るが、係数 $\sqrt{(NN^\dagger)_{ee}(NN^\dagger)_{\mu\mu}}$ が決まらないため、絶対的な値を決めることが出来ない。これを決める方法は2つ知られている。1つが Invisible Z decay を使う方法であり、もう1つが CKM 行列の unitarity を使う方法である。結論から先に言うと、後者のほうがより強い制限を与えることが出来る [91]。

前者に関しては、Z boson の invisible decay が

$$\Gamma(Z \rightarrow \text{invisible}) = \sum_{i,j} \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_i \nu_j) = \frac{G_F M_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} (1 + \rho_t) \sum_{i,j} |(N^\dagger N)_{ij}|^2 \quad (3.6.15)$$

となるが、 $\sum_{i,j} |(N^\dagger N)_{ij}|^2 = \sum_{\alpha,\beta} |(NN^\dagger)_{\alpha\beta}|^2$ より、

$$\frac{\sum_{\alpha,\beta} |(NN^\dagger)_{\alpha\beta}|^2}{\sqrt{(NN^\dagger)_{ee}(NN^\dagger)_{\mu\mu}}} = \frac{12\sqrt{2}\pi\Gamma(Z \rightarrow \text{invisible})}{G_F^M M_Z^3} (1 + \rho_t) = 2.984 \pm 0.009 \quad (3.6.16)$$

となって、 $\sqrt{(NN^\dagger)_{ee}(NN^\dagger)_{\mu\mu}}$ が決まる。

一方、後者に関しては、 β decay や kaon decay などにより

$$V_{\alpha\beta}^{\text{exp}} = \frac{V_{\alpha\beta}}{\sqrt{(NN^\dagger)_{\mu\mu}}} \quad (3.6.17)$$

となるが、CKM 行列の unitarity より

$$|V_{ud}^{\text{exp}}|^2 + |V_{us}^{\text{exp}}|^2 = \frac{1}{(NN^\dagger)_{\mu\mu}} = 0.9997 \pm 0.0010 \quad (3.6.18)$$

となって、 $(NN^\dagger)_{\mu\mu}$ が直接求まる。□

以上を踏まえた上で、Unitary matrix からのズレ $|\eta| = |NN^\dagger - 1|$ は

$$|\eta| < \begin{pmatrix} 2.0 \times 10^{-3} & 6.0 \times 10^{-5} & 1.6 \times 10^{-3} \\ 6.0 \times 10^{-5} & 8.0 \times 10^{-4} & 1.0 \times 10^{-3} \\ 1.6 \times 10^{-3} & 1.0 \times 10^{-3} & 2.6 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad (3.6.19)$$

となっている。重要な点なので繰り返しになるが、非対角成分に関しては荷電レプトンの rare decay から来ていて、かつその制限が一番強いために、本研究のように荷電レプトンフレーバーの破れを調べる場合にはこの制限をあまり気にする必要はない。

付録 3.A The standard type-I seesaw

$$\mathcal{M}_\nu = \begin{pmatrix} M_1 & M_D \\ M_D^T & M_2 \end{pmatrix} \quad (3.A.1)$$

$$M_1 = 0, M_2 = M_R$$

$$U^T \mathcal{M}_\nu U = M_\nu^{\text{diag}} \quad (3.A.2)$$

$$U = \exp(iH) \cdot V, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & S \\ S^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \quad (3.A.3)$$

m_D と M_R の mixing が小さく、 $\mathcal{O}(S^3)$ 以上を無視すると

$$U = \begin{pmatrix} (I - \frac{1}{2}SS^\dagger)V_1 & iSV_2 \\ iS^\dagger V_1 & (I - \frac{1}{2}S^\dagger S)V_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U_a & U_b \\ U_c & U_d \end{pmatrix} \quad (3.A.4)$$

式 (3.A.3) と (3.A.1) を式 (3.A.2) に代入すると

$$iS^* = M_D M_R^{-1} \equiv \epsilon \quad (3.A.5)$$

となる。この時

$$U = \begin{pmatrix} (I - \frac{1}{2}M_D^*(M_R^*)^{-1}M_R^{-1}M_D^T)V_1 & M_D^*(M_R^*)^{-1}V_2 \\ -M_D^{-1}M_R^T V_1 & (I - \frac{1}{2}M_R^{-1}M_D^T M_D^*(M_R^*)^{-1})V_2 \end{pmatrix} \quad (3.A.6)$$

もし ϵ が十分小さい場合は、

$$U \simeq \begin{pmatrix} V_1 & M_D^*(M_R^*)^{-1}V_2 \\ -M_R^{-1}M_D^T V_1 & V_2 \end{pmatrix} \quad (3.A.7)$$

となる*5。

軽いニュートリノは

$$m_\nu = -M_D M_R^{-1} M_D^T \quad (3.A.8)$$

となる。軽いニュートリノは行列 V_1 を用いて

$$V_1^T m_\nu V_1 = m_\nu^{\text{diag}} \quad (3.A.9)$$

となり、 $V_1 = U_{\text{MNS}}$ となる。

付録 3.B Inverse seesaw

$$\mathcal{M}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & M_D & 0 \\ M_D^T & 0 & M \\ 0 & M^T & \mu \end{pmatrix} \quad (3.B.1)$$

*5 ϵ が十分小さい場合、つまり通常の High-scale seesaw の場合には成立する。

$$\mathcal{U}^T \cdot \mathcal{M}_\nu \cdot \mathcal{U} = M_\nu^{\text{diag}} \quad (3.B.2)$$

$$\mathcal{U} \simeq \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \frac{1}{2}S_1S_1^\dagger & 0 & iS_1 \\ 0 & I & 0 \\ iS_1^\dagger & 0 & I - \frac{1}{2}S_1^\dagger S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \frac{1}{2}S_2S_2^\dagger & iS_2 & 0 \\ iS_2^\dagger & I - \frac{1}{2}S_2^\dagger S_2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (3.B.3)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} I & iS_2 & iS_1 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2}}(S_1^\dagger - S_2^\dagger) & \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \\ i\frac{1}{\sqrt{2}}(S_1^\dagger + S_2^\dagger) & \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{pmatrix} \quad (3.B.4)$$

$\mu \rightarrow 0$ の極限で、 $S_1 = S_2 = S$

$$iS^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}m^D(M^T)^{-1} \quad (3.B.5)$$

$$m_\nu = M_D(M^T)^{-1}\mu M^{-1}M_D^T \quad (3.B.6)$$

第 4 章

荷電レプトンフレーバーの破れ

4.1 はじめに

荷電レプトンフレーバーの破れ (charged Lepton Flavor Violation : 以下 cLFV) の探索は非常に長い歴史を持つ。1947 年にはすでに $\mu^+ \rightarrow e\gamma$ の探索が行われており [24]、そこから現在に至るまで、様々な cLFV 探索実験が行われている [28]。年次を経るごとに実験精度が非常に向上しており、それを時系列でまとめたものが図 4.1 である。また現在までの cLFV の実験からの制限と将来到達可能な実験精度についてまとめたものが表 4.1 である。

標準模型の範囲内では cLFV はニュートリノの質量が無いことにより厳密に禁止される。しかし、ニュートリノ振動の事実により、ニュートリノには質量がありレプトンフレーバーが破れることが明らかになった。それにともなって、標準模型にニュートリノ質量を加えて拡張したモデルでは cLFV が生じる。その意味で、cLFV は標準模型を超えた物理に非常に特徴的な現象である。ニュートリノに質量があることを説明する最も簡単な標準模型の拡張としては、標準模型に右巻きニュートリノ (ν_R) を導入したモデルであり、それによってニュートリノについても通常の Dirac 質量項を組むことができる。これによって荷電レプトンフレーバーの保存則は破れることになる。これはクォークセクターの場合と同様で、ニュートリノのフレーバー固有状態と質量固有状態の違いから生じている。この場合の $\mu \rightarrow e\gamma$ の分岐比は*1

$$\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{\alpha}{32\pi} \left| \sum_i (U_{MNS})_{ei}^* (U_{MNS})_{\mu i} \frac{m_{\nu,i}^2}{M_W^2} \right|^2 \quad (4.1.1)$$

で与えられる [29–31]。しかしその大きさはニュートリノの質量差は W ボソンの質量に比べて十分に小さいために、 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) < 10^{-54}$ となり、近い将来の実験で観測することは非常に難しい。一方、Supersymmetry を含む様々な New Physics 模型では、一般に荷電レプトンフレーバーは保存せず破れ、しかもその大きさは近い将来の実験で観測されうる大きさになることが予想されている。そのため cLFV は New Physics 探索の意味で非常に重要なものとなっている。cLFV 過程には $l_i \rightarrow l_j\gamma$ や $l_i \rightarrow 3l_j, \mu - e$ conversion など様々なものがあり、それは New Physics によって過程の起こり方に違いがある。そこで模型によらない effective なラグランジアンとして次のものを考える。

$$\mathcal{L}_{\text{cLFV}} = \frac{m_\mu}{(\kappa+1)\Lambda^2} \bar{\mu}_R \sigma_{\mu\nu} e_L F^{\mu\nu} + \text{h.c.} + \frac{\kappa}{(1+\kappa)\Lambda^2} \bar{\mu}_L \gamma_\mu e_L (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) + \text{h.c.} \quad (4.1.2)$$

第 1 項は光子を伴う effective な dimension-5 のオペレーターであり、第 2 項は光子を伴わない 4 点結合である。パラメータ Λ は new Physics の mass scale であり、 κ は第 1 項と第 2 項の比である。 $\mu \rightarrow e\gamma$ に関しては、第

*1 詳細は後で述べる

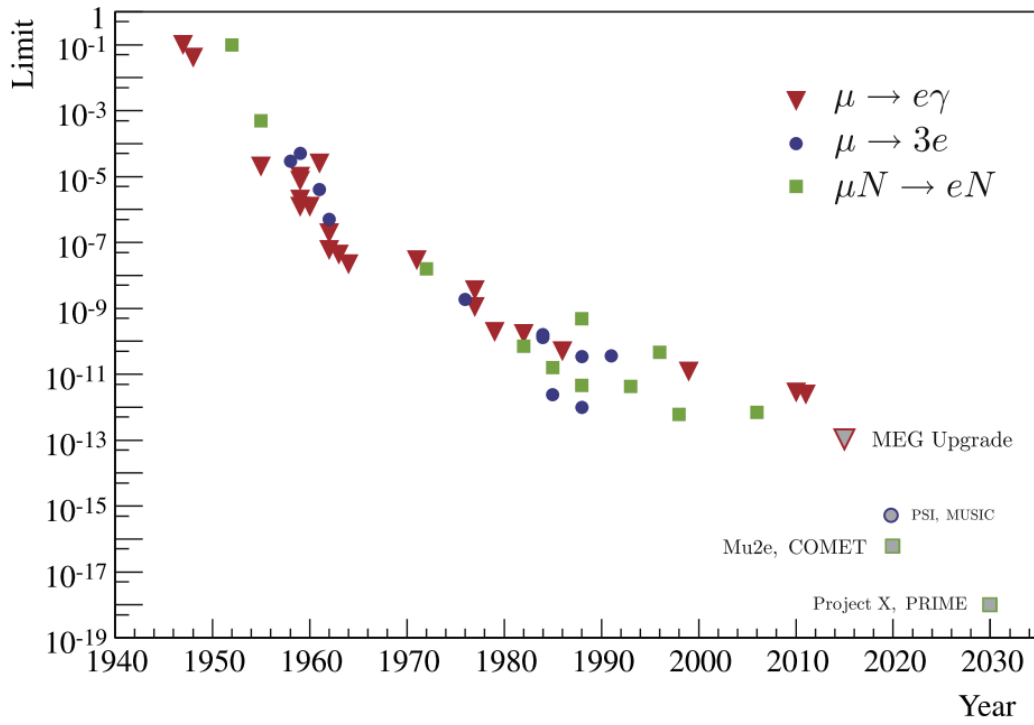


図 4.1 cLFV の歴史 [25]

1 項目から tree level の寄与があり、第 2 項目からの寄与は無い。一方 $\mu - e$ conversion は第 1 項、第 2 項それぞれから寄与がある。この仮定のもとで $\mu \rightarrow e\gamma$ と $\mu - e$ conversion を比較したものが図 (4.2) の (a) である。また式 (4.1.2) の第 2 項をレプトンにした場合が

$$\mathcal{L}_{\text{cLFV}} = \frac{m_\mu}{(\kappa + 1)\Lambda^2} \bar{\mu}_R \sigma_{\mu\nu} e_L F^{\mu\nu} + \text{h.c.} + \frac{\kappa}{(1 + \kappa)\Lambda^2} \bar{\mu}_L \gamma_\mu e_L (\bar{e} \gamma^\mu e) + \text{h.c.} \quad (4.1.3)$$

である。この場合は第 2 項が $\mu \rightarrow 3e$ を引き起こす。これを用いて $\mu \rightarrow e\gamma$ と $\mu \rightarrow 3e$ を比較したものが図 (4.2) の (b) である。これらの図からわかるように、各 cLFV 過程はそれぞれ相補的になっており、それらの探索結果を組み合わせることで非常に広いパラメータ領域を調べることが可能となっている。

4.1.1 ニュートリノ混合とレプトンフレーバーの破れ

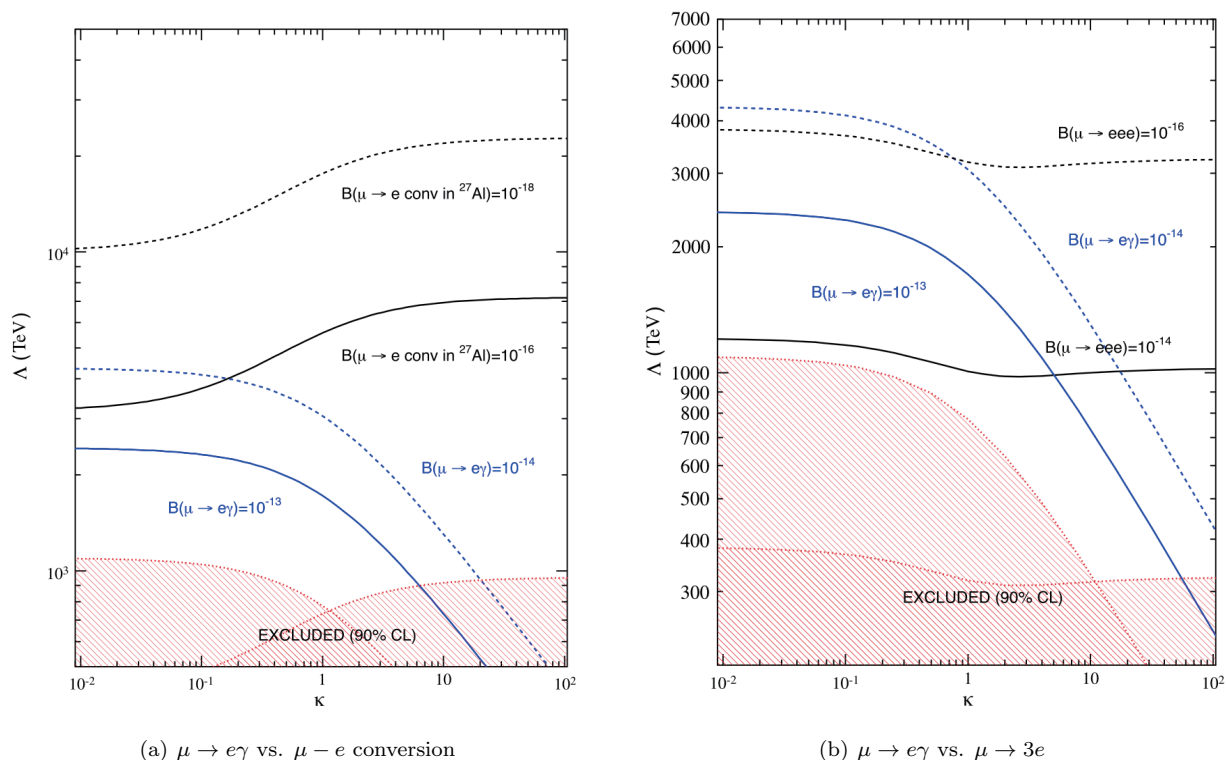
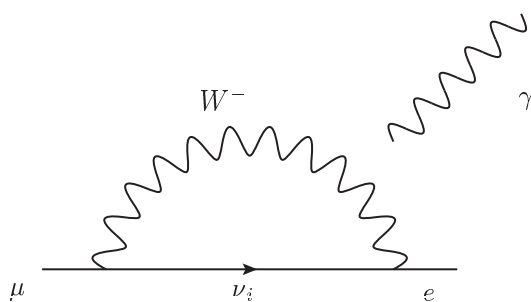
標準模型にニュートリノ質量を入れた最小限拡張した時、図 4.3 のダイアグラムからの寄与により荷電レプトンフレーバーの破れが起こる*2。このループを計算すると次のように求められる [29-31]。

$$T = -i\bar{u}_e(p-q) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\left(\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) U_{ei}^* \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m_i} \left(\frac{ig}{2\sqrt{2}} \right) \right. \\ \left. \times U_{\mu i} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) [i\Delta^{\nu\beta}(k)] [i\Delta^{\mu\alpha}(k+q)] (-ie) \Gamma_{\gamma\alpha\beta} \epsilon^\gamma \right] u_\mu(p) \quad (4.1.4)$$

ここで、 $\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$ は W ボソンとフォトンのカップリングで

$$\Gamma_{\gamma\alpha\beta}(k_1, k_2, k_3) = [(k_3 - k_1)_\alpha g_{\gamma\beta} + (k_2 - k_3)_\gamma g_{\alpha\beta} + (k_1 - k_2)_\beta g_{\gamma\alpha}] \quad (4.1.5)$$

*2 図 4.3 はユニタリゲージをとった場合である。他のゲージをとると NG ボソンがループに寄与するため、別のダイアグラムも出てくる。ただし結果は変わらない。

図 4.2 κ vs. Λ 図 4.3 cLFV を引き起こすダイアグラム (SM + ν_R)

と与えられる。これを用いて分岐比の計算を行うと

$$\begin{aligned}
 B(\mu \rightarrow e\gamma) &\equiv \frac{\Gamma(\mu \rightarrow e\gamma)}{\Gamma(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})} \\
 &= \frac{3\alpha}{32\pi} \left| \sum_i U_{ei}^* U_{\mu i} (m_i^2/M_W^2) \right|^2
 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

となる。ここで M_W は W ボソンの質量であり、大体 100GeV である。ニュートリノの質量は $\mathcal{O}(eV)$ なので、この分岐比はせいぜい $\mathcal{O}(10^{-50})$ 程度にしかならない。この値は実験では到底測定できない小さな値であり、そのためニュートリノ振動からは cLFV に対して何の制限も与えることはできない。

cLFV Process	Present Bound	Near-Future Sensitivity
$\mu \rightarrow e\gamma$	5.7×10^{-13} [32]	6×10^{-14} [33]
$\tau \rightarrow \mu\gamma$	3.3×10^{-8} [38]	$\sim 3 \times 10^{-9}$ [34]
$\tau \rightarrow e\gamma$	4.4×10^{-8} [38]	$\sim 3 \times 10^{-9}$ [34]
$\mu \rightarrow eee$	1.0×10^{-12} [35]	$\sim 10^{-16}$ [36]
$\tau \rightarrow \mu\mu\mu$	2.1×10^{-8} [39]	$\sim 10^{-9}$ [34]
$\tau^- \rightarrow e^- \mu^+ \mu^-$	2.7×10^{-8} [39]	$\sim 10^{-9}$ [34]
$\tau^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-$	1.8×10^{-8} [39]	$\sim 10^{-9}$ [34]
$\tau \rightarrow eee$	2.7×10^{-8} [39]	$\sim 10^{-9}$ [34]
$\mu^-, \text{Ti} \rightarrow e^-, \text{Ti}$	4.3×10^{-12} [40]	$\sim 10^{-18}$ [37]
$\mu^-, \text{Au} \rightarrow e^-, \text{Au}$	7×10^{-13} [41]	
$\mu^-, \text{Al} \rightarrow e^-, \text{Al}$		$10^{-15} - 10^{-18}$ [37, 45–47, 49, 50]
$\mu^-, \text{SiC} \rightarrow e^-, \text{SiC}$		10^{-14} [42]

表 4.1 cLFV 過程の現在の制限と将来到達できる精度 [32–50](文献 [67] に基づく)

4.2 有効 Lagrangian と cLFV 過程の一般表式

この節では、cLFV を引き起こすラグランジアン的一般形と、その Willson 係数を用いて cLFV の表式を与える。なお、本説の内容は文献 [101] に従う。

4.2.1 有効 Lagrangian

cLFV を引き起こすようなラグランジアンは形式的に次のよう書くことができる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\ell\ell\gamma} + \mathcal{L}_{\ell\ell Z} + \mathcal{L}_{\ell\ell h} + \mathcal{L}_{4\ell} + \mathcal{L}_{2\ell 2q} \quad (4.2.1)$$

各項はそれぞれ

$$\mathcal{L}_{\ell\ell\gamma} = e\bar{\ell}_\beta [\gamma^\mu (K_1^L P_L + K_1^R P_R) + im_{\ell_\alpha} \sigma^{\mu\nu} q_\nu (K_2^L P_L + K_2^R P_R)] \ell_{\alpha A_\mu} + \text{h.c.} \quad (4.2.2)$$

$$\mathcal{L}_{\ell\ell Z} = \bar{\ell}_\alpha [\gamma^\mu ((R_1^L P_L + R_1^R P_R) + p^\mu (R_2^L P_L + R_2^R P_R))] \ell_\alpha Z_\mu \quad (4.2.3)$$

$$\mathcal{L}_{\ell\ell h} = \bar{\ell}_\beta (S^L P_L + S^R P_R) \ell_\alpha h \quad (4.2.4)$$

$$\mathcal{L}_{4\ell} = \sum_{\substack{I=S,V,T \\ X,Y=L,R}} A_{XY}^I \ell_\beta \Gamma_I P_X \ell_\alpha \bar{\ell}_\delta \Gamma_I P_Y \ell_\gamma + \text{h.c.} \quad (4.2.5)$$

である。ここで、 $\ell_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ はレプトンフレーバーを表す。また $\Gamma_S = 1, \Gamma_V = \gamma_\mu, \Gamma_T = \sigma_{\mu\nu}$ である。

$$\mathcal{L}_{2\ell 2q} = \mathcal{L}_{2\ell 2d} + \mathcal{L}_{2\ell 2u} \quad (4.2.6)$$

$$\mathcal{L}_{2\ell 2d} = \sum_{\substack{I=S,V,T \\ X,Y=L,R}} B_{XY}^I \ell_\beta \Gamma_I P_X \ell_\alpha \bar{d}_\delta \Gamma_I P_Y d_\gamma + \text{h.c.} \quad (4.2.7)$$

$$\mathcal{L}_{2\ell 2u} = \mathcal{L}_{2\ell 2d}|_{d \rightarrow u, B \rightarrow C} \quad (4.2.8)$$

4.2.2 Lepton Flavor Observables

この小節では、前小節で与えた Willson 係数を用いて、書く cLFV 過程の一般的な表式を紹介する。

- $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma$

$\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma$ 過程の一般的な表式は式 (4.2.2) の係数 $K_{1,2}^{L,R}$ を用いて次のように書くことができる。

$$\Gamma(\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma) = \frac{\alpha m_{\ell_\alpha}^5}{4} (|K_2^L|^2 + |K_2^R|^2) \quad (4.2.9)$$

- $\ell_\alpha \rightarrow 3\ell_\beta$

$$\begin{aligned} \Gamma(\ell_\alpha \rightarrow 3\ell_\beta) = & \frac{m_{\ell_\alpha}^5}{512\pi^3} \left[e^4 (|K_2^L|^2 + |K_2^R|^2) \times \left(\frac{16}{3} \log \frac{m_{\ell_\alpha}}{m_{\ell_\beta}} \right) \right. \\ & + \frac{1}{24} (|A_{LL}^S|^2 + |A_{RR}^S|^2) + \frac{1}{12} (|A_{LR}^S|^2 + |A_{RL}^S|^2) + \frac{2}{3} (|\hat{A}_{LL}^V|^2 + |\hat{A}_{RR}^V|^2) \\ & + \frac{1}{3} (|\hat{A}_{LR}^V|^2 + |\hat{A}_{RL}^V|^2) + 6 (|A_{LL}^T|^2 + |A_{RR}^T|^2) \\ & + \frac{e^2}{3} (K_2^L A_{RL}^{S*} + K_2^R A_{LR}^{S*} + \text{c.c.}) - \frac{e^2}{3} (K_2^L \hat{A}_{RL}^{V*} + K_2^R \hat{A}_{LR}^{V*} + \text{c.c.}) \\ & - \frac{4e^2}{3} (K_2^L \hat{A}_{RR}^{V*} + K_2^R \hat{A}_{LL}^{V*} + \text{c.c.}) - \frac{1}{2} (A_{LL}^S A_{LL}^{T*} + A_{RR}^S A_{RR}^{T*} + \text{c.c.}) \\ & \left. - \frac{1}{6} (A_{LR}^S \hat{A}_{LR}^{V*} + A_{RL}^S \hat{A}_{RL}^{V*} + \text{c.c.}) \right] \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

ここで、

$$\hat{A}_{XY}^V = A_{XY}^V + e^2 K_1^X \quad (X, Y = L, R) \quad (4.2.11)$$

である。

- $\mu - e$ conversion in nuclei

$$\begin{aligned} \text{CR}(\mu - e, \text{Nucleus}) = & \frac{p_e E_e m_\mu^3 G_F^3 \alpha^3 Z_{\text{eff}}^4 F_p^2}{8\pi^2 Z} \left(\left| (Z+N) (g_{LV}^{(0)} + g_{LS}^{(0)}) + (Z-N) (g_{LV}^{(1)} + g_{LS}^{(1)}) \right|^2 \right. \\ & \left. + \left| (Z+N) (g_{RV}^{(0)} + g_{RS}^{(0)}) + (Z-N) (g_{RV}^{(1)} + g_{RS}^{(1)}) \right|^2 \right) \frac{1}{\Gamma_{\text{capt}}} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$X = L, R, K = S, V$

$$g_{XK}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{q=u,d,s} \left(g_{XK}(q) G_K^{(q,p)} + g_{XK}(q) G_K^{(q,n)} \right) \quad (4.2.13)$$

$$g_{XK}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{q=u,d,s} \left(g_{XK}(q) G_K^{(q,p)} - g_{XK}(q) G_K^{(q,n)} \right)$$

$$G_V^{(u,p)} = G_V^{(d,n)} = 2 \quad (4.2.14)$$

$$G_V^{(d,p)} = G_V^{(u,n)} = 1$$

$$G_S^{(u,p)} = G_S^{(d,n)} = 5.1$$

$$G_S^{(d,p)} = G_S^{(u,n)} = 4.3$$

$$G_S^{(s,p)} = G_S^{(s,n)} = 2.5$$

$$\begin{aligned}
g_{LV}(q) &= \frac{\sqrt{2}}{G_F} \left[e^2 Q_q (K_1^L - K_2^R) - \frac{1}{2} (C_{\ell\ell qq}^{VLL} + C_{\ell\ell qq}^{VLR}) \right] \\
g_{RV}(q) &= g_{LV}(q)|_{L \rightarrow R} \\
g_{LS}(q) &= -\frac{\sqrt{2}}{G_F} \frac{1}{2} (C_{\ell\ell qq}^{SLL} + C_{\ell\ell qq}^{SLR}) \\
g_{RS}(q) &= g_{LS}(q)|_{L \rightarrow R}
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

4.3 $\mu \rightarrow e\gamma$ 崩壊と MEG 実験

4.3.1 MEG 実験

$\mu \rightarrow e\gamma$ 探索はこの節の最初にも述べたが非常に長い歴史を持つ。また現在 cLFV 探索において最も強い制限を与えているのもこの過程であり、それを与えているのがポールシェラー研究所 (PSI) の MEG 実験である。その分岐比は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) < 5.7 \times 10^{-13}$ であり [32]、MEG 実験を改良した MEG II 実験では 6.0×10^{-14} まで実験の感度が上がるとされている [33]。

MEG 実験では、正電荷のミュオンを標の中で静止させ、そのミュオンが崩壊して back-to-back で放出されたミュオン質量の半分のエネルギー ($m_\mu/2 = 52.8\text{MeV}$) を持つ陽電子と光子を同時に捉えることで $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ を探索する。実験において正電荷のミュオンを用いるのは標の中で補足されるのを防ぐためである。MEG 実験における $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ 崩壊のバックグラウンドには大きく 2 つあり、それぞれ 1 つは Prompt Background, もう 1 つは Accidental Background と呼ばれている。Prompt Background はミュオンの輻射崩壊である $\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu\gamma$ 由来である。このバックグラウンドでは光子は必ずしも陽電子と逆向きに飛ぶとは限らず、またエネルギーが両方も 52.8MeV になることはないため、区別することは比較的容易である。一方 MEG 実験において非常に深刻なバックグラウンドになるのが後者の Accidental Background である。Accidental Background は通常の Michel 崩壊 ($\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu\gamma$) と同時に偶然にガンマ線が観測されてしまうことである。ガンマ線の原因としては、先に述べたミュオンの輻射崩壊や陽電子の対消滅、 e^+ の制動放射などがある。探索事象シグナルの計数 N_a と、Accidental Background に関するアクシデンタルコインシデンスの計数 N_b はそれぞれ

$$N_s = R_\mu T \frac{\Omega}{4\pi} \epsilon_e \epsilon_\gamma \epsilon_{\text{cut}} B(\mu \rightarrow e\gamma) \tag{4.3.1}$$

$$N_b = R_\mu^2 f_e \epsilon_e f_\gamma \epsilon_\gamma \left(\frac{\Omega}{4\pi} \right)^2 \pi \frac{\Delta\theta_{e\gamma}^2}{\Omega} 2\Delta t T \tag{4.3.2}$$

と表される [52, 53]。ここで、 R_μ は標的に止まる μ^+ の単位時間あたりの数であり、 Ω は検出器の立体角、 T は実験時間、 $\epsilon_e \epsilon_\gamma$ はそれぞれ検出器の e^+, γ の検出効率、 ϵ_{cut} はデータ解析における検出効率を表す。また、 $f_e, f_\gamma, \Delta\theta_{e\gamma}, \Delta t$ はそれぞれデータ解析における e^+, γ のエネルギー、放出角度の差、検出時間の差の選択幅を表している。 N_s はビームレートに対して 1 次関数的に増加するのに対し、 N_b は 2 時間数的に増加する。つまりビームレートが増大するにつれて、バックグラウンドの効果が相対的に大きくなり、これが $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ 探索実験の実験感度を制限する。つまり、この Accidental Background が $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ 実験のボトルネックになっており、MEG-II 実験の次の $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ 探索は今のところ提案されていない (詳しくは [53] を参照)。

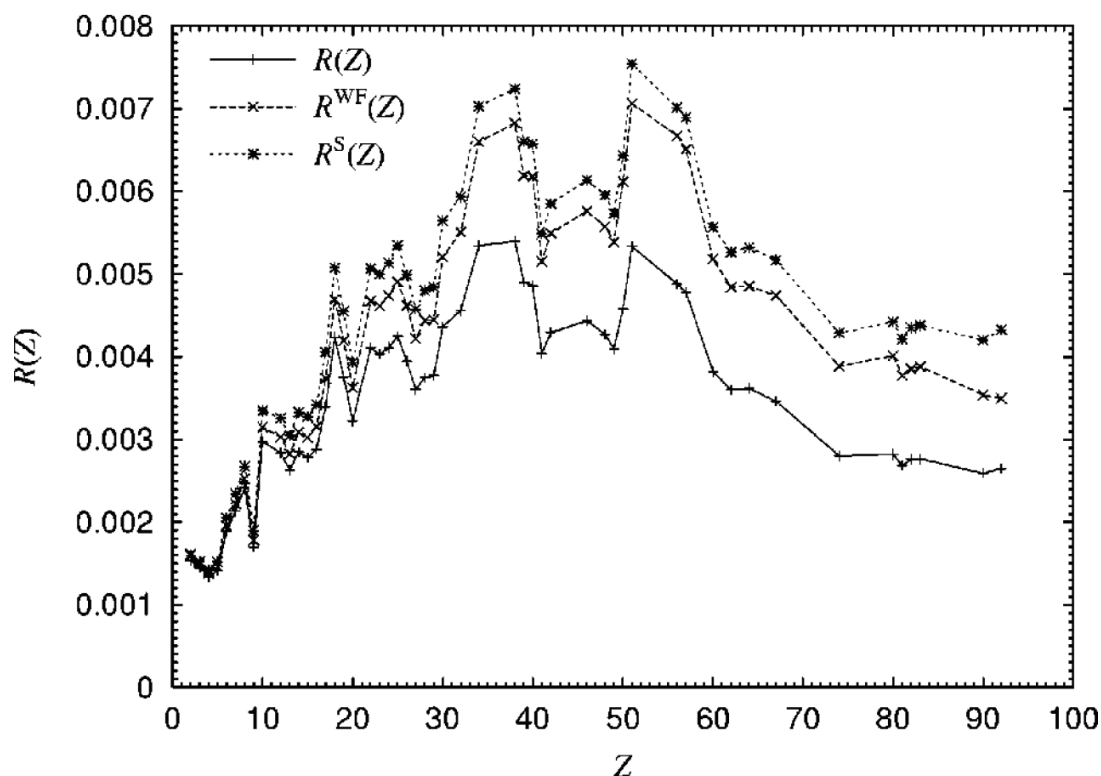


図 4.4 $R(Z) = B_{\mu e}(N)/\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ [54]

4.3.2 $\mu \rightarrow e\gamma$ と他の cLFV 過程

本論文では主に現在最も強い制限を与えている $\mu \rightarrow e\gamma$ 過程を考えるが、 $\mu \rightarrow e\gamma$ が photon dominant な場合には、他の $\mu \rightarrow 3e$ や $\mu - e$ conversion と簡単な関係で結びつけることが出来る。前者の場合は近似的に

$$\text{Br}(l_i^- \rightarrow l_j^- l_j^+ l_j^-) \sim \frac{\alpha}{8\pi} \left(\frac{13}{6} \ln \frac{m_{l_i}}{2m_{l_j}} - \frac{14}{9} \right) \text{Br}(l_i \rightarrow l_j \gamma) \sim 0.006 \times \text{Br}(l_i \rightarrow l_j \gamma) \quad (4.3.3)$$

の関係が成り立つ [65]。一方、後者に関しては

$$B_{\mu e}(N) = R(Z)\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) \quad (4.3.4)$$

となる [54]。ここで $B_{\mu e}(N) \equiv \Gamma(\mu^- N \rightarrow e^- N)/\Gamma(\mu^- N \rightarrow \nu_{\text{capture}})$ であり、 $R(Z)$ はミューオンを束縛する原子核の原子番号 (Z) に依存したパラメータである。PRIME/PRISM 実験では $B_{\mu e}(N) \sim 10^{-18}$ となり、 $R(Z_{\text{Al}} = 13) \sim 0.0025$, $R(Z_{\text{Ti}} = 22) \sim 0.0040$ のために既存の MEG 実験よりも 3 ~ 4 桁ほど精度が良くなり、New Physics のさらに広いパラメータ領域を調べることができると期待されている。

4.4 まとめ

cLFV 過程の探索は、New Physics 探索の意味で非常に意義深いものである。直接実験では到達できないようなエネルギースケールにまで感度があり、かつ標準模型では厳密に禁止された過程であるために、cLFV 過程の発見がただちに New Physics の決定的な証拠になるという利点を持っている。New Physics 模型の種類によって各 cLFV 過程の起こり方に違いが生じるが、 $\mu \rightarrow e\gamma$, $\mu \rightarrow 3e$, $\mu - e$ conversion はそれぞれ相補的な実

験になっており、それらを探索結果を組み合わせることによって、広いパラメータ領域を調べることが可能となっている。またもし仮に cLFV 過程が実験で観測されなかった場合にも、New Physics 模型のパラメータに対して非常に強い制限を与えることができるという利点も持っている。そのような理由から cLFV 過程を調べることは理論的にも実験的にも非常に重要なこととなっている。

第II部

Supersymmetric Seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れ

第 5 章

ν MSSM における荷電レプトンフレーバーの破れ

5.1 はじめに

荷電レプトンフレーバーの破れは標準模型の範囲内では厳密に禁止される一方、標準模型にニュートリノ質量を加えて拡張したモデルでは、クォークセクターと同様に荷電レプトンフレーバーの破れがループレベルで生じる。しかしその大きさはニュートリノの質量が非常に小さいために抑制され、実験で観測することはほぼ不可能となっている。その一方で、Supersymmetry を含めた BSM では、荷電レプトンフレーバーの破れがツリーレベルでも生じ得る。本章で考えるモデルは Supersymmetric type-I seesaw モデルであり、 ν MSSM と呼ばれる。本論文では ν MSSM と呼ぶことにし、このモデルにおける荷電レプトンフレーバーの破れを調べる。

一般に SUSY を含むモデルには非常に多くのフリーパラメータがある。その殆どが Soft SUSY breaking 項から来ているが、現象論的に何か計算しようと思った時にそれをフリーパラメータのままにしておくのは都合が悪い。本章で考える ν MSSM では GUT scale で Soft breaking 項が 3 つの共通したユニバーサルなパラメータ $m_0, M_{1/2}, A_0$ で与えられる mSUGRA boundary condition を考える。SUSY scale での種々のパラメータはくりこみ群方程式を解くことで得られる。この条件を用いた場合、もしも通常の MSSM を考えているならば Soft SUSY breaking パラメータに非対角成分が現れず、荷電レプトンフレーバーの破れは生じない。そのためフレーバーの視点からも mSUGRA の boundary condition を考えることは現象論的に非常に都合が良い。一方、本章で考える ν MSSM では、くりこみ群方程式にニュートリノ湯川の効果が現れて slepton, sneutrino の質量行列に非対角成分が現れる。標準模型 + ν_R モデルではニュートリノ質量が非常に小さいことが原因で荷電レプトンフレーバーの破れが抑制されたが、この ν MSSM の場合は、ニュートリノ湯川が非常に小さくないかぎりには、その効果がそのまま slepton の質量行列の非対角成分に現れるため、抑制されずに実験で観測可能な大きさの荷電レプトンフレーバーの破れを導く。

本章の目的は、 ν MSSM における荷電レプトンフレーバーの破れに関して、その代表的な特徴とマヨラナ質量行列の非対角成分が与える影響についての概観を説明することである。主に次章以降の準備である。

5.2 Lagrangian とニュートリノ湯川

ν MSSM のラグランジアンは次のように与えられる*1。

$$W_{\nu\text{MSSM}} = W_{\text{MSSM}} + (Y_N)_{ij} \hat{N}_i^c \hat{L}_j \cdot \hat{H}_u + \frac{1}{2} (M_N)_{ij} \hat{N}_i^c \hat{N}_j^c \quad (5.2.1)$$

*1 R-parity が保存するように決められている。

W_{MSSM} は MSSM の superpotential であり、新たに加わった項が右巻きニュートリノの湯川相互作用とマヨラナ質量項である。 Y_N, M_N は自由に決めることは出来ない。何故ならば、ニュートリノ振動実験によってニュートリノ質量差, MNS 行列は決まっている。つまりこの実験事実を再現するように Y_N, M_N を決めなければならない。 Y_N, M_N を決めるのに都合が良いパラメータの取り方が知られていて、それが以下で説明する Casas-Ibarra parameterization [88] である。ニュートリノ質量は Seesaw 機構を用いて

$$m_\nu^{\text{diag}} = \frac{v_u^2}{2} U_{\text{MNS}}^T Y_N^T M_N^{-1} Y_N U_{\text{MNS}} \quad (5.2.2)$$

となる。 $D_{\sqrt{m_\nu}} = \sqrt{m_\nu^{\text{diag}}}$ としたとき

$$D_{\sqrt{m_\nu}} D_{\sqrt{m_\nu}} = \frac{v_u^2}{2} U_{\text{MNS}}^T Y_N^T M_N^{-1} Y_N U_{\text{MNS}} \quad (5.2.3)$$

よって、 M_N が対角化されている場合 ($M_N = M_N^{\text{diag}}$)、

$$1 = \frac{v_u}{\sqrt{2}} D_{\sqrt{m_\nu}}^{-1} U_{\text{MNS}}^T Y_N^T D_{\sqrt{M_N}}^{-1} D_{\sqrt{M_N}}^{-1} Y_N U_{\text{MNS}} D_{\sqrt{m_\nu}}^{-1} \frac{v_u}{\sqrt{2}} \quad (5.2.4)$$

$$= \left[\frac{v_u}{\sqrt{2}} D_{\sqrt{M_N}}^{-1} Y_N U_{\text{MNS}} D_{\sqrt{m_\nu}}^{-1} \right]^T \left[\frac{v_u}{\sqrt{2}} D_{\sqrt{M_N}}^{-1} Y_N U_{\text{MNS}} D_{\sqrt{m_\nu}}^{-1} \right] \quad (5.2.5)$$

$$\equiv R^T R \quad (5.2.6)$$

と書き表せる。ここで R は任意の複素直交行列であり、

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23}^R & \sin \theta_{23}^R \\ 0 & -\sin \theta_{23}^R & \cos \theta_{23}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13}^R & 0 & \sin \theta_{13}^R \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13}^R & 0 & \cos \theta_{13}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12}^R & \sin \theta_{12}^R & 0 \\ -\sin \theta_{12}^R & \cos \theta_{12}^R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.7)$$

とパラメトライズすることができる。なを $\theta_{12}^R, \theta_{23}^R, \theta_{13}^R$ はすべて複素数である。そのため R は 6 つの独立なパラメータで表示することが出来る。この R を用いてニュートリノ湯川結合は

$$Y_N = \frac{\sqrt{2}}{v_u} D_{\sqrt{M_N}} R D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^\dagger \quad (5.2.8)$$

と書くことが出来る。ここで $D_{\sqrt{M_N}} = \text{diag}(\sqrt{M_N^{\text{diag}}})$ である。

R の意味を説明する。ラグランジアンの中の M_N と Y_E は \hat{N} と \hat{E}, \hat{L} の基底をうまく取ることによって必ず対角化することが出来る。もし $R = \mathbf{1}$ とすると、 \hat{L} の基底を U_{MNS} 回転してやることによって、つまり Y_E に U_{MNS} を押し付ける事によって Y_N を対角化することが出来る。つまり、 $R = \mathbf{1}$ は M_N と Y_N を同時対角化することが出来ることを意味する (これは必ずしも Y_N を対角化していることを意味しているわけではなく、対角化することが出来ると言っているだけということに注意する必要がある。) また R の特別な場合として $Y_N = W D_Y$ (ここで W : unitary matrix, D_Y : 対角行列) の時がある。この場合、

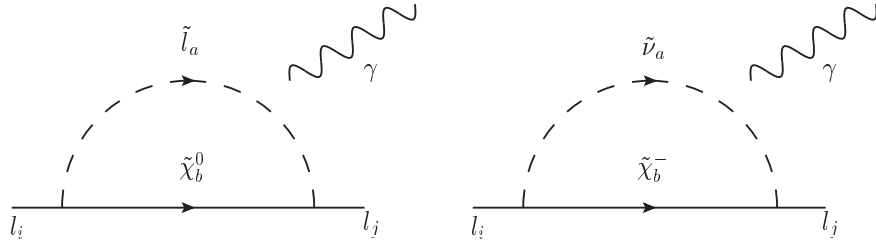
$$D_{\sqrt{M_N}} = \frac{v_u}{\sqrt{2}} W^* (D_{Y^{-1}} Y_N^T M_N^{-1} Y_N D_{Y^{-1}}) W^\dagger \quad (5.2.9)$$

となり、 Y_E と Y_N を同時に対角化することが出来る。つまり大事なものは、 Y_E, Y_N, M_N をすべて同時に対角化することは出来無いということである。

また、もし M_N が対角行列でない基底を選んだ場合、ニュートリノ湯川は M_N を対角化する行列 V を用いて

$$Y_N = \frac{\sqrt{2}}{v_u} V^\dagger D_{\sqrt{M_N}} R D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^\dagger \quad (5.2.10)$$

と書き直される。ただし $M_N^{\text{diag}} = V M_N V^\dagger$ である。

図 5.1 MSSM+ ν_R 模型における cLFV を引き起こすダイアグラム

5.3 $\mu \rightarrow e\gamma$ 過程

ν MSSM 模型において $\mu \rightarrow e\gamma$ を引き起こすダイアグラムは図 6.1 の 2 種類ある。一つが neutralino と slepton のループであり、もう一つが chargino と sneutrino のループである。 $l_i \rightarrow l_j\gamma$ (ただし i, j は世代の足で $i, j = 1, \dots, 3, i > j$) の amplitude は模型によらず一般に

$$T = em_{l_i} \epsilon^{\alpha*} \bar{u}_j(p-q) [i\sigma_{\alpha\beta} q^\beta (A_2^L P_L + A_2^R P_R)] u_i(p) \quad (5.3.1)$$

と書くことができる。ここで e は電荷、 ϵ は photon の偏極ベクトル、 u_i, u_j はそれぞれ initial と final のレプトンの波動関数であり、 $P_{L,R}$ は射影演算子を表している。具体的な模型によって決まるのは A_2^L, A_2^R であり、つまり図 6.1 の効果は A_2^L, A_2^R に入ってくる。MSSM の場合の A_2^L, A_2^R の具体的な表式は

$$A_2^{L,R} = A_2^{(n)L,R} + A_2^{(c)L,R} \quad (5.3.2)$$

分解することが出来る。ニュートラリーノ、チャージノの寄与の explicit な表現は、[65] より、表式を求めるのに必要な相互作用が

$$\mathcal{L}_{f\tilde{f}\tilde{\chi}^0} = \bar{f}_i (N_{iAX}^{R(f)} P_R + N_{iAX}^{L(f)} P_L) \tilde{\chi}_A^0 \tilde{f}_X + \text{h.c.} \quad (5.3.3)$$

$$\mathcal{L}_{\ell\tilde{\ell}\tilde{\chi}^\pm} = \bar{\ell}_i (C_{iAX}^{R(\ell)} P_R + C_{iAX}^{L(\ell)} P_L) \tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\nu}_X + \bar{\nu}_i (C_{iAX}^{R(\nu)} P_R + C_{iAX}^{L(\nu)} P_L) \tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\ell}_X + \text{h.c.} \quad (5.3.4)$$

とした時、

$$A_2^{(n)L} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{m_{\tilde{\ell}_X}^2} \left[N_{iAX}^{L(\ell)} N_{jAX}^{L(\ell)*} \frac{1}{6(1-x_{AX})^4} (1 - 6x_{AX} + 3x_{AX}^2 + 2x_{AX}^3 - 6x_{AX}^2 \ln x_{AX}) \right] \quad (5.3.5)$$

$$+ N_{iAX}^{L(\ell)} N_{jAX}^{R(\ell)*} \frac{M_{\tilde{\chi}_A^0}}{m_{\ell_j}} \frac{1}{(1-x_{AX})^3} (1 - x_{AX}^2 + 2x_{AX} \ln x_{AX}) \quad (5.3.6)$$

$$A_2^{(n)R} = A_2^{(n)L} \Big|_{L \leftrightarrow R} \quad (5.3.7)$$

$$A_2^{(c)L} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{m_{\tilde{\nu}_X}^2} \left[C_{iAX}^{L(\ell)} C_{jAX}^{L(\ell)*} \frac{1}{6(1-y_{AX})^4} (2 + 3y_{AX} - 6y_{AX}^2 + y_{AX}^3 + 6y_{AX} \ln y_{AX}) \right] \quad (5.3.8)$$

$$+ C_{iAX}^{L(\ell)} C_{jAX}^{R(\ell)*} \frac{M_{\tilde{\chi}_A^-}}{m_{\ell_j}} \frac{1}{(1-y_{AX})^3} (-3 + 4y_{AX} - y_{AX}^2 - 2 \ln y_{AX}) \quad (5.3.9)$$

$$A_2^{(c)R} = A_2^{(c)L} \Big|_{L \leftrightarrow R} \quad (5.3.10)$$

となる。

これを用いては $\text{Br}(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ は

$$\text{Br}(l_i \rightarrow l_j \gamma) = \frac{e^2}{16\pi} \frac{m_{l_i}^5}{\Gamma_{l_i}} (|A_2^L|^2 + |A_2^R|^2) \quad (5.3.11)$$

となる。ここで、 Γ_{l_i} はレプトン l_i の total width である。

上のように厳密に計算する他に、分岐比を概算する方法も知られている。図 6.1 より、 $\mu \rightarrow e \gamma$ を起こすためには slepton と sneutrino の mass matrix の off diagonal 成分が必要である。slepton, sneutrino の mass matrix はそれぞれ

$$M_i^2 = \begin{pmatrix} M_{LL}^2 & M_{LR}^2 \\ M_{RL}^2 & M_{RR}^2 \end{pmatrix} \quad (5.3.12)$$

$$(M_\nu^2)_{ij} = m_{L,ij}^2 + \frac{1}{2} M_Z^2 \cos 2\beta \delta_{ij} \quad (5.3.13)$$

ここで $M_{LL}^2, M_{RR}^2, M_{LR}^2, M_{RL}^2$ は 3×3 行列で

$$(M_{LL}^2)_{ij} = m_{L,ij}^2 + v_d^2 (Y_E^\dagger Y_E)_{ij} + M_Z^2 \cos 2\beta \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W\right) \delta_{ij} \quad (5.3.14)$$

$$(M_{RR}^2)_{ij} = m_{E,ij}^2 + v_d^2 (Y_E^\dagger Y_E)_{ij} - M_Z^2 \cos 2\beta \sin^2 \theta_W \delta_{ij} \quad (5.3.15)$$

$$(M_{LR}^2)_{ij} = v_d \left((A_E^*)_{ij} + \mu \tan \beta \right) (Y_E)_{ij} \quad (5.3.16)$$

$$(M_{RL}^2)_{ij} = ((M_{LR}^2)^\dagger)_{ij} \quad (5.3.17)$$

と書ける。今回 mSUGRA like な boundary を考えているために、GUT スケールではすべての soft breaking パラメータが単位行列に比例するため、 M_i^2, M_ν^2 のどちらも非対角成分はあらわれない。しかし M_N より高いエネルギースケールでは m_L^2 の RGE が

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} (m_L^2)_{ij} = \left(16\pi^2 \frac{d}{dt} (m_L^2)_{ij} \right)_{\text{MSSM}} + (Y_N^\dagger Y_N m_L^2)_{ij} + (m_L^2 Y_N^\dagger Y_N)_{ij} + 2(Y_N^\dagger (m_N^2)^\top Y_N)_{ij} + 2(Y_N^\dagger Y_N)_{ij} m_{H_2}^2 + 2(T_N^\dagger T_N)_{ij} \quad (5.3.18)$$

と書けるので (ここで $t = \ln Q$ で、 Q は繰り込みスケール)、SUSY scale では m_L^2 に非対角成分があらわれることにより M_i^2, M_ν^2 も非対角成分を獲得する。low-energy scale での slepton の mass matrix の非対角成分は上の RGE に対して対数近似を用いて次のように書ける [63–65]。

$$(\Delta m_L^2)_{ij} = -\frac{1}{16\pi^2} (6m_0^2 + 2A_0^2) \left[Y_N^\dagger \left(\ln \frac{M_{\text{GUT}}}{M_N} \right) Y_N \right]_{ij} \quad (5.3.19)$$

式 (7.3.25) の形からも明らかなように、cLFV を引き起こす slepton mass の非対角成分は右巻きニュートリノの湯川結合 Y_N から来ている。mass insertion の方法を用いることにより、分岐比はおおよそ

$$\text{Br}(l_i \rightarrow l_j \gamma) \sim \frac{\alpha^3}{G_F^2} \frac{((m_L^2)_{ij})^2}{M_{\text{SUSY}}^8} \quad (5.3.20)$$

と見積もることができる [65]。現在最も厳しい制限をつけているのが MEG 実験で、その大きさは 5.7×10^{-13} である [28, 32]。MEG 実験はアップグレードで $\sim 6 \times 10^{-14}$ まで感度が上がることが計画されており [33]、New Physics 探索実験として非常に重要なものとなっている。

5.4 数値計算のための準備

この節では、数値計算するにあたってのパラメータのインプットを与える。

5.4.1 Neutrino sector

ニュートリノセクターのインプットとして、本章では MNS 行列の混合角を

$$s_{12} = 0.55, s_{23} = 0.66, s_{13} = 0.15 \quad (5.4.1)$$

とする。また複素位相は

$$\delta = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 0 \quad (5.4.2)$$

とする。また階層制としては normal hierarchy を仮定し、一番軽いニュートリノ質量を

$$m_{\nu,1} = 10^{-4} \text{ eV} \quad (5.4.3)$$

とする。また M_N に質量階層性を与える場合

$$M_N^{\text{diag}} = \tilde{M}_N \begin{pmatrix} \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4.4)$$

を仮定する。

5.4.2 SUSY sector

本論文では、SUSY parameter に対して mSUGRA like な boundary condition を課すことにする。つまり GUT スケールで、soft breaking parameter に対して

$$M_i \equiv M_{1/2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.4.5)$$

$$m_{H_i}^2 = m_{\tilde{f}}^2 \equiv m_0^2 \quad (\tilde{f} = \tilde{Q}, \tilde{U}, \tilde{D}, \tilde{L}, \tilde{E}, \tilde{N})(H_i = H_u, H_d) \quad (5.4.6)$$

$$A_f \equiv A_0 \quad (f = U, D, E, N) \quad (5.4.7)$$

という仮定を置く。残りのパラメータである $|\mu|, B_\mu$ に関しては、tadpole conditions の解とする。つまり、独立な SUSY パラメータは

$$m_0, M_{1/2}, A_0, \tan \beta, \text{sign}(\mu) \quad (5.4.8)$$

の 5 つとなる。なお、本論文では特に断りが無い限り

$$m_0 = M_{1/2} = A_0 \equiv M_{\text{SUSY}} \quad (5.4.9)$$

を仮定し

$$\tan \beta = 10, \text{sign}(\mu) = +1 \quad (5.4.10)$$

とする。

5.5 結果

この節では ν MSSM 模型における $\mu \rightarrow e\gamma$ 過程の特徴について説明する。

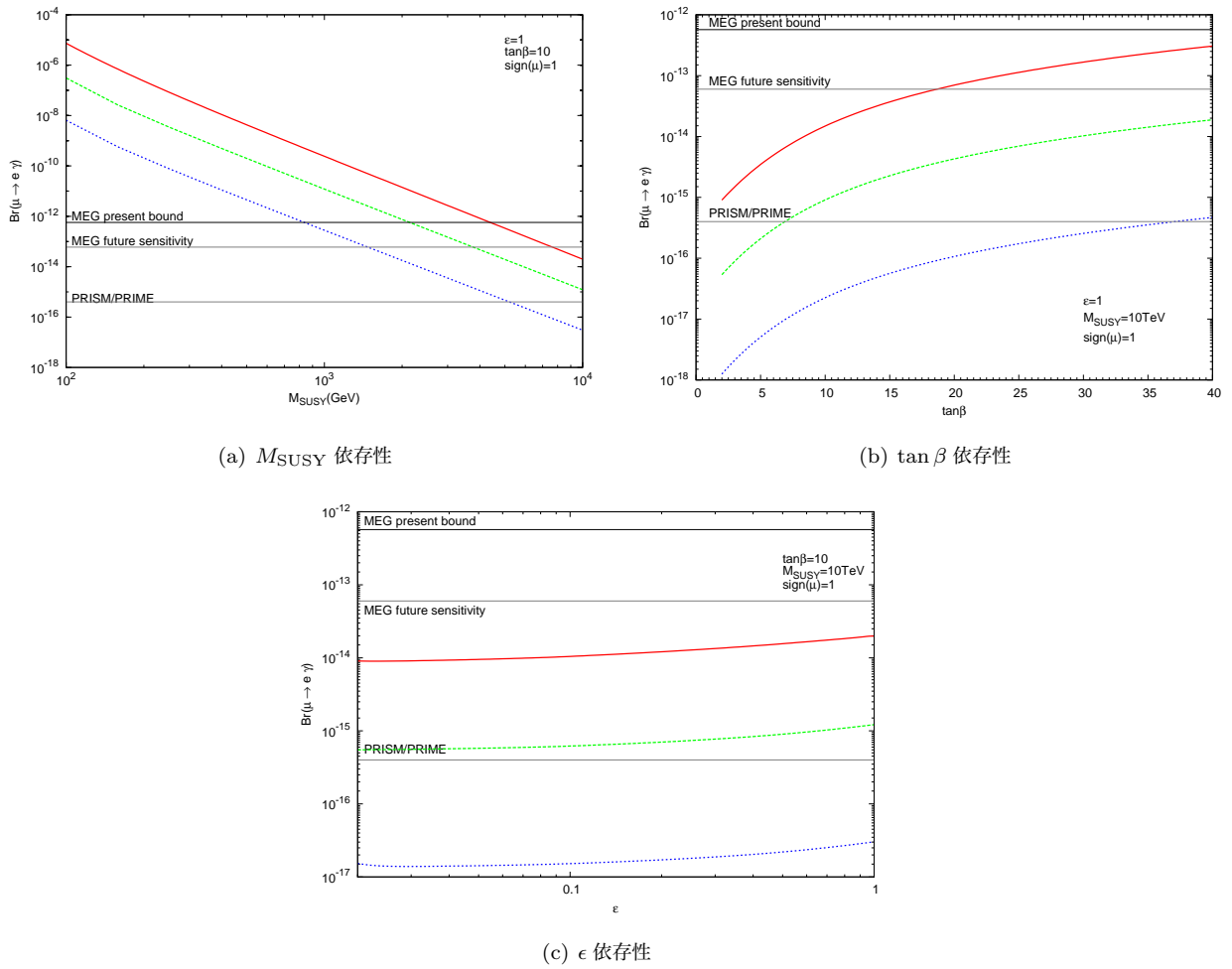


図 5.2 それぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の M_{SUSY} , $\tan\beta$, ϵ 依存性。赤の実線は $M_N = 10^{15}\text{GeV}$, 緑の破線は $M_N = 10^{14}\text{GeV}$, 青の点線は $M_N = 10^{13}\text{GeV}$ である。

図 5.2

図 5.2 はそれぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ 依存性。赤の実線は $(V = 1, R = 1)$ の場合であり、緑の点線は $(V = U_{\text{MNS}}, R = 1)$, 緑の破線は $(V = 1, R = U_{\text{MNS}})$ である。固定していないパラメータは $M_N = 10^{15}\text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 10\text{TeV}$ である。図 5.2(a) に関しては、SUSY mass scale が重くなるに連れて、diagram に寄与する SUSY 粒子も重くなるために、分岐比が小さくなる。図 5.2(b) に関しては、 $\tan\beta$ が小さいほどニュートリノ湯川 Y_N が大きくなるために、それに対応して分岐比が大きくなる。

図 5.3

図 5.3 は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ 依存性を V, R がそれぞれ $1, U_{\text{MNS}}$ の場合について調べている。 M_N に質量階層性がない場合スレプトンの非対角成分は

$$Y_N^\dagger Y_N = \frac{2}{v_u^2} [U_{\text{MNS}} D_{\sqrt{m_\nu}} R^\dagger D_{\sqrt{M_N}} V] \left[V^\dagger D_{\sqrt{M_N}} R D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^\dagger \right] \quad (5.5.1)$$

$$= \frac{2\tilde{M}_N}{v_u^2} U_{\text{MNS}} (m_{\nu L}^{\text{diag}}) U_{\text{MNS}}^\dagger \quad (5.5.2)$$

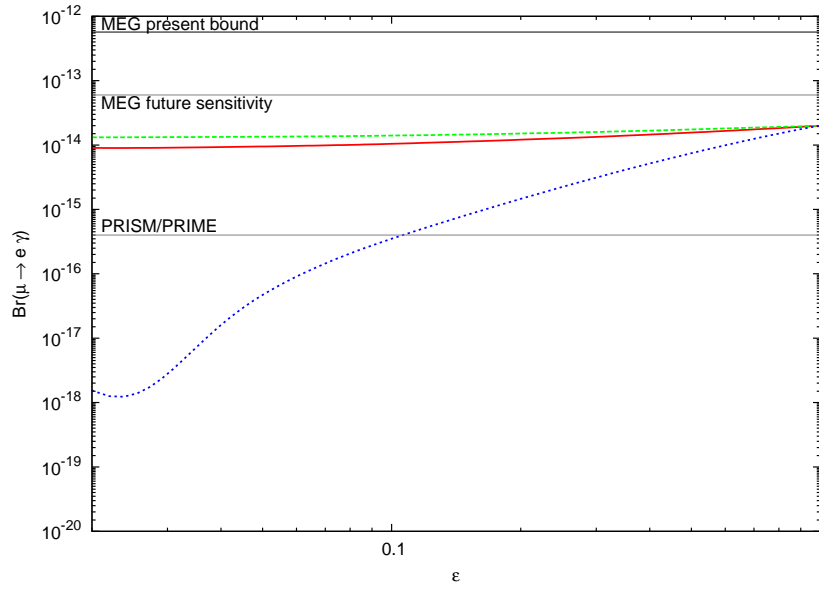


図 5.3 それぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ 依存性。赤の実線は $(V = \mathbf{1}, R = \mathbf{1})$ の場合であり、緑の破線は $(V = \mathbf{U}_{\text{MNS}}, R = \mathbf{1})$ 、青の点線は $(V = \mathbf{1}, R = \mathbf{U}_{\text{MNS}})$ である。 $\tilde{M}_N = 10^{15}\text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 10\text{TeV}$ 。

となって、行列 V , R の効果は現れない。一方、質量階層性がある場合には

$$Y_N^\dagger \left(\ln \frac{M_{\text{GUT}}}{M_N} \right) Y_N = \frac{2}{v_u^2} [U_{\text{MNS}} D_{\sqrt{m_\nu}} R^\dagger D_{\sqrt{M_N}} V] \left(\ln \frac{M_{\text{GUT}}}{M_N} \right) [V^\dagger D_{\sqrt{M_N}} R D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^\dagger] \quad (5.5.3)$$

となって、 V , R の効果が現れる。それが図 5.3 の違いとして現れている。

図 5.4

それぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の単位行列からのズレとしての $\theta_{12}^{R,V}$, $\theta_{23}^{R,V}$, $\theta_{13}^{R,V}$ 依存性を調べている。

5.6 まとめ

この章では、Supersymmetric seesaw 機構の中でもっとも cLFV 過程を調べられている $nu\text{MSSM}$ 模型の特徴について簡単にまとめた。特に強調しておきたい点としては、 νMSSM 模型ではマヨラナ質量が縮退していない場合に混合行列 V や R の影響を受けるということである。このことは後の本博士論文の主テーマである Supersymmetric Inverse Seesaw 機構と比較する上で非常に重要となる。

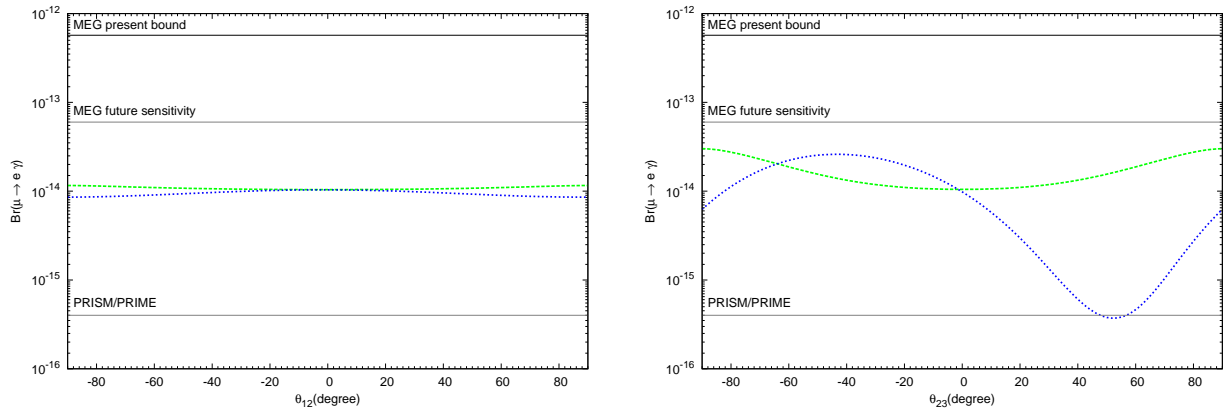
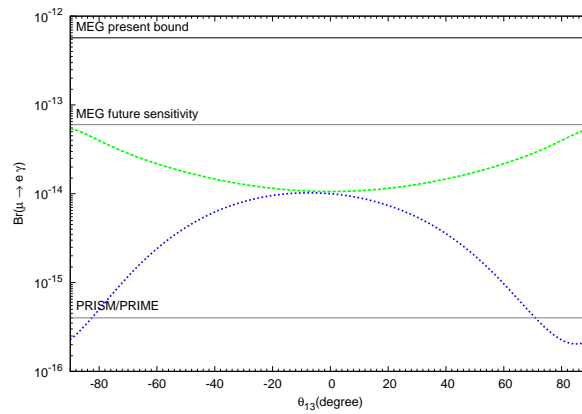
(a) θ_{12} 依存性(b) θ_{23} 依存性(c) θ_{13} 依存性

図 5.4 それぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の $\theta_{12}^{R,V}, \theta_{23}^{R,V}, \theta_{13}^{R,V}$ 依存性を調べている (単位行列からのズレ)。 $\tilde{M}_N = 10^{15}\text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 10\text{TeV}$, $\epsilon = 0.1$ 。青の点線が θ^R 依存性を表しており、緑の点線が θ^V を示している。

第 6 章

ν NMSSM における荷電レプトンフレーバーの破れ

我々は \mathbb{Z}_3 -invariant NMSSM with right-handed neutrinos において、荷電レプトンフレーバーの破れ過程である $\mu \rightarrow e\gamma$ を調べた。 $\mu \rightarrow e\gamma$ の原因となるのは slepton mass matrices の非対角要素であり、それが Neutrino yukawa の非対角要素が輻射補正を通じて起こるという機構自体は MSSM+ ν_R と同様であるが、好まれるパラメータ領域は MSSM の場合と異なることを示す。模型の中の soft SUSY breaking parameter は GUT スケールにおける boundary condition として与えるが、今回考える模型ではすべてのパラメータをユニバーサルな $A_0, m_0, M_{1/2}$ と一致させる full-constrained NMSSM ではなく、semi-constrained NMSSM と呼ばれる、その条件を少しゆるめたもの考える。この模型では、SUSY breaking mass が 10TeV でも $\mu \rightarrow e\gamma$ が近い将来の実験で観測される可能性があることを示す。なおこの章は我々が発表した論文 [55] を基にしている。

6.1 はじめに

ニュートリノ振動の観測事実により [28]、標準模型において荷電レプトンフレーバーは破れることが明らかになった。しかしその分岐比の大きさはニュートリノの質量差が W ボソンの質量に比べて非常に小さいために抑制され非常に小さくなり、近い将来の実験で観測することは非常に困難である。一方、SM は様々な問題により拡張される必要があり、現在 Beyond Standard Model の研究が進められている。一般に beyond the standard model においては荷電レプトンフレーバーは保存せず一般に破れることが知られており、その意味で荷電レプトンフレーバーの破れの発見は BSM を発見するという意味でも非常に重要なものとなっている。最近 MEG 実験が $Br(\mu \rightarrow e\gamma)$ の上限を更新し、その値は現在 5.7×10^{-13} となっている [32]。実験の精度が上がるにつれて、BSM のパラメータにも強い制限を与えるようになるため、その精度向上も非常に重要なものとなっている。

BSM の中で Supersymmetry は現在でも有力な候補であり、LHC において精力的に探索がなされているが、現在までその徴候は見つかっていない。SUSY を含む模型の中でもっともよく調べられている模型は minimal supersymmetric standard model(MSSM) であるが、以前より MSSM には μ 問題を含む様々な問題があることが指摘されており、現在までに様々な形で拡張がなされている。Next-to-MSSM(NMSSM) は MSSM の拡張模型の 1 つで、MSSM に gauge singlet な superfield を加えた模型である。MSSM における μ -term は singlet の vacuum expectation value で与えられるため、MSSM の抱える μ 問題を解決することができるという利点を持つ。その意味で NMSSM は標準模型の自然な拡張となっている。

MSSM における困難の1つにヒッグス質量がある。MSSM の場合、tree level のヒッグス質量は

$$m_{h,\text{MSSM}}^2 \approx M_Z^2 \cos^2 2\beta + \Delta m_{h,1\text{Loop}}^2 \quad (6.1.1)$$

より M_Z 程度にしかならず、126GeV ヒッグス質量 [28] を再現するためには量子補正であげなければならない。補正の主な寄与は top yukawa であり、その効果を大きくするためには stop mass が top mass に比べて十分大きくある必要がある。一方 NMSSM では CP-even のヒッグス質量は式 (6.2.1) のパラメータを用いて

$$m_{h,\text{NMSSM}}^2 \approx M_Z^2 \cos^2 2\beta + \lambda^2 v^2 \sin^2 2\beta + \Delta m_{h,1\text{Loop}}^2 \quad (v \sim 174\text{GeV}) \quad (6.1.2)$$

のように書け [56]、新たに加えた singlet のおかげで MSSM とくらべて tree level higgs mass を特に small $\tan\beta$ の領域で上げることができる。(実際は CP-even higgs mass matrix の off diagonal 成分がマイナスの寄与を与えるので、必ずしも NMSSM でヒッグス質量が大きくなるとは限らない。このことは重要なので後のセクションで議論することとする。)

MSSM にはたくさんのパラメータ (soft breaking terms) があるが、本来それらのパラメータは現在他の理論から予言的に決めることが出来ない。そのため通常なんらかの条件を課すことによってパラメータの数を減らす。本研究では SUSY breaking term を GUT スケールで universal な $m_0, M_{1/2}, A_0$ にとる mSUGRA like な boundary condition を考える。SUSY scale でのパラメータの値は GUT スケールからくりこみ群方程式を走らせることによって得ることができる。mSUGRA like な boundary condition は SUSY 由来の FCNC を回避する上で非常に有効であるが、この場合 MSSM のパラメータの多くが diagonal になるため荷電レプトンフレーバーの破れも起こらなくなる。つまり cMSSM/mSUGRA では荷電レプトンフレーバーの破れは起こらない。これは cNMSSM の場合も同様である。

標準模型の範囲内ではニュートリノ質量はゼロであるが、ニュートリノ振動の観測事実からニュートリノには微小ながら質量があることが明らかになっている。そのため非常に小さなニュートリノ質量を自然に導入する仕組みが必要であり様々な方法が考えられている。本論文ではその仕組として type-I Seesaw 機構を考えることとする。MSSM の場合でも type-I seesaw 機構は適応することができる。この MSSM+ ν_R (ν MSSM) では、cMSSM like な boundary condition を課した場合でも neutrino yukawa の非対角要素が輻射補正を通じて slepton mass matrices の非対角要素を生み出し、それが $\mu \rightarrow e\gamma$ を引き起こすことが知られている。本論文で考える NMSSM+ ν_R (ν NMSSM) においてもその機構は同様であるが、semi-constrained NMSSM の場合、パラメータの取り方に自由度があるので MSSM の場合とは異なるパラメータ領域が好まれるようになる。

本論文では続く section2 で本論文の扱う Model の説明を行い、section3 で slepton mass matrices の off diagonal element の由来、section4 で種々のパラメータに対する制限について述べる。section5 で数値計算の結果を議論し、最後にまとめを行う。

6.2 今回考える模型

6.2.1 \mathbb{Z}_3 -invariant NMSSM

Next-to-Minimal Supersymmetric standard model(NMSSM) は MSSM の拡張模型のうちの一つで、MSSM に gauge singlet な superfield S を加えた模型である。 \mathbb{Z}_3 -invariant NMSSM では MSSM に含まれる $\mu \hat{H}_u \cdot \hat{H}_d$ は $\lambda \hat{S} \hat{H}_u \cdot \hat{H}_d$ に置き換わり、 μ は singlet vev s を用いて $\mu_{\text{eff}} = \lambda s$ と決まる。つまり \mathbb{Z}_3 -invariant NMSSM の Superpotential は

$$W_{\text{NMSSM}} = W_{\text{MSSM}} \Big|_{\mu=0} + \lambda \hat{S} \hat{H}_u \cdot \hat{H}_d + \frac{1}{3} \kappa \hat{S}^3 \quad (6.2.1)$$

	\hat{Q}	\hat{U}^c	\hat{D}^c	\hat{L}	\hat{E}^c	\hat{N}^c	\hat{H}_u	\hat{H}_d	\hat{S}
Z_3	ω^2	1	1	ω^2	1	1	ω	ω	ω

表 6.1 Z_3 -charge assignment ($\omega = e^{2\pi i/3}$)

のように与えられる。ここで、 $\hat{H}_u \cdot \hat{H}_d$ は $SU(2)$ 同士の積を表し、ハット付の文字は superfield を表している。なお R -parity の保存を仮定しているため、 \hat{S} の R -parity は even とする。対応する soft breaking term は

$$V_{\text{soft}} = V_{\text{MSSM}}|_{\mu=B=0} + \lambda A_\lambda S H_u \cdot H_d + \frac{1}{3} \kappa A_\kappa S^3 + m_S^2 |S|^2 \quad (6.2.2)$$

となる。

constrained NMSSM の場合、soft breaking term に含まれる gaugino や sfermion の soft breaking mass、A-term は cMSSM と同様に GUT スケールで共通の値を取る：

$$M_i \equiv M_{1/2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.2.3)$$

$$m_{H_i}^2 = m_f^2 \equiv m_0^2 \quad (f = \tilde{Q}, \tilde{U}, \tilde{D}, \tilde{L}, \tilde{E}) \quad (H_i = H_u, H_d) \quad (6.2.4)$$

$$A_f \equiv A_0 \quad (f = U, D, E) \quad (6.2.5)$$

NMSSM-like なパラメータである A_λ , A_κ , m_S^2 に関して、本論文では GUT スケールで $A_\lambda = A_\kappa \equiv A_0$, $m_S^2 \equiv m_0^2$ とするものを full-constrained NMSSM、 $A_\lambda, A_\kappa \neq A_0$, $m_S^2 \neq m_0^2$ とするものを semi-constrained NMSSM と呼ぶことにする。さらに semi-constrained NMSSM の中で、GUT スケールでの境界条件をゆるめ $m_{H_u}^2, m_{H_d}^2 \neq m_0^2$ としたものを Non-Universal Higgs Mass (NUHM) semi-constrained NMSSM と呼び、そうでないものを MSSM-like semi-constrained NMSSM として区別することにする。本論文では NUHM と MSSM-like の両方の場合を考える。

6.2.2 Z_3 -invariant NMSSM + Right-Handed neutrino

本論文で考える模型は、 Z_3 -invariant NMSSM に Type1 Seesaw 機構 [68–70] を使ってニュートリノ質量を入れる最もシンプルなものを採用する。そのスーパーポテンシャルは次のように書ける。

$$W = W_{\text{NMSSM}} + (Y_N)_{ij} \hat{H}_u \cdot \hat{L}_i \hat{N}_j^c + \frac{1}{2} (M_N)_{ij} \hat{N}_i^c \hat{N}_j^c \quad (6.2.6)$$

Z_3 -charge の assignment は Table 6.1 としている。そのため Superpotential として

$$\lambda_\nu \hat{S} \hat{N} \cdot \hat{N} \quad (6.2.7)$$

という項は禁止されることとなる。この項で作られる Majorana mass から TypeI Seesaw を通じてニュートリノ質量を導出することは可能だがその場合、singlet VEV が高々 $\mathcal{O}(1 - 100 \text{ TeV})$ であることから Majorana mass も同程度のオーダーになり、小さなニュートリノ質量を作るためにはニュートリノの yukawa coupling (Y_N) を小さくとらなければならない。結果 $Br(\mu \rightarrow e\gamma)$ は非常に小さくなってしまう。

この模型におけるニュートリノ質量は

$$(m_\nu)_{ij} = v^2 \sin^2 \beta (Y_N)_{ik} ((M_N)^{-1})_{kl} (Y_N)_{lj} \quad (6.2.8)$$

$$= (U_{\text{MNS}}^T)_{ik} m_{\nu,k}^D (U_{\text{MNS}})_{kj} \quad (6.2.9)$$

となる。この章では、ニュートリノの質量階層性として normal hierarchy を採用し、

$$m_{\nu,1} = 10^{-6} \text{ eV} \quad (6.2.10)$$

$$m_{\nu,2} = \sqrt{m_{\nu,1}^2 + \Delta m_{21}^2} \cong 0.0087 \text{ eV} \quad (6.2.11)$$

$$m_{\nu,3} = \sqrt{m_{\nu,2}^2 + \Delta m_{32}^2} \cong 0.050 \text{ eV} \quad (6.2.12)$$

とし、MNS 行列については式 (3.3.1) の表式を用いて

$$s_{12} = 0.55, \quad s_{23} = 0.66, \quad s_{13} = 0.15 \quad (6.2.13)$$

$$\delta = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 0 \quad (6.2.14)$$

とする。また M_N に関して、これは 3×3 成分があるが一般に自由に取ることができる。Majorana mass の構造が $\mu \rightarrow e\gamma$ に少なからず影響をあたえることは知られているが [58–62] 本論文では

$$(M_N)_{ij} = M_\nu \times \delta_{ij} \quad (6.2.15)$$

の仮定を置いて計算を行うこととする。

6.3 荷電レプトンフレーバーの破れ

この章では New Physics として NMSSM+ ν_R 模型を考え、その模型における cLFV として $\mu \rightarrow e\gamma$ 過程を議論する。

6.3.1 cLFV in the Standard Model with ν_R

標準模型の範囲内では、荷電レプトンフレーバーは厳密に保存する。しかしニュートリノ振動実験により、ニュートリノには質量があることが明らかになったため、標準模型は少なくともニュートリノセクターに関しては拡張が必要となっている。最も単純な拡張としては、標準模型に右巻きニュートリノ (ν_R) を導入することであり、それによって通常の Dirac 質量項を組むことができる。

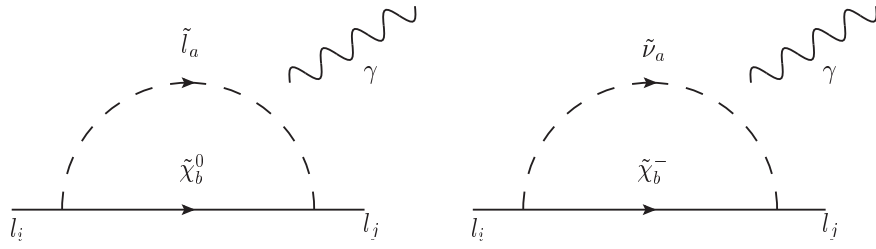
標準模型に右巻きニュートリノを導入した場合、荷電レプトンフレーバーは厳密に保存せず破れる。これはクォークセクターの場合と同様で、ゲージの固有状態と質量固有状態の違いから生じている。この場合の $\mu \rightarrow e\gamma$ の分岐比は

$$\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{\alpha}{32\pi} \left| \sum_{i=2,3} (U_{MNS})_{ei}^* (U_{MNS})_{\mu i} \frac{m_{\nu,i}^2 - m_{\nu,1}^2}{M_W^2} \right|^2 \quad (6.3.1)$$

となる [29–31]。ニュートリノの質量差は W ボソンの質量に比べて十分に小さいために、 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) < 10^{-54}$ となり、近い将来の実験で観測することは非常に難しい。しかしながら、一般に New Physics を考えると荷電レプトンフレーバーは保存せず破れ、しかもその大きさは近い将来の実験で観測されうる大きさになることが予言されている。そのため cLFV は New Physics 探索の意味で非常に重要なものとなっている。

6.3.2 cLFV in Our Model

NMSSM+ ν_R 模型において cLFV を引き起こすダイアグラムは MSSM の場合と同様に図 6.1 の 2 種類ある。一つが neutralino と slepton のループであり、もう一つが chargino と sneutrino のループである。

図 6.1 NMSSM+ ν_R 模型における cLFV を引き起こすダイアグラム

$l_i \rightarrow l_j \gamma$ (ただし i, j は世代の足で, $i, j = 1, \dots, 3, i > j$) の amplitude は模型によらず一般に

$$T = em_{l_i} \epsilon^{\alpha*} \bar{u}_j(p-q) [i\sigma_{\alpha\beta} q^\beta (A_2^L P_L + A_2^R P_R)] u_i(p) \quad (6.3.2)$$

と書くことができる。ここで e は電荷、 ϵ は photon の偏極ベクトル、 u_i, u_j はそれぞれ initial と final のレプトンの波動関数であり、 $P_{L,R}$ は射影演算子を表している。具体的な模型によって決まるのは A_2^L, A_2^R であり、つまり図 6.1 の効果は A_2^L, A_2^R に入ってくる。MSSM の場合の A_2^L, A_2^R の具体的な表式は参考文献 [63–66] で計算されているが、NMSSM の場合、表式は MSSM の場合と同様なので本論文ではこの結果を用いることとする。これを用いては $\text{Br}(l_i \rightarrow l_j \gamma)$ は

$$\text{Br}(l_i \rightarrow l_j \gamma) = \frac{e^2}{16\pi} \frac{m_{l_i}^5}{\Gamma_{l_i}} (|A_2^L|^2 + |A_2^R|^2) \quad (6.3.3)$$

となる。ここで、 Γ_{l_i} はレプトン l_i の total width である。

上のように厳密に計算する他に、分岐比を概算する方法も知られている。図 6.1 より、 $\mu \rightarrow e \gamma$ を起こすためには slepton と sneutrino の mass matrix の off diagonal 成分が必要である。slepton, sneutrino の mass matrix はそれぞれ

$$M_{\tilde{l}}^2 = \begin{pmatrix} M_{LL}^2 & M_{LR}^2 \\ M_{RL}^2 & M_{RR}^2 \end{pmatrix} \quad (6.3.4)$$

$$(M_{\tilde{\nu}}^2)_{ij} = m_{L,ij}^2 + \frac{1}{2} M_Z^2 \cos 2\beta \delta_{ij} \quad (6.3.5)$$

ここで $M_{LL}^2, M_{RR}^2, M_{LR}^2, M_{RL}^2$ は 3×3 行列で

$$(M_{LL}^2)_{ij} = m_{L,ij}^2 + v_d^2 (Y_E^\dagger Y_E)_{ij} + M_Z^2 \cos 2\beta \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W\right) \delta_{ij} \quad (6.3.6)$$

$$(M_{RR}^2)_{ij} = m_{E,ij}^2 + v_d^2 (Y_E^\dagger Y_E)_{ij} - M_Z^2 \cos 2\beta \sin^2 \theta_W \delta_{ij} \quad (6.3.7)$$

$$(M_{LR}^2)_{ij} = v_d \left((A_E^*)_{ij} + \mu \tan \beta \right) (Y_E)_{ij} \quad (6.3.8)$$

$$(M_{RL}^2)_{ij} = ((M_{LR}^2)^\dagger)_{ij} \quad (6.3.9)$$

と書ける。今回 mSUGRA like な boundary を考えているために、GUT スケールではすべての soft breaking パラメータが単位行列に比例するため、 $M_{\tilde{l}}^2, M_{\tilde{\nu}}^2$ のどちらも非対角成分はあらわれない。しかし M_N より高いエネルギースケールでは m_L^2 の RGE が

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} (m_L)_{ij}^2 = \left(16\pi^2 \frac{d}{dt} (m_L)_{ij}^2 \right)_{\text{NMSSM}} \quad (6.3.10)$$

$$+ (Y_N^\dagger Y_N m_L^2)_{ij} + (m_L^2 Y_N^\dagger Y_N)_{ij} + 2(Y_N^\dagger (m_N^2)^\top Y_N)_{ij} + 2(Y_N^\dagger Y_N)_{ij} m_{H_2}^2 + 2(T_N^\dagger T_N)_{ij} \quad (6.3.11)$$

と書けるので (ここで $t = \ln Q$ で、 Q は繰り込みスケール)、SUSY scale では m_L^2 に非対角成分があらわれることにより $M_{\tilde{l}}^2, M_{\tilde{\nu}}^2$ も非対角成分を獲得する。low-energy scale での slepton の mass matrix の非対角成分は上の RGE に対して対数近似を用いて次のように書ける [63–65]。

$$(\Delta m_L^2)_{ij} = -\frac{1}{16\pi^2} \ln \frac{M_{\text{GUT}}}{M_\nu} (6m_0^2 + 2A_0^2)(Y_N^\dagger Y_N)_{ij} \quad (6.3.12)$$

式 (6.3.12) の形からも明らかなように、cLFV を引き起こす slepton mass の非対角成分は右巻きニュートリノの湯川結合 Y_N から来ている。mass insertion の方法を用いることにより、分岐比はおおよそ

$$\text{Br}(l_i \rightarrow l_j \gamma) \sim \frac{\alpha^3}{G_F^2} \frac{((m_L^2)_{ij})^2}{M_{\text{SUSY}}^8} \quad (6.3.13)$$

と見積もることができる [65]。現在最も厳しい制限をつけているのが MEG 実験で、その大きさは 5.7×10^{-13} である [28, 32]。MEG 実験はアップグレードで $\sim 6 \times 10^{-14}$ まで感度が上がるのが計画されており [33]、New Physics 探索実験として非常に重要なものとなっている。

6.4 Constraints on the Parameters in the Model

この section では NMSSM にあるパラメータに対する制限を考える [56]。

Maximal Tree-level Higgs Mass condition

NMSSM の利点の一つとして、MSSM よりヒッグスボソンの質量を Tree level で上げることが出来ることがある。式 (6.1.2) からわかるようにヒッグス質量を上げるためには、large λ かつ、small $\tan \beta$ が必要になる。式 (6.1.2) は CP-even higgs mass matrix

$$\mathcal{M}_{S, \text{Tree}}^2 = \begin{pmatrix} M_Z^2 \cos^2 \beta + \mu_{\text{eff}} B_{\text{eff}} \tan \beta & (\lambda^2 v^2 - \frac{1}{2} M_Z^2) \sin 2\beta - \mu_{\text{eff}} B_{\text{eff}} & \lambda (2\mu_{\text{eff}} v_d - (B_{\text{eff}} + \kappa s) v_u) \\ & M_Z^2 \sin^2 \beta + \mu_{\text{eff}} B_{\text{eff}} \cot \beta & \lambda (2\mu_{\text{eff}} v_u - (B_{\text{eff}} + \kappa s) v_d) \\ & & \kappa s (A_\kappa + 4\kappa s) + \lambda A_\lambda \frac{v_u v_d}{s} \end{pmatrix} \quad (6.4.1)$$

の (3, 3) 成分との mixing を無視した近似になっており、それを考慮した場合のヒッグス質量は

$$m_{h, \text{NMSSM}}^2 \approx M_Z^2 \cos^2 2\beta + \lambda^2 v^2 \sin^2 2\beta - \frac{\lambda^2}{\kappa^2} v^2 \left(\lambda - \left(\kappa + \frac{A_\lambda}{2s} \right) \sin 2\beta \right)^2 + \Delta m_{h, \text{1loop}}^2 \quad (6.4.2)$$

となる [56]。これを見てわかるように (3, 3) 成分との mixing は tree level higgs mass を減少させる効果を持つ。higgs mass は式 (6.4.2) の第二項、第三項の競合になり、一般に λ を大きくするとヒッグス質量は非常に小さくなってしまう。この singlet との mixing を減らす方法は 2 つある。1 つは small $\lambda (\leq 0.1)$ を仮定することであり、もう 1 つが

$$\lambda - \left(\kappa + \frac{A_\lambda}{2s} \right) \sin(2\beta) = 0 \quad (6.4.3)$$

を満たすようにパラメータを調整することである*1。

*1 これはあくまでも式 (6.4.2) の negative な寄与を消すようにパラメータを選ぶことであり、必ずしも実際の tree level mass matrix を対角化した時の固有値と一致するとは限らない。しかし、 $\mu_{\text{eff}} B_{\text{eff}} \gg v_u^2, v_d^2$ かつ、 $4\kappa^2 s^2 \gg 2\lambda \mu_{\text{eff}} v - (B_{\text{eff}} + \kappa s) v \sin 2\beta$ の場合、この近似が非常に良い精度で成り立つ。

Tadpole conditions

NMSSM には3つの tadpole condition がある。

$$v_u \left(m_{H_u}^2 + \mu_{\text{eff}}^2 + \lambda^2 v_d^2 + \frac{g_1^2 + g_2^2}{4} (v_u^2 - v_d^2) \right) - v_d \mu_{\text{eff}} B_{\text{eff}} = 0 \quad (6.4.4)$$

$$v_d \left(m_{H_d}^2 + \mu_{\text{eff}}^2 + \lambda^2 v_u^2 + \frac{g_1^2 + g_2^2}{4} (v_d^2 - v_u^2) \right) - v_u \mu_{\text{eff}} B_{\text{eff}} = 0 \quad (6.4.5)$$

$$s \left(m_S^2 + \kappa A_\kappa s + 2\kappa^2 s^2 + \lambda^2 (v_u^2 + v_d^2) - 2\lambda \kappa v_u v_d \right) - \lambda v_u v_d A_\lambda = 0 \quad (6.4.6)$$

$$s \left(m_S^2 + \kappa A_\kappa s + 2\kappa^2 s^2 + \lambda^2 (v_u^2 + v_d^2) - 2\lambda \kappa v_u v_d \right) - \lambda v_u v_d A_\lambda = 0 \quad (6.4.7)$$

ここで $\mu_{\text{eff}} = \lambda s$, $B_{\text{eff}} = A_\lambda + \kappa s$ である。これを満たすようにパラメータを3つ選ばなければならない。

Positive CP-even and CP-odd Higgs mass

CP-odd のヒッグス質量行列の (3, 3) 成分は

$$\mathcal{M}_{P,33}^2 = 4\lambda \kappa v_u v_d + \lambda A_\lambda \frac{v_u v_d}{s} - 3\kappa s A_\kappa \quad (6.4.8)$$

のように与えられる。一般に第三項が dominant な寄与を与えるので、第3項が positive という条件*2から

$$\kappa s A_\kappa \leq 0 \quad (6.4.9)$$

が必要となる。

もう一つの条件として CP-even のヒッグス質量行列の (3, 3) 成分

$$\mathcal{M}_{S,33}^2 = \lambda A_\lambda \frac{v_u v_d}{s} + \kappa s (A_\kappa + 4\kappa s) \quad (6.4.10)$$

が positive である条件という条件*3

$$-4(\kappa s)^2 \leq \kappa s A_\kappa \quad (6.4.11)$$

があり、まとめると A_κ には

$$-4(\kappa s)^2 \leq \kappa s A_\kappa \leq 0 \quad (6.4.12)$$

という制限がつく。数値計算を行う上で、本研究では A_κ は susy scale での input として与えることとする。

Constraint from Stability of Scalar Potential for S

ヒッグスポテンシャルが安定でかつ minimum を持つ条件から、パラメータに理論的な制限がつく。

$s \gg v_u, v_d$ の時、ヒッグスポテンシャルは

$$V_{\text{Higgs}}(S) \sim m_S^2 S^2 + \frac{2}{3} \kappa A_\kappa S^3 + \kappa^2 S^4 \quad (6.4.13)$$

となり、これが minimum を持つ条件から

$$A_\kappa^2 > 9m_S^2 \quad (6.4.14)$$

が求まる。

*2 CP-odd higgs mass の固有値が positive であるという条件。

*3 CP-even higgs mass の固有値が positive であるという条件。

Constraint from Perturbativity of λ

tree level のヒッグス質量は singlet との mixing を考えない限り、一般に λ を大きくすればするほど大きくなる。ただし RGE の running で λ GUT スケールまでに Landau pole を持たないために、SUSY scale では $\lambda \sim 0.7$ が限界である [56]。

Condition of the lightest higgs boson as SM like higgs

本論文では、higgs mass matrix を対角化した際の一番軽い固有値 LHC で見つかったを higgs boson だと考える。LHC の結果より、ヒッグス粒子は SM like なヒッグスと consistent であることがわかっている [28]。そのため、lightest higgs が singlet like な higgs の場合には実験事実と矛盾するため、lightest higgs は (3,3) 成分である singlet が dominant ではなく、あくまで decoupling limit をとった時に SM like な higgs になるような MSSM like な higgs である必要がある。

6.5 Numerical Results

今回我々が得た結果をまとめる。MSSM like semi-constrained NMSSM では、Tadpole conditions で決めるパラメータとして最初の 2 本を MSSM の場合と同様に $\mu_{\text{eff}}, B_{\text{eff}}$ を決めるのに用い、残りの一本を m_S^2 を決めるのに用いる。つまり

$$\mu_{\text{eff}}, B_{\text{eff}}, m_S^2 \quad (6.5.1)$$

を採用する。 $\mu_{\text{eff}} = \lambda s, B_{\text{eff}} = \kappa s + A_\lambda$ のため、どのパラメータを input にするか自由があるがヒッグス質量は λ の大きさに非常に依存しているため、その増減を調べるには λ は input にするのが都合が良い。そのため、本研究では λ は SUSY scale での input とする。残りのパラメータの決め方は 2 種類あり、一つが

$$s, A_\lambda, m_S^2 \quad (6.5.2)$$

もう一つが

$$s, \kappa, m_S^2 \quad (6.5.3)$$

である。それぞれ CASE1, CASE2 として考察することにする。結局 MSSM-like semi-constrained NMSSM における独立なパラメータは CASE1 の場合

$$\tan \beta, m_0, M_{1/2}, A_0, \lambda, \kappa, A_\kappa \quad (6.5.4)$$

となり、CASE2 の場合は

$$\tan \beta, m_0, M_{1/2}, A_0, \lambda, A_\lambda, A_\kappa \quad (6.5.5)$$

となる。

CASE 1 (s, A_λ, m_S^2)

Tadpole condition で決めるパラメータは

$$s = \frac{\mu_{\text{eff}}}{\lambda}, A_\lambda = B_{\text{eff}} - \kappa s \quad (6.5.6)$$

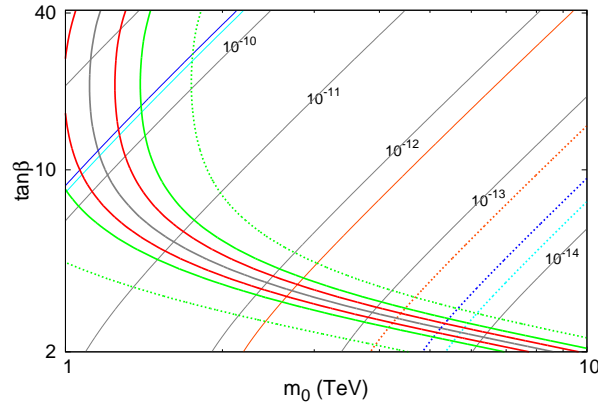


図 6.2 cMSSM の図。 $m_0 = M_{1/2}$ 。ねずみ色は 126(GeV) Higgs mass の等高線であり、赤は 125 – 127(GeV)、緑の実線は 124 – 128(GeV)、緑の点線は 120 – 130(GeV) をそれぞれ表す (上が 130GeV である)。等高線は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ を表し、オレンジ実線 (点線) は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の現在の実験からの制限 (将来の精度) を表している。薄い青色と濃い青色の実線 (点線) はそれぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow 3e)$, $\mu - e$ 転換の現在の実験からの制限 (将来の精度) を $\mu \rightarrow e\gamma$ に換算したものを表している。SUSY scale の input は $\lambda = 0.1$, $A_\kappa = -50(\text{GeV})$ であり、また $A_0 = -500(\text{GeV})$ としている。またマヨラナ質量は $M_\nu = 5.0 \times 10^{14}(\text{GeV})$ としている。

であり、式 (6.4.3) を仮定する場合 κ で調整することになる。その時の κ は

$$\kappa = \frac{\lambda}{\sin 2\beta} - \frac{A_\lambda}{2s} \quad (6.5.7)$$

となるが、large λ , large $\tan \beta$ で一般に κ が大きくなり GUT スケールまでに Landau pole を持つ^{*4}。そこで、CASE1 の場合には式 (6.4.3) を課さずに、higgs mass を減少させないために small λ (~ 0.1) を仮定し、singlet との mixing を小さくした場合を考える。

Result

結果は図 (6.3) のようになる。左右の図で κ の input を変えている。

input パラメータは左右の図で共通なものが $\lambda = 0.1$, $A_\kappa = -50(\text{GeV})$, $A_0 = -500(\text{GeV})$, $M_\nu = 5.0 \times 10^{14}(\text{GeV})$ である。グラフの概形は MSSM の場合と非常によく似ている。図 (6.3) の 2 つの図から κ が小さくなると higgs mass が小さくなっていることが読み取れる。この higgs mass の値の違いは主に κ の値の違いに起因するものであって、 A_λ などのほかのパラメータの違いは重要ではないことを数値的に確かめた。 κ を増やした場合に higgs mass が増加するのは、式 (6.4.2) からわかるように、 $\mathcal{M}_{S, \text{Tree}}^2$ の (3,3) 成分が κ の増加にともなって増加し、negative な寄与を与える singlet 成分との mixing が相対的に減少するためである。なお higgs mass の依存性に κ に関して、higgs mass は $\kappa \sim 0.03$ 程度で急激に減少する。これは higgs mass の κ 依存性はあくまで式 (6.4.2) の $(\lambda/\kappa)^2$ から来ており、本論文では $\lambda = 0.1$ としているために $\kappa \sim 0.03$ 程度

^{*4} $\lambda = 0.3$, $\tan \beta = 3$ の場合、 $\kappa \sim 0.5$ になる。 κ と λ は互いに RGE

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} \lambda = \lambda \left[2|\kappa|^2 + 4|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_U^\dagger Y_U) + 3\text{Tr}(Y_D^\dagger Y_D) + \text{Tr}(Y_E^\dagger Y_E) + \text{Tr}(Y_N^\dagger Y_N) - 3g_2^2 - \frac{3}{5}g_1^2 \right], \quad (6.5.8)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} \kappa = \kappa \left[6|\kappa|^2 + 6|\lambda|^2 \right]. \quad (6.5.9)$$

で関係づいているため、つまり式 (6.4.3) を仮定した場合 λ を大きくすると κ も大きくなり、結果 λ が GUT スケールまでに Landau pole を持つことになる。さらに small $\tan \beta$ の場合、top yukawa が大きくなり、これも λ の RGE に正の寄与を与えるため、Landau pole を持ちやすくなる

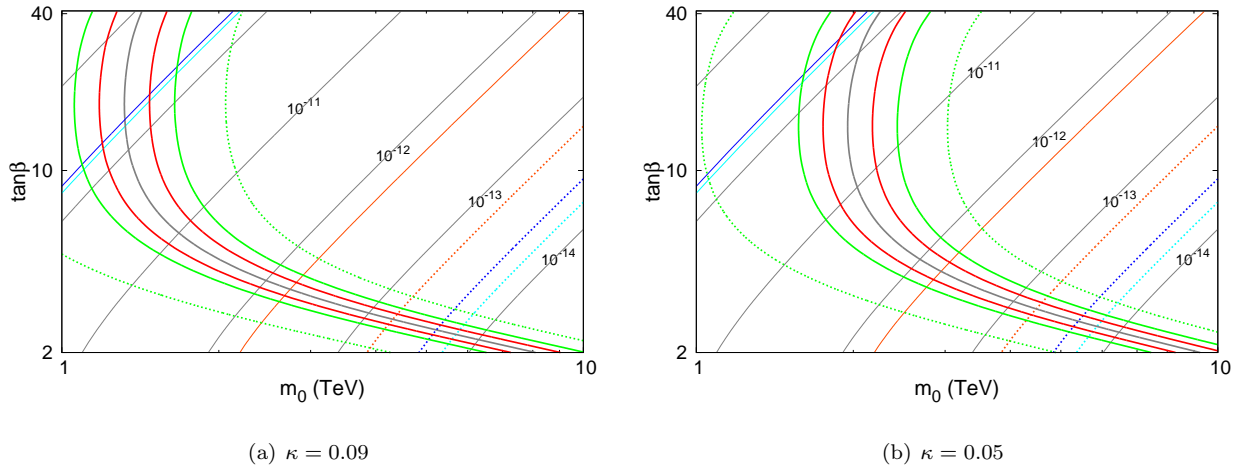


図 6.3 MSSM-like semi-constrained NMSSM(CASE1) の図。 $m_0 = M_{1/2}$ 。ねずみ色は 126(GeV) Higgs mass の等高線であり、赤は 125 – 127(GeV)、緑の実線は 124 – 128(GeV)、緑の点線は 120 – 130(GeV) をそれぞれ表す (上が 130GeV である)。 $A_0 = -500$ (GeV) としている。等高線は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ を表し、オレンジ実線 (点線) は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の現在の実験からの制限 (将来の精度) を表している。薄い青色と濃い青色の実線 (点線) はそれぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow 3e)$, $\mu - e$ 転換の現在の実験からの制限 (将来の精度) を $\mu \rightarrow e\gamma$ に換算したものを表している。またマヨラナ質量は $M_\nu = 5.0 \times 10^{14}$ (GeV) としている。

で higgs mass が急激に減少している。実際、 λ をより小さい値にした場合は κ もより小さい値まで取ることができる。

荷電レプトンフレーバーの破れに関しては、Higgs mass から favor されるパラメータ領域のうち、 m_0 が 10(TeV) 程度であつても、近い将来の実験で観測可能な $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の値を予言するパラメータ領域があることがわかった。

CASE 2 (s, κ, m_S^2)

CASE2 の場合、tadpole 条件で決まるパラメータ s, κ はそれぞれ

$$s = \frac{\mu_{\text{eff}}}{\lambda}, \quad \kappa = (B_{\text{eff}} - A_\lambda)/s \quad (6.5.10)$$

となる。 κ を tadpole condition で決めるので、式 (6.4.3) を満たすように A_λ が

$$A_\lambda = 2s \left(\frac{\lambda}{\sin(2\beta)} - \kappa \right) \quad (6.5.11)$$

となるが、式 (6.4.3) と tadpole 条件を組み合わせた場合に κ が

$$\kappa = \lambda \left(\frac{2}{\sin(2\beta)} - \frac{B_{\text{eff}}}{\mu_{\text{eff}}} \right) \quad (6.5.12)$$

となり、これは CASE1 の場合と同様に large λ もしくは large $\tan \beta$ で一般に κ が大きくなってしまい、摂動論として扱えなくなる。また $\tan \beta$ を大きくしても同様の問題が生じる。つまり CASE2 で式 (6.4.3) を課すには small λ , small $\tan \beta$ が必要となるが、これは higgs 質量の観点で見ると MSSM の場合とあまり変わらない結果となる*5。そこで本論文では CASE2 を考える場合についても式 (6.4.3) を課さないこととする。

*5 状況は CASE1 の場合と同様。

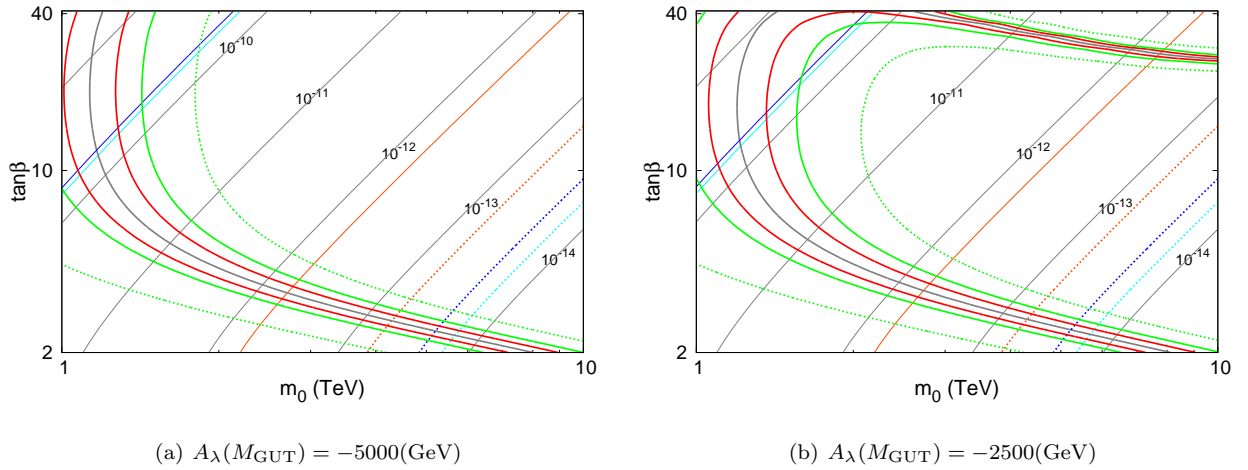


図 6.4 MSSM-like semi-constrained NMSSM(CASE2) の図。 $m_0 = M_{1/2}$ 。ねずみ色は 126(GeV) Higgs mass の等高線であり、赤は 125 – 127(GeV)、緑の実線は 124 – 128(GeV)、緑の点線は 120 – 130(GeV) をそれぞれ表す (上が 130GeV である)。SUSY scale の input は $\lambda = 0.1, A_\kappa = -50(\text{GeV})$ であり、また $A_0 = -500(\text{GeV})$ としている。等高線は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ を表し、オレンジ実線 (点線) は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の現在の実験からの制限 (将来の精度) を表している。薄い青色と濃い青色の実線 (点線) はそれぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow 3e)$, $\mu - e$ 転換の現在の実験からの制限 (将来の精度) を $\mu \rightarrow e\gamma$ に換算したものを表している。マヨラナ質量は $M_\nu = 5.0 \times 10^{14}(\text{GeV})$ としている。

Result

結果は図 (6.4) のようになる。左右の図は A_λ の input を変えている。左右の図で共通な input パラメータは $\lambda = 0.1, A_\kappa = -50(\text{GeV}), A_0 = -500(\text{GeV}), M_\nu = 5.0 \times 10^{14}(\text{GeV})$ である。図 (6.4) では $A_\lambda = -2500, -5000(\text{GeV})$ の場合を示している。 A_λ の絶対値が小さいほど large $\tan\beta$ でヒッグス質量が小さくなっているのが読み取れる。この違いが現れる原因が CASE1 の場合と同様に κ から来ており、 A_λ などのほかのパラメータの違いは重要ではないことを数値的に確かめた。次になぜ A_λ を変化させると κ が変わるのかを説明する。

2つの図を比べると、右上の部分以外ではほとんど変化がない。つまり A_λ を変化させた時の κ の変化が大きいのが図の右上部分ということであり、なぜその部分に違いが現れるかを説明する。そのためにまず $m_0 (= M_{1/2})$ を固定した場合の $\tan\beta$ 依存性について考える。CASE2 の場合でも tadpole 条件で決まるのは CASE1 の場合と同様に $\mu_{\text{eff}}, B_{\text{eff}}$ であり、それぞれ Tree level で

$$\mu_{\text{eff}}^2 = \frac{m_{H_d}^2 - m_{H_u}^2 \tan^2 \beta}{\tan^2 \beta - 1} - \frac{1}{2} M_Z^2 \quad (6.5.13)$$

$$B_{\text{eff}} = \frac{1}{2\mu_{\text{eff}}} (m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2 + 2\mu_{\text{eff}}^2 + v^2 \lambda^2) \sin 2\beta \quad (6.5.14)$$

と書ける。これらは一般に $\tan\beta$ が大きくなると小さくなる。まず $\mu_{\text{eff}} = \lambda s$ のため、 μ_{eff} が大きくなると s も増加する。 $\kappa = (B_{\text{eff}} - A_\lambda)/s$ の関係から、 κ の変化は μ_{eff} と B_{eff} の増減の兼ね合いで決まるが、一般に $\tan\beta$ の増加に伴う減少は B_{eff} の方が大きいために、 $\tan\beta$ の増加に伴って κ は減少する。そのため CASE1 で示したように κ の減少にともなって CP-even のヒッグス質量は小さくなる。一方、 $\tan\beta$ が大きくなると、式 (6.4.2) より一般に higgs mass は増加するので、この増加分と κ による減少分の兼ね合いで higgs mass の増減が決まることになる。 $m_0 (= M_{1/2})$ を固定した場合、 $\tan\beta \sim 7$ 程度までは higgs mass は増加するが、それ以降は κ の減少にともなって higgs mass が減少する。

次に $\tan\beta$ を固定した場合の $m_0(= M_{1/2})$ の変化にともなる higgs mass の変化を考える。SUSY scale での A_λ は RGE

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} A_\lambda = 4|\kappa|^2 A_\kappa + 8|\lambda|^2 A_\lambda + 6\text{Tr}(Y_U^\dagger T_U) + 6\text{Tr}(Y_D^\dagger T_D) + 2\text{Tr}(Y_E^\dagger T_E) + 2\text{Tr}(Y_N^\dagger T_N) + 6g_2^2 M_2 + \frac{6}{5}g_1^2 M_1 \quad (6.5.15)$$

を解くことによって得られるが、 $A_\lambda(M_{\text{SUSY}})$ は $m_0(= M_{1/2})$ の増加にともなって大きくなる*6。そのため $\tan\beta$ を固定した場合に、 $m_0(= M_{1/2})$ が大きいほうが κ がより小さくなり、ヒッグス質量が減少する。

まとめると A_λ の input value を変化した時に higgs mass が変化する原因は大きく2つある。1つ目は $\tan\beta$ が増加するに従って κ が減少し、結果ヒッグス質量が減少すること。2つ目は $m_0(= M_{1/2})$ 増加にともなって、SUSY scale での A_λ が RGE の効果で大きくなり、同じ $\tan\beta$ でも、 $m_0(= M_{1/2})$ が増加するに従って κ が減少することである。つまり図の右上に行くほど κ の値は減少する。 $A_\lambda = -2500$ の時に large $\tan\beta$ 部分にもう一度 126GeV ヒッグスを再現するパラメータ領域が現れているのは、その場合の κ が $\lambda = 0.1$ の場合に higgs mass が急激に減少する $\kappa \sim 0.03$ 程度になることで、右上で急激に減少するために、 $\tan\beta \sim 7$ 以降で higgs mass の減少が大きく、再び 126GeV higgs mass のパラメータ領域が現れるためである*7。

CASE2 の場合でも、荷電レプトンフレーバーの破れに関して、Higgs mass から favor されるパラメータ領域のうち、 m_0 が 10(TeV) 程度であっても、近い将来の実験で観測可能な $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の値を预言するパラメータ領域があることがわかった。

6.6 Summary

本論文では、NMSSM+ ν_R 模型における cLFV をヒッグス質量と結びつけて、ヒッグスボソン質量が最近の実験結果を満たすようなパラメータ領域で、 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ がどのような値をとるか調べた。GUT scale における boundary condition として MSSM-like semi-constrained NMSSM を仮定し、tadpole 条件で決めるパラメータとして (s, κ, m_S^2) 、 (s, A_λ, m_S^2) という2つの場合をそれぞれ CASE1, CASE2 として考えた。NMSSM は MSSM に比べて higgs mass を tree level で上げることができるという利点を持つが、それはあくまでも singlet との mixing 消すようにパラメータを調整した場合であって一般には成り立たず、むしろ higgs mass は減少する。MSSM-like な場合、higgs mass を大きくするような large λ かつ singlet との mixing を消すようなパラメータの調整を同時に行うことは難しい。そこで本論文では、small $\lambda(\sim 0.1)$ を仮定することで singlet とも mixing を小さくした場合を考えた。

CASE1 に関しては、MSSM の場合と近い結果が得られた。ただ、SUSY scale の input である κ の大きさによって higgs mass が変化するために好まれるパラメータ領域が変化することを示した。一方 CASE2 に関しては、higgs mass に影響を与える κ が input ではなく tadpole 条件から決まるため、CASE1 の場合とはかなり異なるパラメータ領域があることを示した。cLFV に関して、我々は CASE1, CASE2 どちらの場合にも、NMSSM+ ν_R 模型において SUSY mass scale が 10TeV 程度であっても、近い将来に観測可能ほど大きな $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の値が预言される可能性があることを示した。

*6 $m_0(= M_{1/2})$ を大きくすると gaugino mass が大きくなるために式 (6.5.15) の右辺が正になり、繰り込みスケールが小さくなるに連れて A_λ が小さくなるように思えるが、実際は A_t, A_b が式 (6.5.15) の右辺にマイナスの寄与を与えるために、その兼ね合いで A_λ のスケール依存性が決まる。

*7 一般に A_λ が小さい場合、 κ が小さくなって higgs mass matrix の (3,3) 成分が減少して singlet like な higgs になってしまうことがあるが、今回考えているパラメータ領域ではすべて MSSM like な higgs である。

付録 6.A Renormalization Group Equations

この節では、1 ループの NMSSM + right-handed neutrino の Renormalization Group Equation を列挙する。なお、 $t = \ln Q$ かつ $g'^2 = \frac{5}{3}g_1^2$ とする。

6.A.1 RGE's for gauge couplings

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} g_1 = \frac{33}{5} g_1^3 \quad (6.A.1)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} g_2 = g_2^3 \quad (6.A.2)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} g_3 = -3g_3^3 \quad (6.A.3)$$

$$(6.A.4)$$

6.A.2 RGE's for Yukawa couplings

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} \lambda = \lambda \left[2|\kappa|^2 + 4|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_U^\dagger Y_U) + 3\text{Tr}(Y_D^\dagger Y_D) + \text{Tr}(Y_E^\dagger Y_E) + \text{Tr}(Y_N^\dagger Y_N) - 3g_2^2 - \frac{3}{5}g_1^2 \right], \quad (6.A.5)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} \kappa = \kappa \left[6|\kappa|^2 + 6|\lambda|^2 \right]. \quad (6.A.6)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} (Y_U)_{ij} = \left[|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_U^\dagger Y_U) + \text{Tr}(Y_N^\dagger Y_N) - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{13}{15}g_1^2 \right] (Y_U)_{ij} + 3(Y_U Y_U^\dagger Y_U)_{ij} + (Y_D Y_D^\dagger Y_U)_{ij}, \quad (6.A.7)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} (Y_D)_{ij} = \left[|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_D^\dagger Y_D) + \text{Tr}(Y_E^\dagger Y_E) - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{7}{15}g_1^2 \right] (Y_D)_{ij} + (Y_U Y_U^\dagger Y_D)_{ij} + 3(Y_D Y_D^\dagger Y_D)_{ij}, \quad (6.A.8)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} (Y_E)_{ij} = \left[|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_D^\dagger Y_D) + \text{Tr}(Y_E^\dagger Y_E) - 3g_2^2 - \frac{9}{5}g_1^2 \right] (Y_E)_{ij} + 3(Y_E Y_E^\dagger Y_E)_{ij} + (Y_N^\top Y_N^* Y_E)_{ij}, \quad (6.A.9)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} (Y_N)_{ij} = \left[|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_U^\dagger Y_U) + \text{Tr}(Y_N^\dagger Y_N) - 3g_2^2 - \frac{3}{5}g_1^2 \right] (Y_N)_{ij} + 3(Y_N Y_N^\dagger Y_N)_{ij} + (Y_N Y_E^* Y_E^\top)_{ij}. \quad (6.A.10)$$

6.A.3 RGE's for gaugino masses

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} M_1 = \frac{66}{5} g_1^2 M_1 \quad (6.A.11)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} M_2 = 2g_2^2 M_2 \quad (6.A.12)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} M_3 = -6g_3^2 M_3 \quad (6.A.13)$$

6.A.4 RGE's for trilinear couplings (A parameters)

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} A_\lambda = 4|\kappa|^2 A_\kappa + 8|\lambda|^2 A_\lambda + 6\text{Tr}(Y_U^\dagger T_U) + 6\text{Tr}(Y_D^\dagger T_D) + 2\text{Tr}(Y_E^\dagger T_E) + 2\text{Tr}(Y_N^\dagger T_N) + 6g_2^2 M_2 + \frac{6}{5}g_1^2 M_1, \quad (6.A.14)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} A_\kappa = 12 \left(|\kappa|^2 A_\kappa + |\lambda|^2 A_\lambda \right). \quad (6.A.15)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} (T_U)_{ij} &= 4(T_U Y_U^\dagger Y_U)_{ij} + 5(Y_U Y_U^\dagger T_U)_{ij} + (Y_D Y_D^\dagger T_U)_{ij} + 2(T_D Y_D^\dagger Y_U)_{ij} \\ &\quad + (T_U)_{ij} \left(|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_U^\dagger Y_U) + \text{Tr}(Y_N^\dagger Y_N) - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{13}{15}g_1^2 \right) \\ &\quad + 2(Y_U)_{ij} \left(|\lambda|^2 A_\lambda + 3\text{Tr}(Y_U^\dagger T_U) + \text{Tr}(Y_N^\dagger T_N) + \frac{16}{3}g_3^2 M_3 + 3g_2^2 M_2 + \frac{13}{15}g_1^2 M_1 \right), \end{aligned} \quad (6.A.16)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} (T_D)_{ij} &= 4(T_D Y_D^\dagger Y_D)_{ij} + 5(Y_D Y_D^\dagger T_D)_{ij} + (Y_U Y_U^\dagger T_D)_{ij} + 2(T_U Y_U^\dagger Y_D)_{ij} \\ &\quad + (T_D)_{ij} \left(|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_D^\dagger Y_D) + \text{Tr}(Y_E^\dagger Y_E) - \frac{16}{3}g_3^2 - 3g_2^2 - \frac{7}{15}g_1^2 \right) \\ &\quad + 2(Y_D)_{ij} \left(|\lambda|^2 A_\lambda + 3\text{Tr}(Y_D^\dagger T_D) + \text{Tr}(Y_E^\dagger T_E) + \frac{16}{3}g_3^2 M_3 + 3g_2^2 M_2 + \frac{7}{15}g_1^2 M_1 \right), \end{aligned} \quad (6.A.17)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} (T_E)_{ij} &= 4(T_E Y_E^\dagger Y_E)_{ij} + 5(Y_E Y_E^\dagger T_E)_{ij} + (Y_N^\top Y_N^* T_E)_{ij} + 2(T_N^\top Y_N^* Y_E)_{ij} \\ &\quad + (T_E)_{ij} \left(|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_D^\dagger Y_D) + \text{Tr}(Y_E^\dagger Y_E) - 3g_2^2 - \frac{9}{5}g_1^2 \right) \\ &\quad + 2(Y_E)_{ij} \left(|\lambda|^2 A_\lambda + 3\text{Tr}(Y_D^\dagger T_D) + \text{Tr}(Y_E^\dagger T_E) + 3g_2^2 M_2 + \frac{9}{5}g_1^2 M_1 \right), \end{aligned} \quad (6.A.18)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} (T_N)_{ij} &= 4(Y_N Y_N^\dagger T_N)_{ij} + 5(T_N Y_N^\dagger Y_N)_{ij} + (T_N Y_E^* Y_E^\top)_{ij} + 2(Y_N Y_E^* T_E^\top)_{ij} \\ &\quad + (T_N)_{ij} \left(|\lambda|^2 + 3\text{Tr}(Y_U^\dagger Y_U) + \text{Tr}(Y_N^\dagger Y_N) - 3g_2^2 - \frac{3}{5}g_1^2 \right) \\ &\quad + 2(Y_N)_{ij} \left(|\lambda|^2 A_\lambda + 3\text{Tr}(Y_U^\dagger T_U) + \text{Tr}(Y_N^\dagger T_N) + 3g_2^2 M_2 + \frac{3}{5}g_1^2 M_1 \right). \end{aligned} \quad (6.A.19)$$

6.A.5 Soft breaking mass

At one loop, the RGEs for $m_Q^2, m_U^2, m_D^2, m_E^2, m_{H_1}^2$ and m_S^2 are the same as those in the NMSSM.

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} (m_L)_{ij}^2 &= (Y_E^* Y_E^\top m_L^2)_{ij} + (m_L^2 Y_E^* Y_E^\top)_{ij} + (Y_N^\dagger Y_N m_L^2)_{ij} + (m_L^2 Y_N^\dagger Y_N)_{ij} \\ &\quad + 2(Y_E^* (m_E^2)^\top Y_E^\top)_{ij} + 2(Y_E^* Y_E^\top)_{ij} m_{H_1}^2 + 2(Y_N^\dagger (m_N^2)^\top Y_N)_{ij} + 2(Y_N^\dagger Y_N)_{ij} m_{H_2}^2 \\ &\quad + 2(T_E^* T_E^\top)_{ij} + 2(T_N^\dagger T_N)_{ij} - 6g_2^2 |M_2|^2 - \frac{6}{5}g_1^2 |M_1|^2 \\ &\quad - \frac{3}{5}g_1^2 \left\{ \text{Tr}(m_Q^2 - 2m_U^2 + m_D^2 - m_L^2 + m_E^2) - m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.A.20)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} (m_N^2)_{ij} = 2(Y_N^* Y_N^\top m_N^2)_{ij} + 2(m_N^2 Y_N^* Y_N^\top)_{ij} + 4(Y_N^* (m_L^2)^\top Y_N^\top)_{ij} + 4(Y_N^* Y_N^\top)_{ij} m_{H_2}^2 + 4(T_N^* T_N^\top)_{ij} . \quad (6.A.21)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{H_d}^2 &= 2|\lambda|^2 \left(m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2 + m_S^2 + |A_\lambda|^2 \right) + m_{H_1}^2 \left(6\text{Tr}(Y_D^\dagger Y_D) + 2\text{Tr}(Y_E^\dagger Y_E) \right) \\ &\quad + 2\text{Tr}(Y_E^\dagger m_L^2 Y_E) + 2\text{Tr}(Y_E m_E^2 Y_E^\dagger) + 6\text{Tr}(Y_D^\dagger m_Q^2 Y_D) + 6\text{Tr}(Y_D m_D^2 Y_D^\dagger) \\ &\quad - 6g_2^2 |M_2|^2 - \frac{6}{5} g_1^2 |M_1|^2 + 2\text{Tr}(T_E^\dagger T_E) + 6\text{Tr}(T_D^\dagger T_D) \\ &\quad - \frac{3}{5} g_1^2 \left\{ \text{Tr}(m_Q^2 - 2m_U^2 + m_D^2 - m_L^2 + m_E^2) - m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2 \right\} , \end{aligned} \quad (6.A.22)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{H_u}^2 &= 2|\lambda|^2 \left(m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2 + m_S^2 + |A_\lambda|^2 \right) + 6m_{H_2}^2 \text{Tr}(Y_U^\dagger Y_U) + 2m_{H_2}^2 \text{Tr}(Y_N^\dagger Y_N) \\ &\quad + 6\text{Tr}(Y_U^\dagger m_Q^2 Y_U) + 6\text{Tr}(Y_U m_U^2 Y_U^\dagger) + 2\text{Tr}(Y_N^\top m_N^2 Y_N^*) + 2\text{Tr}(Y_N m_L^2 Y_N^\dagger) \\ &\quad + 6\text{Tr}(T_U^\dagger T_U) + 2\text{Tr}(T_N^\dagger T_N) - 6g_2^2 |M_2|^2 - \frac{6}{5} g_1^2 |M_1|^2 \\ &\quad + \frac{3}{5} g_1^2 \left\{ \text{Tr}(m_Q^2 - 2m_U^2 + m_D^2 - m_L^2 + m_E^2) - m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2 \right\} , \end{aligned} \quad (6.A.23)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_S^2 = 4|\lambda|^2 \left(m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2 + m_S^2 + |A_\lambda|^2 \right) + 4|\kappa|^2 \left(3m_S^2 + |A_\kappa|^2 \right) . \quad (6.A.24)$$

付録 6.B CP-even higgs mass

NMSSM における higgs mass の mass matrix は次のように描くことができる [?, 56]

$$\mathcal{M}_{S, \text{Tree}}^2 = \begin{pmatrix} M_Z^2 \cos^2 \beta + \mu_{\text{eff}} B_{\text{eff}} \tan \beta & (\lambda^2 v^2 - \frac{1}{2} M_Z^2) \sin 2\beta - \mu_{\text{eff}} B_{\text{eff}} & \lambda (2\mu_{\text{eff}} v_d - (B_{\text{eff}} + \kappa s) v_u) \\ & M_Z^2 \sin^2 \beta + \mu_{\text{eff}} B_{\text{eff}} \cot \beta & \lambda (2\mu_{\text{eff}} v_u - (B_{\text{eff}} + \kappa s) v_d) \\ & & \kappa s (A_\kappa + 4\kappa s) + \lambda A_\lambda \frac{v_u v_d}{s} \end{pmatrix} \quad (6.B.1)$$

1 ループの補正は次のように書かれる。

$$X_t = A_t - \mu_{\text{eff}} \cot \beta \quad (6.B.2)$$

$$\sin 2\theta_t = \frac{2m_t X_t}{m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2} \quad (6.B.3)$$

として

$$f_t = \frac{1}{m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2} \left(m_{\tilde{t}_2}^2 \ln \left(\frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{M_{\text{SUSY}}^2} \right) - m_{\tilde{t}_1}^2 \ln \left(\frac{m_{\tilde{t}_1}^2}{M_{\text{SUSY}}^2} \right) \right) - 1 \quad (6.B.4)$$

$$g_t = \sin^2 2\theta_t \left(\frac{m_{\tilde{t}_2}^2 + m_{\tilde{t}_1}^2}{m_{\tilde{t}_2}^2 - m_{\tilde{t}_1}^2} \ln \left(\frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2} \right) - 2 \right) \quad (6.B.5)$$

$$e_t = m_t \sin 2\theta_t \ln \left(\frac{m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2} \right) \quad (6.B.6)$$

ボトム の補正も同様に

$$X_b = A_b - \mu_{\text{eff}} \tan \beta \quad (6.B.7)$$

$$\sin 2\theta_b = \frac{2m_b X_b}{m_{\tilde{b}_2}^2 - m_{\tilde{b}_1}^2} \quad (6.B.8)$$

として

$$f_b = \frac{1}{m_{\tilde{b}_2}^2 - m_{\tilde{b}_1}^2} \left(m_{\tilde{b}_2}^2 \ln \left(\frac{m_{\tilde{b}_2}^2}{M_{\text{SUSY}}^2} \right) - m_{\tilde{b}_1}^2 \ln \left(\frac{m_{\tilde{b}_1}^2}{M_{\text{SUSY}}^2} \right) \right) - 1 \quad (6.B.9)$$

$$g_b = \sin^2 2\theta_t \left(\frac{m_{\tilde{b}_2}^2 + m_{\tilde{b}_1}^2}{m_{\tilde{b}_2}^2 - m_{\tilde{b}_1}^2} \ln \left(\frac{m_{\tilde{b}_2}^2}{m_{\tilde{b}_1}^2} \right) - 2 \right) \quad (6.B.10)$$

$$e_b = m_b \sin 2\theta_b \ln \left(\frac{m_{\tilde{b}_2}^2}{m_{\tilde{b}_1}^2} \right) \quad (6.B.11)$$

として、

$$\Delta \mathcal{M}_{S,11}^2 = \frac{3h_b^2}{32\pi^2} \left(-A_b^2 g_b + 4A_b e_b + 4m_b^2 \ln \left(\frac{m_{\tilde{b}_1}^2 m_{\tilde{b}_2}^2}{m_b^4} \right) \right) - \mu_{\text{eff}}^2 \frac{3h_t^2}{32\pi^2} g_t \quad (6.B.12)$$

$$\Delta \mathcal{M}_{S,22}^2 = \frac{3h_t^2}{32\pi^2} \left(-A_t^2 g_t + 4A_t e_t + 4m_t^2 \ln \left(\frac{m_{\tilde{t}_1}^2 m_{\tilde{t}_2}^2}{m_t^4} \right) \right) - \mu_{\text{eff}}^2 \frac{3h_b^2}{32\pi^2} g_b \quad (6.B.13)$$

$$\Delta \mathcal{M}_{S,33}^2 = -\frac{3h_t^2}{32\pi^2} \lambda^2 v_d^2 g_t - \frac{3h_b^2}{32\pi^2} \lambda^2 v_u^2 g_b \quad (6.B.14)$$

$$\Delta \mathcal{M}_{S,12}^2 = \mu_{\text{eff}} \left(\frac{3h_t^2}{32\pi^2} (A_t g_t - 2e_t) + \frac{3h_b^2}{32\pi^2} (A_b g_b - 2e_b) \right) \quad (6.B.15)$$

$$\Delta \mathcal{M}_{S,13}^2 = \frac{3h_b^2}{32\pi^2} \lambda v_u (A_b g_b - 2e_b) + \mu_{\text{eff}} \frac{3h_t^2}{32\pi^2} \lambda v_d (4f_t - g_t) \quad (6.B.16)$$

$$\Delta \mathcal{M}_{S,23}^2 = \frac{3h_t^2}{32\pi^2} \lambda v_d (A_t g_t - 2e_t) + \mu_{\text{eff}} \frac{3h_b^2}{32\pi^2} \lambda v_u (4f_b - g_b) \quad (6.B.17)$$

また、 A_λ に対する効果

$$A_\lambda \rightarrow A'_\lambda = A_\lambda + \frac{3h_t^2}{16\pi^2} A_t f_t + \frac{3h_b^2}{16\pi^2} A_b f_b \quad (6.B.18)$$

がある。これがヒッグス質量に与える 1 ループ補正は

$$\Delta_\lambda^2 = \mu_{\text{eff}} \left(\frac{3h_t^2}{16\pi^2} A_t f_t + \frac{3h_b^2}{16\pi^2} A_b f_b \right) \begin{pmatrix} \tan \beta & 1 & \frac{v \sin \beta}{s} \\ 1 & \cot \beta & \frac{v \cos \beta}{s} \\ \frac{v \sin \beta}{s} & \frac{v \cos \beta}{s} & \frac{v^2 \sin 2\beta}{2s} \end{pmatrix} \quad (6.B.19)$$

を受ける。結局ヒッグス質量は

$$\mathcal{M}_h^2 = \mathcal{M}_{S,\text{Tree}}^2 + \Delta \mathcal{M}_S^2 + \Delta_\lambda^2 \quad (6.B.20)$$

と表せる。

第7章

Supersymmetric Inverse Seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れ

本研究では、supersymmetric inverse seesaw 模型において、荷電レプトンフレーバーの破れ (cLFV) である $\mu \rightarrow e\gamma$ の分岐比の大きさを調べた。Supersymmetric seesaw 模型において最もよく研究されている ν MSSM では、 $l_i \rightarrow l_j\gamma$ 崩壊の源は slepton の質量行列の非対角成分であるが、本研究で考える supersymmetric inverse seesaw 模型では、その他に重い右巻きニュートリノが媒介する図からの寄与が加わる。Inverse seesaw に関する cLFV の研究は SUSY, Non-SUSY とともにすでに行われているが、effective な Majorana 質量行列の構造が与える影響に関しては詳しく調べられていない。本論文ではこの点に着目して、effective な Majorana 質量行列の非対角成分が cLFV に与える影響を調べ、その効果が ν MSSM の場合とは異なることを示した。さらにニュートリノ湯川が対角行列であっても、Non-SUSY の寄与が effective Majorana 質量行列の非対角成分から得られることを明らかにした。

7.1 Introduction

ニュートリノ振動実験によって [28]、ニュートリノには質量があること、そしてレプトンフレーバーが保存しないことが明らかになった。標準模型にニュートリノ質量を入れて拡張した場合、荷電レプトンフレーバーの破れ (charged Lepton Flavor Violation : 以下 cLFV) がループレベルで生じるが、その分岐比の大きさはニュートリノの質量が非常に小さいために抑制される。一方、様々な拡張標準模型 (BSM) では、現在の実験で観測しうる大きさの cLFV 過程の分岐比を予言している。そのため、cLFV 過程を探索することは、BSM を理解する上で非常に重要なものとなっている。

ニュートリノ質量を説明するために標準模型に右巻きニュートリノを加えて拡張した場合、通常の Dirac 質量項だけでなく、Majorana 質量項を組むことが出来る。この Majorana 質量は電弱対称性のスケールとは関係がないため、そのエネルギースケールは理論から何ら制限を受けない。つまりゼロから Planck スケールまで好きな値を取ることが出来る。非常に小さなニュートリノ質量を自然に説明する枠組みとして type-I seesaw 機構があるが [68–70]、この機構では Majorana 質量が GUT スケール付近の非常に大きな値であることを仮定している。ニュートリノ質量 (m_ν) は Majorana 質量 (M_R) と Dirac 質量 (m_D) を用いて

$$m_\nu \sim \frac{m_D^2}{M_R} \quad (7.1.1)$$

となる。確かに type-I seesaw 機構ではニュートリノの質量が非常に小さいことを自然に説明することがで

きるが、この場合右巻きニュートリノの質量が非常に重いために、LHCなどで右巻きニュートリノを直接生成することが非常に困難となっている。その一方で、Majorana 質量が TeV スケールの大きさでも小さなニュートリノ質量を説明することが出来る機構が知られている。これが inverse seesaw と呼ばれる機構である [71–73]。この機構ではニュートリノ質量が小さいことはレプトン数を破るパラメータ μ_X が小さいことに起因する。ニュートリノ質量は式 (7.2.1) のパラメータを用いて

$$m_\nu \sim \left(\frac{m_D}{M_R} \right)^2 \mu_X \quad (7.1.2)$$

で与えられるが、例えば M_R が $\mathcal{O}(1)\text{TeV}$ 程度でも μ_X が $\mathcal{O}(10^{-6})\text{GeV}$ 程度の小さい値ならば、ニュートリノ湯川が $\mathcal{O}(1)$ でも小さなニュートリノ質量を説明することが出来る。さらにこの inverse seesaw 機構の特徴としては cLFV 過程や CP violation 過程が、ニュートリノ質量によって抑制されないことがある。言い換えるとこれはニュートリノ質量がこの LFV 過程において重要な役割をせず、新しい gauge singlet である重い右巻きニュートリノが cLFV を引き起こす媒介粒子となる [67, 74–87]。新粒子の質量は、ほとんどパラメータ M_R 程度の大きさになるため、通常の type-I seesaw の質量と比べて非常に小さいため、加速器での生成が可能となる。

本論文では cLFV として $l_i \rightarrow l_j \gamma$ の分岐比を supersymmetric inverse seesaw 模型で考える。Supersymmetric な Seesaw 機構の cLFV の中で最も調べられているものが νMSSM である [110]。この模型では、GUT scale で mSUGRA の boundary condition を課したとしても、ニュートリノ湯川が RGE を通じてスレプトンの質量行列の非対角成分を生成し、それが $l_i \rightarrow l_j \gamma$ のソースとなる。一方本研究で考える supersymmetric inverse seesaw 模型では、通常の SUSY contributions の他に gauge singlet な重いニュートリノが媒介する diagram が追加される。SUSY scale が重い場合、その gauge singlet な寄与が相対的に大きくなるため、たとえば M_{SUSY} が大きくても実験にかかりうる分岐比が得られる [67]。Inverse seesaw 模型における cLFV 過程の研究は SUSY を含む、含まないに関わらず行われているが [67, 74–87]、右巻きニュートリノの effective な Majorana 質量の構造に注目している論文はない。本論文では、特に右巻きニュートリノの Majorana 質量行列の構造が cLFV に与える影響を調べることにする。

この論文の構成は次のとおりである。Sec.2 で supersymmetric な場合の inverse seesaw 機構の導入を行う。Sec.3 ではこの模型における $l_i \rightarrow l_j \gamma$ の仕組みを説明する。Sec.4 では数値計算するにあたってのパラメータの設定を行う。Sec.5, Sec.6 ではそれぞれ数値計算の結果をまとめているが、input パラメータの取り方の違いで2つに分けて考えている。inverse seesaw 機構におけるニュートリノセクターには多くのパラメータがあるが、ニュートリノ振動実験によりすべてのパラメータを自由に選ぶことが出来ない。Sec.5 では effective な Majorana 質量行列 X をインプットとした場合を考え、Sec.6 ではニュートリノ湯川をインプットとした場合を考えている。特に $\mu \rightarrow e\gamma$ に対する SUSY 寄与は、ニュートリノ湯川の構造に強く依存しており、もしニュートリノ湯川が対角行列だった場合、その寄与は完全に消えてしまう。しかし、ニュートリノ湯川が対角行列であっても、Non-SUSY からの寄与が消えないことを示すために、ここでは2つの場合を分けて結果としてまとめている。Sec.7 でまとめを行う。

7.2 Supersymmetric Inverse Seesaw 模型

Supersymmetric inverse seesaw 模型は、MSSM に2種類の gauge singlet な右巻きニュートリノ \hat{N}_i^c, \hat{S}_i を加えた模型である。 i は世代の足であり 1 から 3 を取る。また \hat{N}_i^c と \hat{S}_i はそれぞれレプトン数 -1 と 1 を持つ。この新しく MSSM に追加された gauge singlet な右巻きニュートリノを用いて、inverse seesaw の

Superpotential は次のように与えられる [78]。

$$W_{\text{Inverse-seesaw}} = W_{\text{MSSM}} + (Y_\nu)_{ij} \hat{N}_i^c \hat{L}_j \cdot \hat{H}_u + M_{Rij} \hat{N}_i^c \hat{S}_j + \frac{1}{2} \mu_{Xij} \hat{S}_i \hat{S}_j \quad (7.2.1)$$

W_{MSSM} は MSSM の Superpotential であり、 Y_ν はニュートリノ湯川、 \hat{L} はレプトンの $SU(2)$ doublet の superfield、 \hat{H}_u, \hat{H}_d は Higgs superfield である。 M_R, μ_X はそれぞれ 3×3 行列である。また、 \cdot は $SU(2)$ singlet を作る操作を表す。対応する Soft breaking term は

$$-\mathcal{L}^{\text{soft}} = -\mathcal{L}_{\text{MSSM}}^{\text{soft}} + \tilde{\nu}_i^c m_{\tilde{\nu}_{ij}^c}^2 \tilde{\nu}_j^{c*} + \tilde{S}_i^* m_{\tilde{S}_{ij}}^2 \tilde{S}_j + \left(T_\nu^{ij} \tilde{\nu}_i^c \tilde{L}_j \cdot H_u + B_{M_R}^{ij} \tilde{\nu}_i^c \tilde{S}_j + \frac{1}{2} B_{\mu_X}^{ij} \tilde{S}_i \tilde{S}_j + \tilde{S}_i^c m_{X_{\nu_{ij}^c}}^2 \tilde{\nu}_j^c + \text{h.c.} \right) \quad (7.2.2)$$

となる。Inverse seesaw 機構におけるニュートリノ質量行列は (ν_L, ν_R^c, S) の基底で

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D^T & 0 \\ m_D & 0 & M_R \\ 0 & M_R^T & \mu_X \end{pmatrix} \quad (7.2.3)$$

となる。ここで m_D は 3×3 のダイラック質量行列 $m_D = \frac{1}{\sqrt{2}} v_u Y_N$ を表す。この 9×9 のニュートリノ質量行列 M_ν はユニタリ行列 U を用いて

$$M_\nu^{\text{diag}} = U^T M_\nu U \quad (7.2.4)$$

と対角化することが出来る。 $\mu_X \ll m_D \ll M_R$ の場合、effective な軽いニュートリノ質量行列は

$$M_{\text{light}} = m_{\nu l} \simeq m_D^T (M_R^T)^{-1} \mu_X M_R^{-1} m_D \equiv F \mu_X F^T \quad (7.2.5)$$

$$F = m_D^T (M_R^T)^{-1} \quad (7.2.6)$$

と書ける。この軽いニュートリノ質量行列は MNS 行列を使って対角化することが出来る。

$$m_{\nu l}^{\text{diag}} = U_{\text{MNS}}^T m_{\nu l} U_{\text{MNS}} \quad (7.2.7)$$

さらに便宜上 effective な Majorana 質量行列 X を

$$X \equiv M_R \mu_X^{-1} M_R^T \quad (7.2.8)$$

と定義すると、この X は、適切に選んだユニタリ行列 V を用いて対角化できる。 \hat{X} を X を対角化した行列だとすると、 $\hat{X} = V X V^T$ となる。 $D_{\sqrt{\hat{X}}} = \text{diag}(\sqrt{\hat{X}_i})$ のとき、式 (7.2.5) と式 (7.2.7) を用いてニュートリノ湯川は

$$Y_\nu = \frac{\sqrt{2}}{v_u} V^\dagger D_{\sqrt{\hat{X}}} R D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^\dagger \quad (7.2.9)$$

となる [88]。ここで R は任意の複素直交行列であり、

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23}^R & \sin \theta_{23}^R \\ 0 & -\sin \theta_{23}^R & \cos \theta_{23}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13}^R & 0 & \sin \theta_{13}^R \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13}^R & 0 & \cos \theta_{13}^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12}^R & \sin \theta_{12}^R & 0 \\ -\sin \theta_{12}^R & \cos \theta_{12}^R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.2.10)$$

とパラメトライズすることができる。 $\theta_{12}^R, \theta_{23}^R, \theta_{13}^R$ は一般にはすべて複素数であるが、本研究では R は実対称行列とし、 $\theta_{12}^R, \theta_{23}^R, \theta_{13}^R$ はすべて実数であるとする。

本研究では、右巻きニュートリノの質量が数 TeV 程度であると仮定しているため、軽いニュートリノとの混合が無視できず、ニュートリノのフレーバーの固有状態と質量固有状態との変換行列が MNS 行列からズレることが知られている [89–91, 93–96]。レプトンの荷電カレントは

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{l}_b K_{b\alpha} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} + \text{h.c.} \quad (7.2.11)$$

$$K_{b\alpha} = \sum_{c=1}^3 \Omega_{cb}^* U_{c\alpha} \quad (7.2.12)$$

とかける。 Ω_{cb} は荷電レプトンを対角化する行列であり、通常 $\mathbf{1}$ とすることが出来る。なお、本論文では添字としてギリシャ文字は $1, 2, \dots, 9$ 、ローマ字は $1, 2, 3$ を表すものとする。 K は 3×9 行列であり、

$$K = (K_{L(3 \times 3)}, K_{H(3 \times 6)}) \quad (7.2.13)$$

と分解することが出来る。式 (7.2.4) のユニタリ行列 U を

$$U = \begin{pmatrix} U_{(3 \times 3)} & U_{(3 \times 6)} \\ U_{(6 \times 3)} & U_{(6 \times 6)} \end{pmatrix} \quad (7.2.14)$$

と分解した時、

$$K_L = U_{(3 \times 3)} \simeq \left(1 - \frac{1}{2} F F^\dagger\right) U_{\text{MNS}} \quad (7.2.15)$$

$$K_H = U_{(3 \times 6)} \simeq (0_{3 \times 3}, F) U_{(6 \times 6)} \quad (7.2.16)$$

となる [97–99]。 K_L は明らかにユニタリ行列ではない。つまり $\frac{1}{2} F F^\dagger$ がユニタリ行列からのズレを表すことになる。ここでこのズレを

$$\eta = -\frac{1}{2} F F^\dagger = \eta^\dagger \quad (7.2.17)$$

で定義することにする。 η の実験からの制限^{*1}は [89–91]、

$$|\eta| < \begin{pmatrix} 2.0 \times 10^{-3} & 6.0 \times 10^{-5} & 1.6 \times 10^{-3} \\ 6.0 \times 10^{-5} & 8.0 \times 10^{-4} & 1.0 \times 10^{-3} \\ 1.6 \times 10^{-3} & 1.0 \times 10^{-3} & 2.6 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \quad (7.2.18)$$

である。一番厳しい制限をつけている (1, 2) 成分は $\mu \rightarrow e\gamma$ から来ているので、 $\mu \rightarrow e\gamma$ を考える場合にはこの制限はあまり気にしなくていい。

7.3 Lepton Flavor Violation

$\ell_i \rightarrow \ell_j \gamma$ の effective な lagrangian は一般に次のように書くことができる。

$$\mathcal{L}_{\ell\ell\gamma} = e \bar{\ell}_\beta [\gamma^\mu (K_1^L P_L + K_1^R P_R) + i m_{\ell_\alpha} \sigma^{\mu\nu} q_\nu (K_2^L P_L + K_2^R P_R)] \ell_\alpha A_\mu + \text{h.c.} \quad (7.3.1)$$

$K_2^{L,R}$ が模型に依存する部分であり、また $P_{R,L}$ は $P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ の射影演算子である。係数 $K_2^{L,R}$ を用いて $\ell_i \rightarrow \ell_j \gamma$ の崩壊幅は

$$\Gamma(\ell_i \rightarrow \ell_j \gamma) = \frac{\alpha m_{\ell_i}^5}{4} (|K_2^L|^2 + |K_2^R|^2) \quad (7.3.2)$$

^{*1} 対角成分については、 W boson decay、 Z boson invisible decay、universality tests、CKM 行列の unitarity から制限がついており、非対角成分は charged lepton の rare decay から制限がついている。

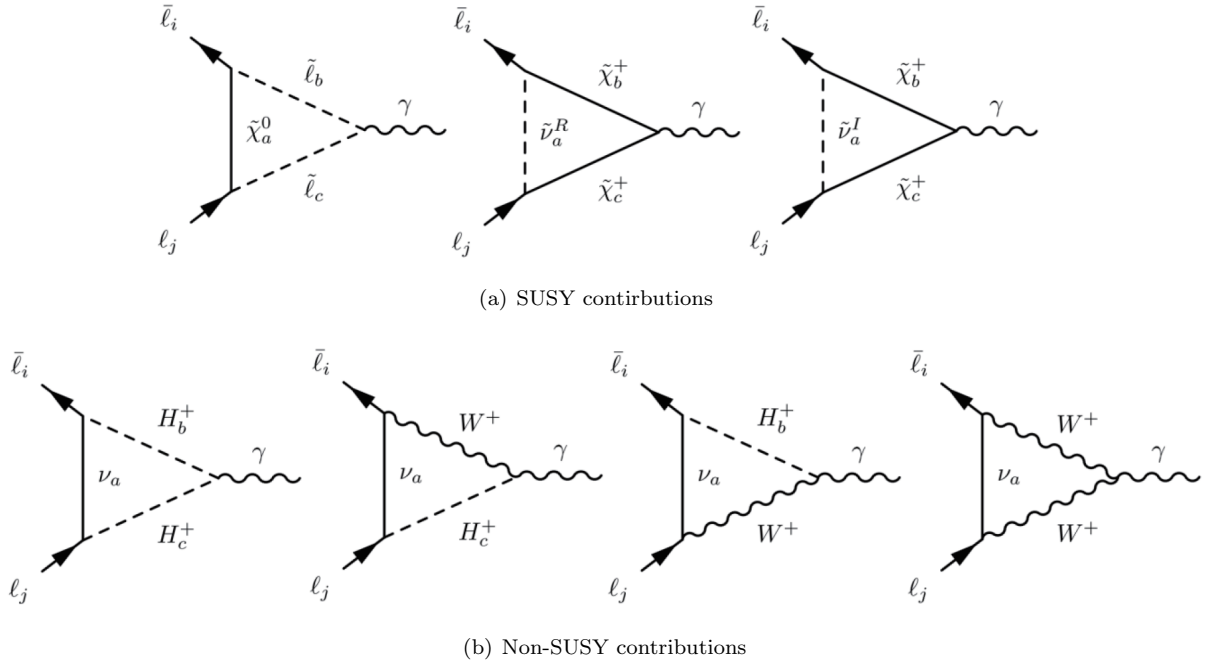


図 7.1 Supersymmetric inverse seesaw 模型における $l_i \rightarrow l_j \gamma$ に寄与する diagram

のように書くことができる。Supersymmetric inverse seesaw 模型では、 $l_i \rightarrow l_j \gamma$ に寄与するソースが 2 種類ある。1 つが SUSY からの寄与であり、もう 1 つが Non-SUSY からの寄与である。そこで、この節では SUSY, Non-SUSY 寄与の表式を与える。それぞれのダイアグラムは図 7.1 で与える。この節では SUSY, Non-SUSY からの寄与の表式を与える。

A. SUSY contributions

後の節で述べるが、本論文では GUT scale で mSUGRA like な boundary condition を課す。その場合、SUSY contribution の基本的な構造は通常 Type1 Seesaw の場合と変わらない。つまり neutralino と chargino のループの寄与である。それぞれ添字 (n), (c) で区別すると、式 (7.3.1) の $K_2^{L,R}$ を

$$K_2^{L,R} = A_2^{(n)L,R} + A_2^{(c)L,R} \quad (7.3.3)$$

分解することが出来る。ニュートラリーノ、チャージノの寄与の explicit な表現は、[65] より、表式を求めるのに必要な相互作用を

$$\mathcal{L}_{f\tilde{f}\tilde{\chi}^0} = \bar{f}_i \left(N_{iAX}^{R(f)} P_R + N_{iAX}^{L(f)} P_L \right) \tilde{\chi}_A^0 \tilde{f}_X + \text{h.c.} \quad (7.3.4)$$

$$\mathcal{L}_{\ell\tilde{\ell}\tilde{\chi}^\pm} = \bar{\ell}_i \left(C_{iAX}^{R(\ell)} P_R + C_{iAX}^{L(\ell)} P_L \right) \tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\nu}_X + \bar{\nu}_i \left(C_{iAX}^{R(\nu)} P_R + C_{iAX}^{L(\nu)} P_L \right) \tilde{\chi}_A^\pm \tilde{\ell}_X + \text{h.c.} \quad (7.3.5)$$

とした時、

$$A_2^{(n)L} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{m_{\tilde{\ell}_X}^2} \left[N_{iAX}^{L(\ell)} N_{jAX}^{L(\ell)*} \frac{1}{6(1-x_{AX})^4} (1 - 6x_{AX} + 3x_{AX}^2 + 2x_{AX}^3 - 6x_{AX}^2 \ln x_{AX}) \right. \quad (7.3.6)$$

$$\left. + N_{iAX}^{L(\ell)} N_{jAX}^{R(\ell)*} \frac{M_{\tilde{\chi}_A^0}}{m_{\ell_j}} \frac{1}{(1-x_{AX})^3} (1 - x_{AX}^2 + 2x_{AX} \ln x_{AX}) \right] \quad (7.3.7)$$

$$A_2^{(n)R} = A_2^{(n)L} \Big|_{L \leftrightarrow R} \quad (7.3.8)$$

$$A_2^{(c)L} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{m_{\tilde{\nu}_X}^2} \left[C_{iAX}^{L(\ell)} C_{jAX}^{L(\ell)*} \frac{1}{6(1-y_{AX})^4} (2 + 3y_{AX} - 6y_{AX}^2 + y_{AX}^3 + 6y_{AX} \ln y_{AX}) \right. \quad (7.3.9)$$

$$\left. + C_{iAX}^{L(\ell)} C_{jAX}^{R(\ell)*} \frac{M_{\tilde{\chi}_A^-}}{m_{\ell_j}} \frac{1}{(1-y_{AX})^3} (-3 + 4y_{AX} - y_{AX}^2 - 2 \ln y_{AX}) \right] \quad (7.3.10)$$

$$A_2^{(c)R} = A_2^{(c)L} \Big|_{L \leftrightarrow R} \quad (7.3.11)$$

となる。ここで $x_{AX} = M_{\tilde{\chi}_A^0}^2/m_{\tilde{l}_X}^2$, $y_{AX} = M_{\tilde{\chi}_A^-}^2/m_{\tilde{\nu}_X}^2$ である。 X はスレプトン、スニュートリノの数であり、スレプトンの場合は $X = 1, \dots, 6$ 、スニュートリノの場合は $X = 1, \dots, 9$ である。また A は neutralino, chargino の数である。charged slepton mass matrix は

$$M_i^2 = \begin{pmatrix} M_{LL}^2 & M_{RL}^2 \\ M_{LR}^2 & M_{RR}^2 \end{pmatrix} \quad (7.3.12)$$

となり、 $M_{LL}^2, M_{RR}^2, M_{LR}^2, M_{RL}^2$ はそれぞれ 3×3 行列で

$$(M_{LL}^2)_{ij} = m_{L,ij}^2 + \frac{1}{2} v_d^2 (Y_E^\dagger Y_E)_{ij} + M_Z^2 \cos 2\beta \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W\right) \delta_{ij} \quad (7.3.13)$$

$$(M_{RR}^2)_{ij} = m_{E,ij}^2 + \frac{1}{2} v_d^2 (Y_E^\dagger Y_E)_{ij} - M_Z^2 \cos 2\beta \sin^2 \theta_W \delta_{ij} \quad (7.3.14)$$

$$(M_{LR}^2)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_d \left((A_E)_{ij} - \mu^* \tan \beta \right) (Y_E)_{ij} \quad (7.3.15)$$

$$(M_{RL}^2)_{ij} = ((M_{LR}^2)^\dagger)_{ij} \quad (7.3.16)$$

と書ける。 m_L^2, m_E^2, A_E は soft SUSY breaking parameter である。同様に sneutrino mass matrix は $\tilde{\nu} = (\tilde{\nu}^+ + i\tilde{\nu}^2)/\sqrt{2}$, $\tilde{N}^C = (\tilde{N}^{C1} + i\tilde{N}^{C2})/\sqrt{2}$, $\tilde{S} = (\tilde{S}^1 + i\tilde{S}^2)/\sqrt{2}$ として複素スカラー場を実スカラー場 2 つに分けた時、sneutrino の mass matrix は CP-even, CP-odd の部分に分けられ

$$\mathcal{L}_{\text{sneutrino-mass}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi^1 & \phi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\tilde{\nu}^+}^2 & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\nu}^-}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \quad (7.3.17)$$

となる [78, 100]。ここで $\phi^i = (\tilde{\nu}^i, \tilde{N}^{Ci}, \tilde{S}^i)$ である。 $m_{\tilde{\nu}^\pm}^2$ はそれぞれ 9×9 行列であり、

$$m_{\tilde{\nu}^\pm}^2 = \begin{pmatrix} (M_{\tilde{\nu}LL}^2)_{ij} & (M_{\tilde{\nu}RL}^2)_{ij} & \frac{1}{\sqrt{2}} v_u Y_\nu^T M_\nu^* \\ (M_{\tilde{\nu}LR}^2)_{ij} & (M_{\tilde{\nu}RR}^2)_{ij} & B_{M_R} \pm \mu_X^\dagger M_R \\ \frac{1}{\sqrt{2}} v_u M_\nu^T Y_\nu^* & B_{M_R}^\dagger \pm \mu_X M_R^\dagger & (M_{\tilde{\nu}SS}^2)_{ij} \end{pmatrix} \quad (7.3.18)$$

$$(M_{\tilde{\nu}LL}^2)_{ij} = m_{L,ij}^2 + \frac{1}{2} v_d^2 (Y_\nu^\dagger Y_\nu)_{ij} + \frac{1}{2} M_Z^2 \cos 2\beta \delta_{ij} \quad (7.3.19)$$

$$(M_{\tilde{\nu}LR}^2)_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_u \left((A_\nu)_{ij} - \mu \cot \beta \right) (Y_\nu)_{ij} \quad (7.3.20)$$

$$(M_{\tilde{\nu}RL}^2)_{ij} = ((M_{\tilde{\nu}LR}^2)^\dagger)_{ij} \quad (7.3.21)$$

$$(M_{\tilde{\nu}RR}^2)_{ij} = m_{N,ij}^2 + \frac{1}{2} v_d^2 (Y_\nu^\dagger Y_\nu)_{ij} + (M_R M_R^\dagger)_{ij} \quad (7.3.22)$$

$$(M_{\tilde{\nu}SS}^2)_{ij} = \left(\mu_X^\dagger \mu_X + M_R^\dagger M_R + m_S^2 \pm B_{\mu_X} \right)_{ij} \quad (7.3.23)$$

となる。

本研究では boundary condition として mSUGRA like なものを仮定しており、GUT スケールではすべての soft breaking パラメータが単位行列に比例するため、 M_L^2 には非対角成分はあらわれない。しかし M_N より高いエネルギースケールでは m_L^2 の RGE が

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} (m_L)_{ij}^2 = \left(16\pi^2 \frac{d}{dt} (m_L)_{ij}^2 \right)_{\text{MSSM}} + (Y_\nu^\dagger Y_\nu m_L^2)_{ij} + (m_L^2 Y_\nu^\dagger Y_\nu)_{ij} + 2(Y_\nu^\dagger (m_N^2)^\top Y_\nu)_{ij} + 2(Y_\nu^\dagger Y_\nu)_{ij} m_{H_2}^2 + 2(T_\nu^\dagger T_\nu)_{ij} \quad (7.3.24)$$

と書けるので (ここで $t = \ln Q$ で、 Q は繰り込みスケール)、SUSY scale では m_L^2 に非対角成分があらわれることにより M_L^2, M_ν^2 も非対角成分を獲得する。low-energy scale での charged slepton の mass matrix の非対角成分は上の RGE に対して対数近似を用いて次のように書ける [63–65]。

$$(\Delta m_L^2)_{ij} = -\frac{1}{16\pi^2} (6m_0^2 + 2A_0^2) (Y_\nu^\dagger L Y_\nu)_{ij} \quad (7.3.25)$$

ここで

$$L = \text{diag} \left(\ln \frac{M_{\text{GUT}}}{M_{\nu,i}} \right) \quad (7.3.26)$$

である。式 (7.3.25) の形からも明らかなように、cLFV を引き起こす charged slepton mass の非対角成分は右巻きニュートリノの湯川結合 Y_ν から来ている。

B. Non-SUSY contributions

Non-SUSY からの寄与は大きく分けて 3 種類ある。1 つが W^- のループであり、もう 1 つが W^-, H^- のループ、そして H^- のループである。 W^- からの寄与は*2

$$Br(\ell_i \rightarrow \ell_j \gamma) = \frac{3\alpha}{64\pi} |G_{ij}^W|^2 \quad (7.3.27)$$

となる。ここで

$$G_{ij}^W = \sum_{\alpha=1}^9 K_{i\alpha}^* K_{j\alpha} G_\gamma^W \left(\frac{m_{N_\alpha}^2}{M_W^2} \right) \quad (7.3.28)$$

$$G_\gamma^W(x) = \frac{1}{3(1-x)^4} (10 - 43x + 78x^2 - 49x^3 + 18x^3 \ln x + 4x^4) \quad (7.3.29)$$

である [89, 99]。式 (7.2.13) を用いると

$$G_{ij}^W = \sum_{\alpha=1}^3 (K_L^*)_{i\alpha} (K_L)_{j\alpha} G_\gamma^W \left(\frac{m_{N_\alpha}^2}{M_W^2} \right) + \sum_{\alpha=4}^9 (K_H^*)_{i\alpha} (K_H)_{j\alpha} G_\gamma^W \left(\frac{m_{N_\alpha}^2}{M_W^2} \right) \quad (7.3.30)$$

となる。初項が軽いニュートリノからの効果であり、2 項が重いニュートリノからの効果である。通常の type-I See-saw とは違い、 $K_H \propto F$ のために、抑制されずに残る。つまり inverse seesaw 模型では新しく追加された gauge singlet な右巻きニュートリノが cLFV を引き起こす。 $m_\nu \ll M_W$ より式 (7.3.30) の第一項は $\frac{10}{3}(1+2\eta)$ となる。一方、第二項についても $M_W \ll m_{N_k}$ ならば $-\frac{4}{3}\eta$ となるため、結局 $\mu \rightarrow e\gamma$ に対する Non-SUSY contribution(W^-) はおおよそ

$$Br(\mu \rightarrow e\gamma) \sim 1.74 \times 10^{-3} |\eta_{12}|^2 \quad (7.3.31)$$

となる。

*2 本研究では、SUSY mass scale が大きい状況を考えており、重い charged Higgs からの寄与は非常に小さくなる。そのため、本研究では hNon-SUSY contribution として W^- の寄与のみを考える。なお、軽い charged Higgs に関しては W^- に吸収される NG ボソンとなる。

7.4 Numerical Setup

この節では、数値計算するにあたってのパラメータのインプットを与える。

7.4.1 Neutrino sector

本論文では、ニュートリノの質量階層性として normal hierarchy を採用し、MNS 行列のパラメータの混合角を

$$m_{\nu,1} = 10^{-4} \text{ eV} \quad (7.4.1)$$

$$m_{\nu,2} \sim 8.7 \times 10^{-3} \text{ eV} \quad (7.4.2)$$

$$m_{\nu,3} \sim 4.9 \times 10^{-2} \text{ eV} \quad (7.4.3)$$

とし、

$$s_{12} = 0.55, \quad s_{23} = 0.66, \quad s_{13} = 0.15 \quad (7.4.4)$$

また複素位相は

$$\delta = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 0 \quad (7.4.5)$$

とする。また M_R, μ_X は SUSY scale でのインプットとする。

7.4.2 SUSY sector

本論文では、SUSY parameter に対して mSUGRA like な boundary condition を課すことにする。つまり GUT スケールで、soft breaking parameter に対して

$$M_i \equiv M_{1/2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7.4.6)$$

$$m_{H_i}^2 = m_{\tilde{f}}^2 \equiv m_0^2 \quad (\tilde{f} = \tilde{Q}, \tilde{U}, \tilde{D}, \tilde{L}, \tilde{E})(H_i = H_u, H_d) \quad (7.4.7)$$

$$A_f \equiv A_0 \quad (f = U, D, E) \quad (7.4.8)$$

という仮定を置く。

さらに、今回の模型で新たに加わる $m_{\nu_C}^2, m_{\tilde{S}}^2, A_\nu$ についても同様に

$$m_{\nu_C}^2 = m_{\tilde{S}}^2 = m_0^2 \mathbf{1} \quad (7.4.9)$$

$$A_\nu = A_0 \quad (7.4.10)$$

を仮定する。残りのパラメータである $|\mu|, B_\mu$ に関しては、tadpole conditions の解とする。残りのパラメータである B_{M_R}, B_{μ_X} に関しては SUSY scale の input

$$B_{M_R} = 100M_R \quad (7.4.11)$$

$$B_{\mu_X} = 100\mu_X \quad (7.4.12)$$

$m_{\nu_C}^2$ は GUT スケールでゼロとする。つまり、独立な SUSY パラメータは

$$m_0, M_{1/2}, A_0, \tan \beta, \text{sign}(\mu) \quad (7.4.13)$$

の5つとなる。そのうち $\tan \beta, \text{sign}(\mu)$ に関しては

$$\tan \beta = 10, \text{sign}(\mu) = 1 \quad (7.4.14)$$

として数値計算を行う。また本論文では特に断りがない限り

$$m_0 = M_{1/2} = A_0 \equiv M_{\text{SUSY}} \quad (7.4.15)$$

を仮定する。

7.5 Numerical Result 1

まず最初に、ここでは effective な Majorana 質量行列 X と実対称行列 R をインプットにし、 Y_ν が式 (7.2.9) を通じて決まる場合を考える。effective なマヨラナ質量行列 $X = M_R \mu_X^{-1} M_R^T$ が非対角成分をもつためには、 \hat{X} が階層構造を持つ必要がある。そこで本研究では \hat{X} の階層構造を M_R の階層性と μ_X の階層性、より一般的な場合の 3 つに分解して考えることにする。つまり

1. $(\mu_X)_{ij} = \tilde{\mu}_X \delta_{ij}$, $(M_R)_{ij} \neq \tilde{M}_R \delta_{ij}$
2. $(M_R)_{ij} = \tilde{M}_R \delta_{ij}$, $(\mu_X)_{ij} \neq \tilde{\mu}_X \delta_{ij}$
3. M_R, μ_X 非対角成分を持つ場合

の 3 つの場合を考える。なお本研究では数値計算を行う際に、mathematica パッケージである SARAH と Fortran コードの SPheno を用いた [101–109]。

7.5.1 $(\mu_X)_{ij} = \tilde{\mu}_X \delta_{ij}$, $(M_R)_{ij} \neq \tilde{M}_R \delta_{ij}$ の場合

まず最初に $(\mu_X)_{ij} = \tilde{\mu}_X \mathbf{1}$ の場合を考える。ここでは M_R の階層性を次のように ϵ で定義する。

$$M_R^{\text{diag}} = \tilde{M}_R \begin{pmatrix} \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0 < \epsilon \leq 1) \quad (7.5.1)$$

以上のような条件のもとで考えることとする。 M_R は 2 つのユニタリ行列を用いて対角化することが出来る。今、そのユニタリ行列を S, T とすると

$$M_R^{\text{diag}} = S M_R T^\dagger \quad (7.5.2)$$

となる。 $\mu_X = \tilde{\mu}_X \mathbf{1}$ の場合には

$$X = \frac{1}{\tilde{\mu}_X} M_R M_R^T \quad (7.5.3)$$

$$= \frac{1}{\tilde{\mu}_X} S^\dagger M_R^{\text{diag}} T T^T M_R^{\text{diag}} S^* \quad (7.5.4)$$

となる。 X がユニタリ行列 V を用いて $\hat{X} = V X V^T$ と対角化されたことを思い出すと

$$V X V^T = \frac{1}{\tilde{\mu}_X} V S^\dagger M_R^{\text{diag}} T T^T M_R^{\text{diag}} S^* V^T \quad (7.5.5)$$

となる。一般に $T T^T$ は単位行列にはならないが、 T が実数行列の場合には単位行列になる^{*3*}^{*4}。この時 $S = V$ となる。この時の SUSY, Non-SUSY contributions の特徴を考える。

^{*3} 本論文ではレプトンセクターで CP 位相は考えていないので、すべての行列が実数行列となる。そのため $T T^T = \mathbf{1}$ が成立する。

^{*4} より一般的には、式 (7.5.3) より任意の複素直交行列 \mathcal{P} を用いて

$$M_R = \sqrt{\tilde{\mu}_X} V^\dagger D_{\sqrt{X}} \mathcal{P} \quad (7.5.6)$$

Non-SUSY contribution に関しては、 F と η でほとんど決まる。式 (7.2.6) を少し変形してやると

$$\begin{aligned} F &= U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T D_{\sqrt{X}} V^* (M_R^T)^{-1} \\ &= U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T D_{\sqrt{X}} (M_R^{\text{diag}})^{-1} T^* \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

となるが、今 μ_X は単位行列に比例するために、

$$F = \frac{1}{\sqrt{\mu_X}} U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T T^* \quad (7.5.10)$$

$$\eta = -\frac{1}{2\tilde{\mu}_X} U_{\text{MNS}}^* m_{\nu_l}^{\text{diag}} U_{\text{MNS}}^T \quad (7.5.11)$$

となる。重いニュートリノの効果はほとんど η で決まるので、結局今回の条件では effective な Majorana 質量行列の非対角成分 V , 対称行列 R とともに $\mu \rightarrow e\gamma$ には寄与しないことがわかる。また、 μ_X に質量階層性がある場合には R が η の中に残るため、 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ に影響を与える。このことは次の小節で見る。

SUSY contribution は前に示したように sneutrino と charged slepton の寄与があり、その非対角成分は sneutrino の質量行列にもともとある $Y_\nu^\dagger Y_\nu$ と、式 (7.3.25) のくりこみ群の効果がある。ただし、ほとんどの寄与は質量行列の表式からも明らかなようにくりこみ群の効果から現れる。

$$Y_\nu = \frac{\sqrt{2}}{v_u} M_R F^T \quad (7.5.12)$$

より

$$Y_\nu^\dagger Y_\nu = \frac{2}{v_u^2} F M_R^\dagger M_R F^\dagger \quad (7.5.13)$$

$$= \frac{2}{v_u^2} F T^\dagger \left(M_R^{\text{diag}} \right)^2 T F^\dagger \quad (7.5.14)$$

$$= \frac{2}{v_u^2} \frac{1}{\tilde{\mu}_X} U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T \left(M_R^{\text{diag}} \right)^2 R D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^T \quad (7.5.15)$$

となるが、行列 V は現れないため、effective な Majorana 質量行列の非対角成分の寄与は無い*5。 R に関しては、 M_R が縮退していない限り、Non-SUSY contribution に寄与を与える。

図 7.2

図 7.2 はそれぞれ $V = \mathbf{1}$, $R = \mathbf{1}$ で $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の $M_R, M_{\text{SUSY}}, \tilde{\mu}_X$ 依存性を調べたものである。 M_R を小さくした時に SUSY contribution がそれに伴って小さくなっているのは、式 (7.2.9) からニュートリノ湯川が M_R が小さくなるにともなって小さくなるためである。 M_{SUSY} を大きくした場合には、cLFV に寄与する SUSY 粒子の質量が重くなるために、SUSY contribution が小さくなる。また $\tilde{\mu}_X$ に対して単調減少している

となる。よって

$$F = \frac{1}{\sqrt{\mu_X}} U_{\text{MNS}}^* D_{m_\nu} R^T \mathcal{P} \quad (7.5.7)$$

となる。もし \mathcal{P} が複素成分を持てば、仮に R が実対称行列であっても

$$\eta = \frac{1}{2\tilde{\mu}_X} U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T \mathcal{P} \mathcal{P}^\dagger R D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^T \quad (7.5.8)$$

となる。なお、行列 V の効果は式の展開の途中で打ち消し合うために η の中には現れない。

*5 くりこみ群の効果に関しては、 ν MSSM のような High-scale seesaw の場合には、右巻きニュートリノの質量階層性がある場合に、行列 $\ln \left(\frac{M_{\text{GUT}}}{M_{R,i}} \right)$ の階層構造は M_R の質量が非常に大きいため比較的大きいが、inverse seesaw を含む low-scale seesaw では、 M_R の質量が SUSY scale 程度であるために、 $\ln \left(\frac{M_{\text{GUT}}}{M_{R,i}} \right)$ の対角成分は非常に high-scale seesaw とくらべて非常に小さくなる。今回の数値計算では、 M_R を一つ一つ順番に Integrate out せずに、おおよそ M_{SUSY} 程度で同時に外しているため、 $\ln \left(\frac{M_{\text{GUT}}}{M_{R,i}} \right)$ の階層構造の効果は現れない。そのため、くりこみ群の効果は $Y_\nu^\dagger Y_\nu$ とする。

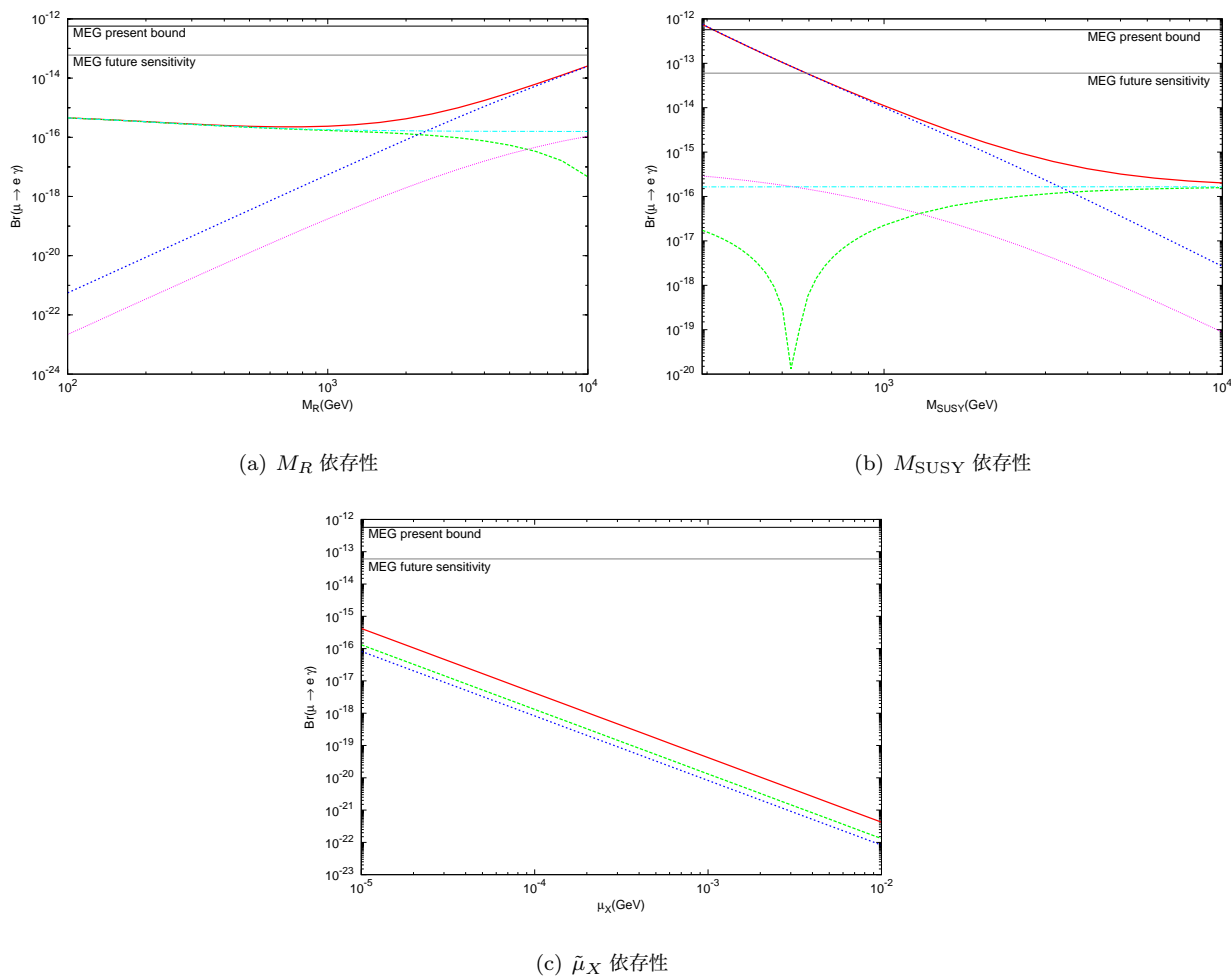


図 7.2 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の M_R , M_{SUSY} , μ_X 依存性。(a) のインプットは $M_{\text{SUSY}} = 4.0\text{TeV}$, $\mu_X = 10^{-5}\text{GeV}$, $\epsilon = 1.0$ である。(b) のインプットは $\tilde{M}_R = 2.0 \times 10^3\text{GeV}$, $\mu_X = 10^{-5}\text{GeV}$, $\epsilon = 1.0$ である。(c) のインプットは $\tilde{M}_R = 2.0 \times 10^3\text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 4.0\text{TeV}$, $\epsilon = 1.0$ である。赤の実線が Full の分岐比を表しており、青の点線が SUSY contribution, 緑の破線が Non-SUSY contribution を表す。また、水色の点線は Non-SUSY contribution の中の W^- の寄与、ピンクの点線は H^- の寄与を表す。

のは、SUSY contribution に関しては、 M_R の場合と同様に式 (7.2.9) からニュートリノ湯川が小さくなるためである。Non-SUSY contribution に関しては、式 (7.5.11) より $\tilde{\mu}_X$ が大きくなるに従って η が小さくなるためである。

図 7.3

図 7.3 は $V = \mathbf{1}$, $R = \mathbf{1}$ で $\tilde{M}_R = 2.0 \times 10^3\text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 10\text{TeV}$ の場合の $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ 依存性を調べたものである。(b) より、SUSY contribution, Non-SUSY(H^-) は M_R の質量階層性の効果を受けているが、Non-SUSY(W^-) は質量階層性の効果を受けない。これは式 (7.5.15),(7.5.11) より理解できる。

図 7.4

(a) は行列 (V, T, R) がそれぞれ $c_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $c_2 = (U_{\text{MNS}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $c_3 = (\mathbf{1}, U_{\text{MNS}}, \mathbf{1})$, $c_4 = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, U_{\text{MNS}})$ を図示したものである。 c_1, c_2, c_3 は完全に重なってしまっている。これは $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ がユニタリ行列 V, T の影響を受けないことを示している。これは式 (7.5.15),(7.5.11) より理解できる。一方、 R に関しては M_R

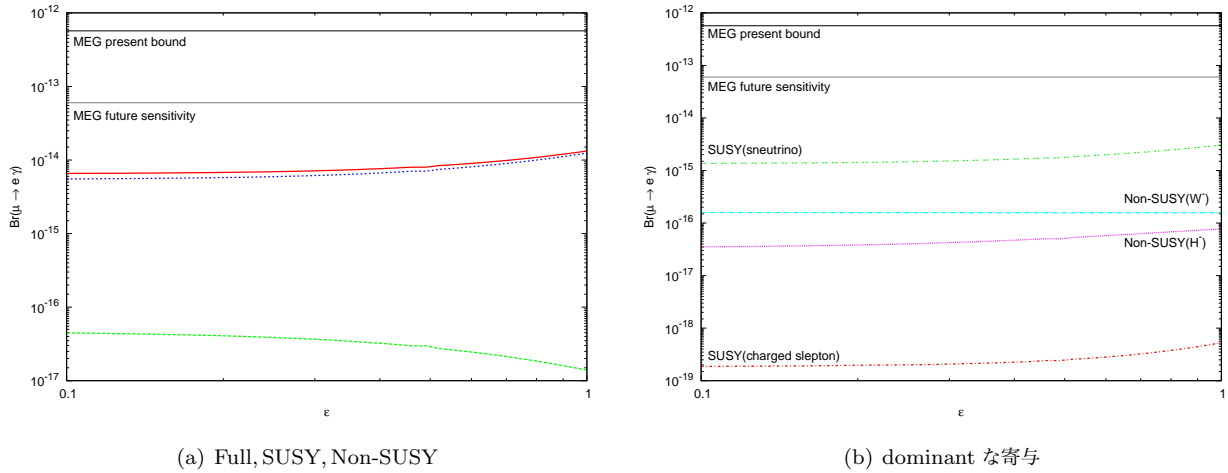


図 7.3 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ 依存性。 $M_R = 2.0 \times 10^4 \text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 10 \text{TeV}$, $\mu_X = 10^{-5} \text{GeV}$ である。
(a) 赤の実線が Full(=SUSY + Non-SUSY) の分岐比を表しており、青の点線が SUSY contribution, 緑の破線が Non-SUSY contribution を表す。
(b) SUSY, Non-SUSY のそれぞれの寄与を示している。

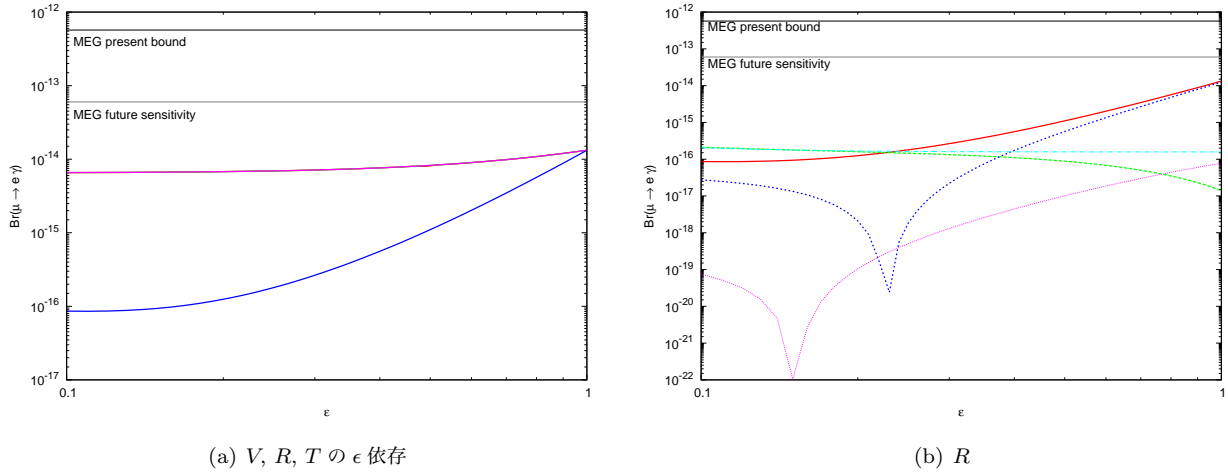


図 7.4 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ 依存性 $M_R = 2.0 \times 10^4 \text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 10 \text{TeV}$ である。
(a) それぞれ $c_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $c_2 = (U_{\text{MNS}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, $c_3 = (\mathbf{1}, U_{\text{MNS}}, \mathbf{1})$, $c_4 = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, U_{\text{MNS}})$ の ϵ 依存性であり、赤の実線が c_1 , 緑の実線が c_2 , ピンクの実線が c_4 を表している (重なっている)。青の実線が c_3 を表している。
(b) c_4 の場合の、SUSY, Non-SUSY の寄与を表している。

が縮退していないかぎり SUSY contribution から消えないため、その効果が現れている。また M_R の階層構造が大きくなるに連れて、分岐比が大きくなっていることが読み取れる。それを示しているのが (b) である。Non-SUSY contribution(W^-) に関しては、 η に R が含まれていないために ϵ の影響を全く受けて居ないことが読み取れる。

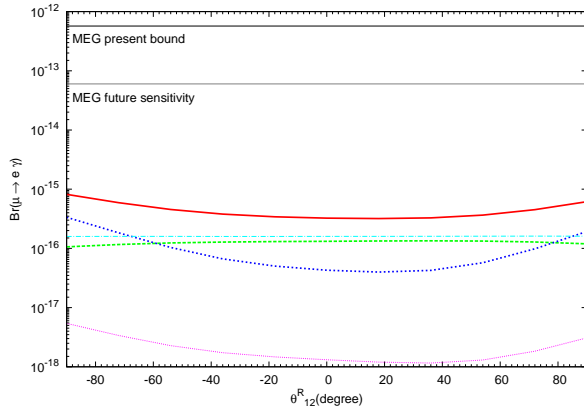
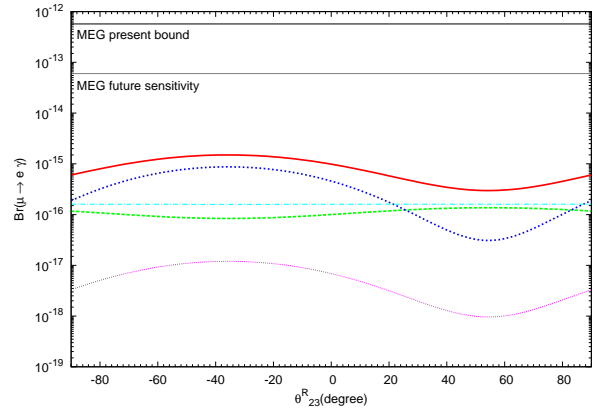
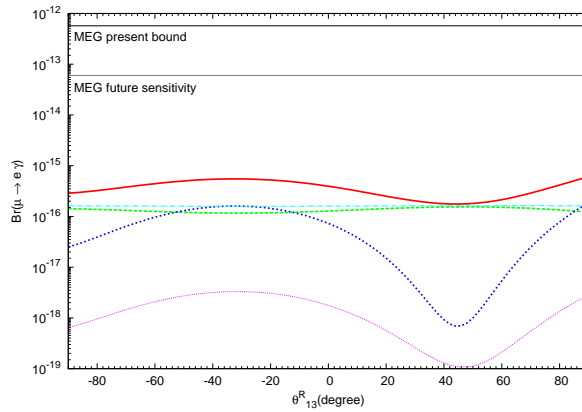
(a) θ_{12}^R 依存性(b) θ_{23}^R 依存性(c) θ_{13}^R 依存性

図 7.5 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の θ_{12}^R , θ_{23}^R , θ_{13}^R 依存性。MNS 行列からのズレ、つまり動かしているパラメータ以外は $\theta_{ij} = \theta_{ij}^{\text{MNS}}$ である。 $\tilde{M}_R = 1.0 \times 10^4 \text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 10 \text{TeV}$, $\epsilon = 0.5$, $\tilde{\mu}_X = 10^{-5} \text{GeV}$ 。赤の実線が Full の分岐比を表しており、青の点線が SUSY contribution, 緑の破線が Non-SUSY contribution を表す。また、水色の点線は Non-SUSY contribution の中の W^- の寄与、ピンクの点線は H^- の寄与を表す。

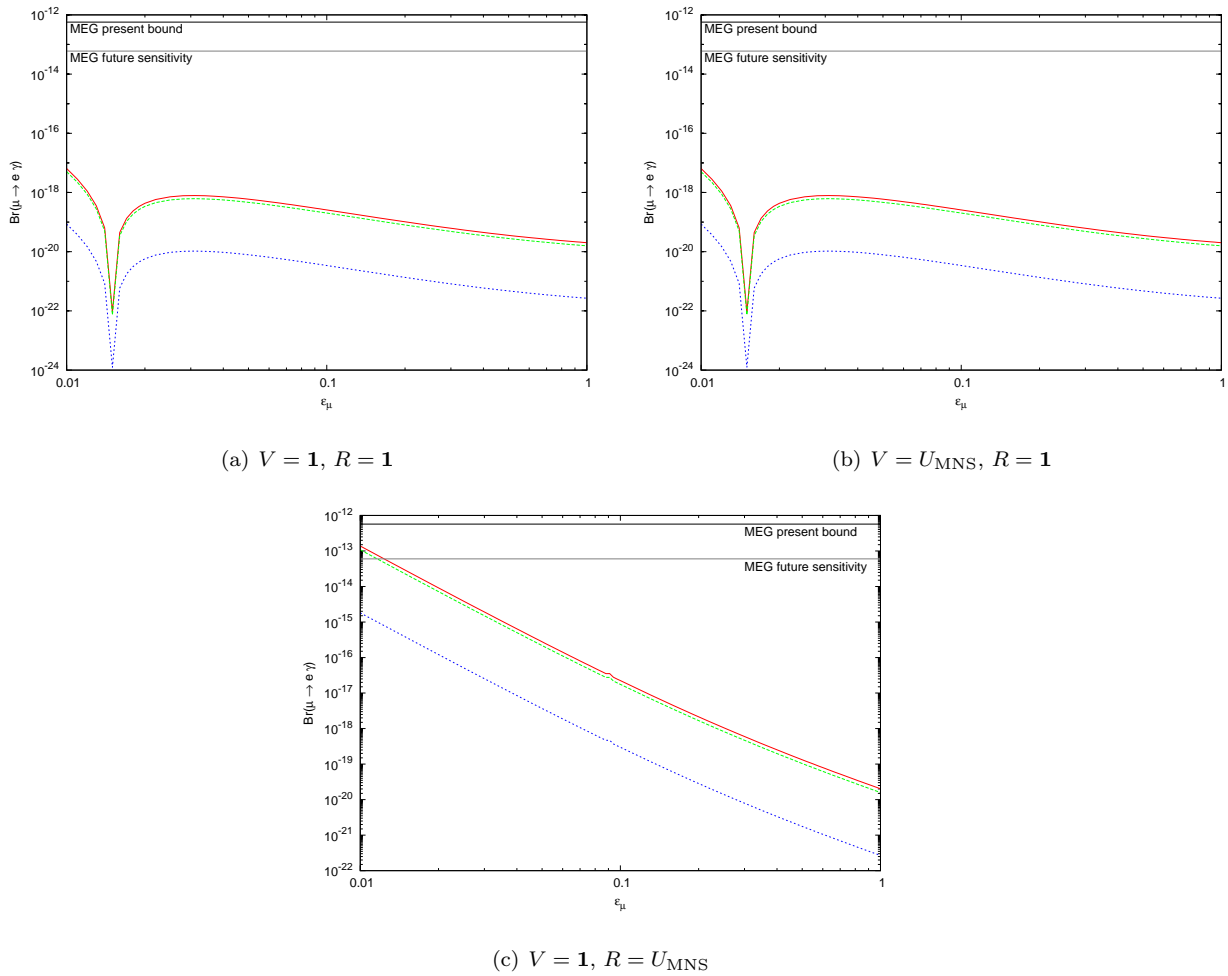


図 7.6 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ_μ 依存性。 $M_R = 2.0 \times 10^3(\text{GeV})$, $M_{\text{SUSY}} = 10(\text{TeV})$, $\tilde{\mu}_X = 10^{-3}(\text{GeV})$ 。赤の実線が Full(=SUSY + Non-SUSY) の分岐比を表しており、青の点線が SUSY contribution, 緑の破線が Non-SUSY contribution を表す。

7.5.2 $(M_R)_{ij} = \tilde{M}_R \delta_{ij}$, $(\mu_X)_{ij} \neq \tilde{\mu}_X \delta_{ij}$ の場合

次にパラメータ M_R に階層性がない、つまり $M_R = M_R \mathbf{1}$ で、逆に μ_X に質量階層性がある時を考える。 μ_X の質量階層性はパラメータ ϵ_μ を用いて

$$\mu_X^{\text{diag}} = \tilde{\mu}_X \begin{pmatrix} \epsilon_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0 < \epsilon_\mu \leq 1) \quad (7.5.16)$$

のように与えられることを仮定する。 M_R に質量階層性がないことを仮定しているために、 μ_X は

$$\mu_X^{\text{diag}} = V^* \mu_X V^\dagger \quad (7.5.17)$$

と、 M_R の場合と同様にユニタリ行列 V を用いて対角化される。

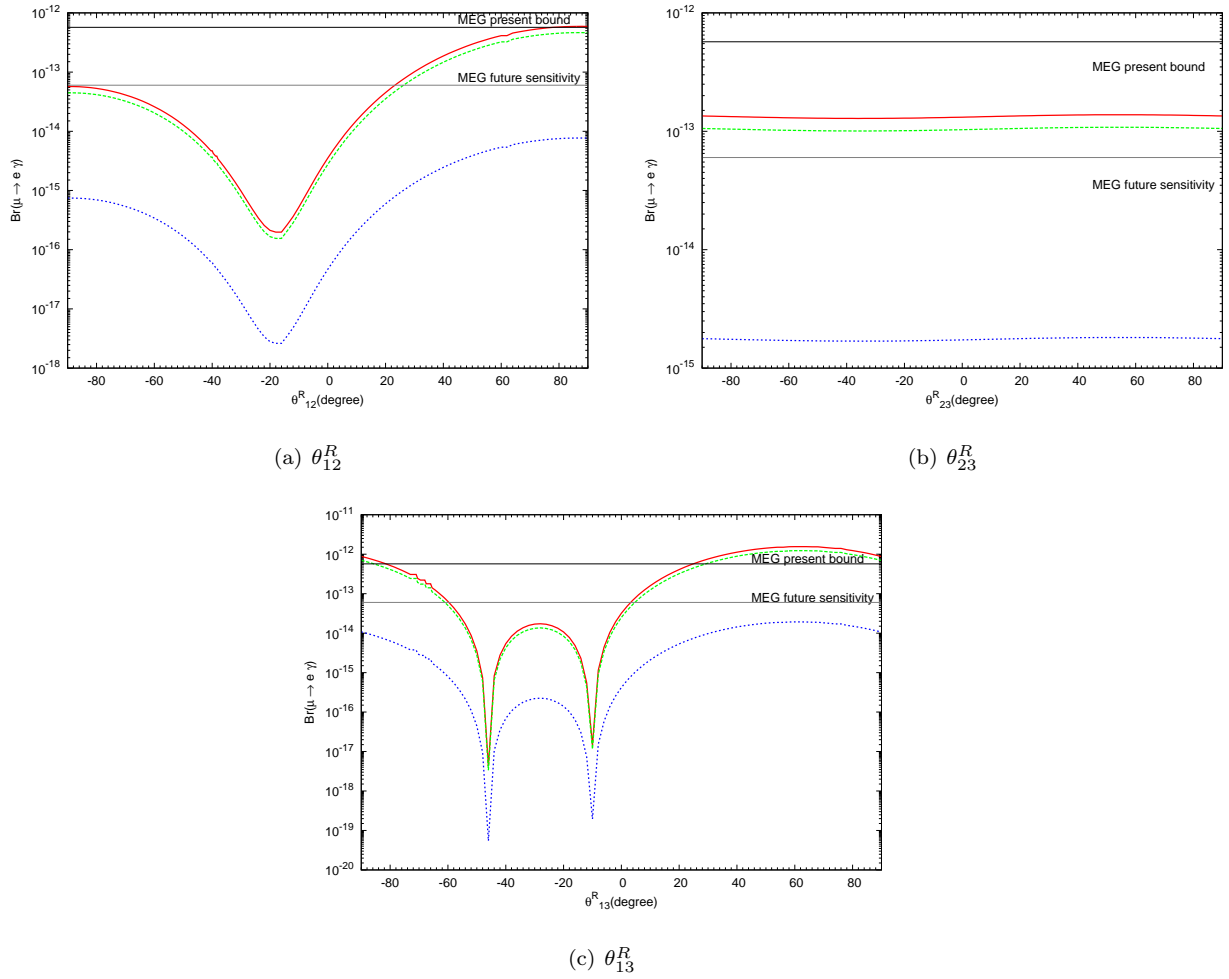


図 7.7 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の $\theta_{12}^R, \theta_{23}^R, \theta_{13}^R$ 依存性 (MNS 行列からのズレ、つまり動かしているパラメータ以外は $\theta_{ij}^R = \theta_{ij}^{MNS}$)。赤の実線が Full(=SUSY + Non-SUSY) の分岐比を表しており、青の点線が SUSY contribution, 緑の破線が Non-SUSY contribution を表す。 $\tilde{M}_R = 2 \times 10^3 \text{ GeV}$, $\tilde{\mu}_X = 10^{-3} \text{ GeV}$, $\epsilon_{\mu X} = 0.01$, $M_{\text{SUSY}} = 10 \text{ TeV}$.

図 7.6

この図は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ_μ 依存性を $(V = 1, R = 1)$, $(V = U_{\text{MNS}}, R = 1)$, $(V = 1, R = U_{\text{MNS}})$ の場合に調べたものである。図 7.6(a),(b) を比較することにより、 V 依存性がほとんど無いことが読み取れる。これは式 (7.5.9) で M_R が対角行列となるために

$$F = U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T D_{\sqrt{\mu_X}}^{-1} \quad (7.5.18)$$

$$\eta = -\frac{1}{2} U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T (\mu_X^{\text{diag}})^{-1} R^* D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^T \quad (7.5.19)$$

$$Y_\nu^\dagger Y_\nu = \frac{1}{v_u^2} \tilde{M}_R^2 \eta \quad (7.5.20)$$

となり、SUSY contribution, Non-SUSY contribution とともに V が現れないためである。ここで、 $D_{\sqrt{\mu_X}} = (\sqrt{\mu_X^{\text{diag}}})$ である。一方 F, η とともに R が含まれているために、SUSY Non-SUSY contribution には R の効果は現れることが期待される。これを示したのが図 7.6(c) である。明らかに図 7.6(a)(b) とは異なっている。

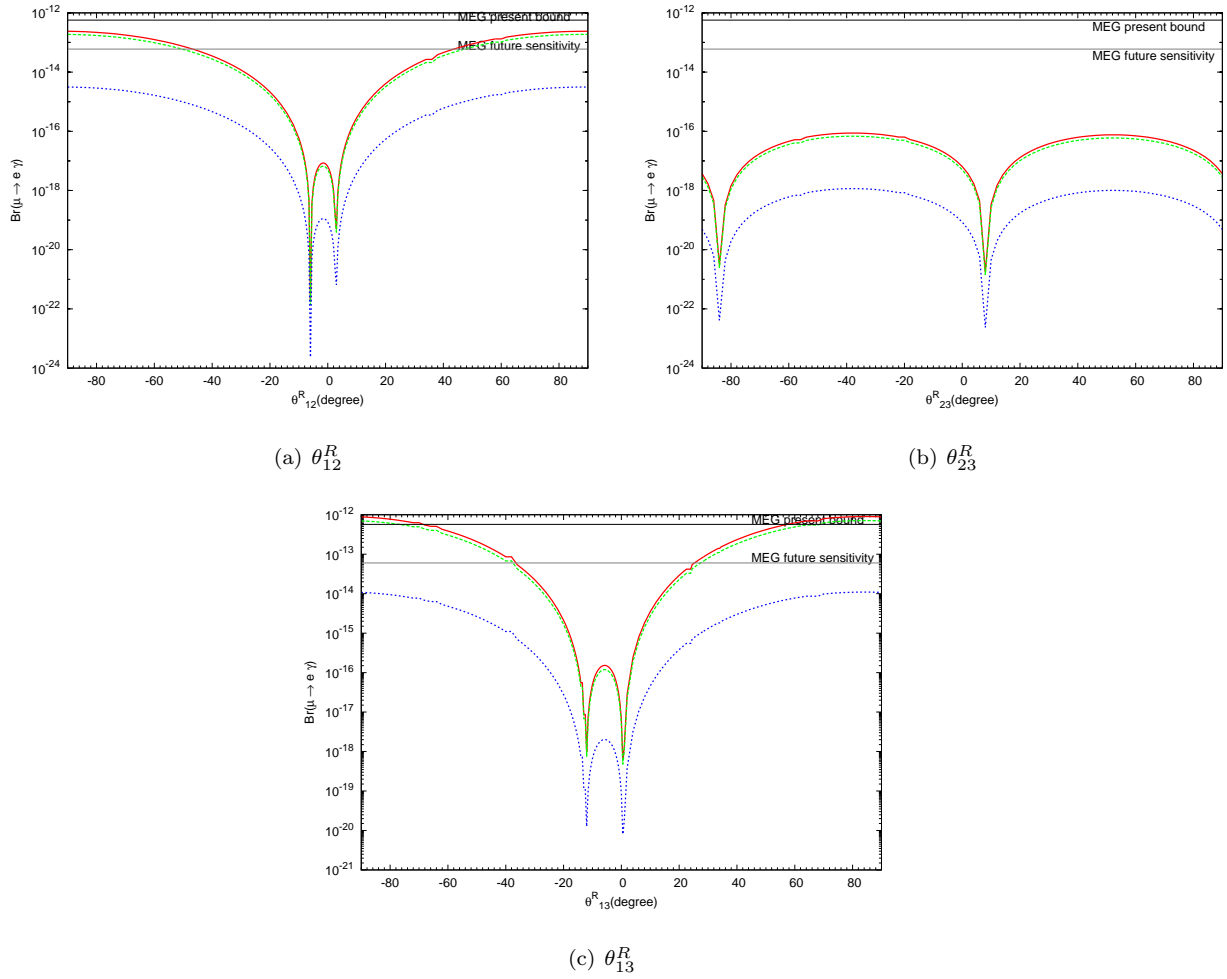


図 7.8 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の $\theta_{12}^R, \theta_{23}^R, \theta_{13}^R$ 依存性。(単位行列からのズレ、つまり動かしているパラメータ以外は θ_{ij}^R をゼロとする) 赤の実線が Full(=SUSY + Non-SUSY) の分岐比を表しており、青の点線が SUSY contribution, 緑の破線が Non-SUSY contribution を表す。 $M_R = 2 \times 10^3 \text{ GeV}$, $\mu_X = 10^{-3} \text{ GeV}$, $\epsilon_{\mu_X} = 0.01$, $M_{\text{SUSY}} = 10 \text{ TeV}$.

図 7.7, 図 7.8

それぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の $\theta_{12}^R, \theta_{23}^R, \theta_{13}^R$ 依存性を調べたものである。SUSY contribution, Non-SUSY contribution 共に η に依存するので、 R 依存性が等しくなる。図 7.7 と図 7.8 の違いは、前者の場合は $\theta_{ij}^R = \theta_{ij}^{\text{MNS}}$ を仮定しているが、後者の場合は $\theta_{ij}^R = 0$ としている。

7.5.3 M_R, μ_X ともに非対角成分をもつ場合

最後に、 M_R, μ_X ともに非対角成分をもつという一般的な場合を考える。式 (7.2.5), (7.2.7) より

$$D_{\sqrt{m_\nu}} D_{\sqrt{m_\nu}} = U_{\text{MNS}}^T F W^\dagger D_{\sqrt{\mu_X}} D_{\sqrt{\mu_X}} W^* F^T U_{\text{MNS}} \quad (7.5.21)$$

となり、

$$F = U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} \mathcal{O} D_{\sqrt{\mu_X}}^{-1} W \quad (7.5.22)$$

$$\eta = F F^\dagger = U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} \mathcal{O} (\mu_X^{\text{diag}})^{-1} \mathcal{O}^\dagger D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^T \quad (7.5.23)$$

となる。ここで \mathcal{O} は任意の複素対称行列であり*6、 Y_ν , M_R の構造によらずにまとめて記述したものである。つまり Y_ν , M_R の構造に関わらず、その非対角成分の影響を考えるためには μ_X が質量階層性を持つことが必要となることがわかる。

この節では X , R をインプットとしている。次の節でも触れるが、 X をインプットとした場合、 $X = M_R \mu_X^{-1} M_R^T$ の関係から

1. X と μ_X をインプットとする
2. X と M_R をインプットとする

の2つの場合を考えることが出来る*7。

前者の場合、任意の対称行列 \mathcal{R} を用いて

$$M_R = V^\dagger D_{\sqrt{X}} \mathcal{R} D_{\sqrt{\mu_X}} W^* \quad (7.5.24)$$

となり

$$F = U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T \mathcal{R}^* D_{\sqrt{\mu_X}}^{-1} W \quad (7.5.25)$$

$$\eta = U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T \mathcal{R}^* (\mu_X)^{-1} \mathcal{R}^T R^* D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^T \quad (7.5.26)$$

となって Non-SUSY contribution から effective Majorana Mass matrix の off diagonal 成分の寄与 V が完全に消えてしまう。ただし、 M_R の構造をあらわす \mathcal{R} の効果は μ_X が縮退していないかぎり残る。なお、SUSY contribution に関してはその効果は現れない。

一方、後者に関しては

$$\mu_X = M_R^T X^{-1} M_R \quad (7.5.27)$$

と決まるため、

$$F = U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T V^* M_R \quad (7.5.28)$$

$$\eta = U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R^T V^* M_R M_R^\dagger V^T R^* D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^T \quad (7.5.29)$$

となる。 M_R は任意の複素行列のため、Non-SUSY contribution は effective Majorana mass の非対角成分 V の影響を受けることになる。なお、SUSY contribution に関してはその効果は現れない。

7.5.4 まとめ

この節では、 X , R をインプットとした場合を3つに分けて考えた。 M_R が単位行列に比例する場合、 μ_X が単位行列にする場合のどちらでも effective な Majorana 質量行列の非対角成分が現れないことを明らかにした。一方、 M_R , μ_X がともに非自明な構造を持つ場合、Non-SUSY contribution にその効果が現れることを明らかにした。

7.6 Numerical Result 2

次にニュートリノ湯川が対角行列になるような非常に特殊な場合を考える。言い換えると、前節ではマヨラナ質量行列 X と任意の複素対称行列 R を input として、式 (7.2.9) からニュートリノ湯川を計算したが、こ

*6 本研究では簡単のため実対称行列を仮定する。

*7 M_R と μ_X をインプットして X を決めることもできるが、その場合 V の一般的な表式を M_R , μ_X を用いて書き下すのが困難となる。そこで本研究では上記の2つの状況を考えることとする。

の節ではニュートリノ湯川 Y_ν のパラメータ 9 個をインプットとし、 X の 6 つ、 R の 3 つのパラメータを決定する。もしニュートリノ湯川が対角行列 D_Y と書けるとき、式 (7.2.9) は

$$D_Y = \frac{\sqrt{2}}{v_u} V^\dagger D_{\sqrt{X}} R D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^\dagger \quad (7.6.1)$$

となり、これより

$$R = \frac{v_u}{\sqrt{2}} D_{\sqrt{X}}^{-1} V D_Y U_{\text{MNS}} D_{\sqrt{m_\nu}}^{-1} \quad (7.6.2)$$

となり $RR^T = 1$ を満たす。つまり R が式 (7.6.2) となるような特殊な場合を考えていることになる。この時 X は

$$X = \frac{v_u^2}{2} D_Y U_{\text{MNS}} (m_\nu^{\text{diag}})^{-1} U_{\text{MNS}}^T D_Y \quad (7.6.3)$$

となる。 X が決まるので、 X を対角化する行列 V も一意に決まる。以上の状況を踏まえた上で、なぜこのようなパラメータの取り方が特殊であるかを説明する。今 $Y_\nu = D_Y$ を仮定しているため、 $\mu \rightarrow e\gamma$ に対する SUSY contribution は完全に消える。なぜならば SUSY contribution は slepton の質量行列の非対角成分からくるが、その非対角成分は式 (7.3.12), 式 (7.3.18) より $Y_\nu^\dagger Y_\nu$ に比例する。しかし今の場合 Y_ν が対角行列であるためにこの寄与が完全になくなるのである。そのため ν MSSM ではアクシデンタルにニュートリノ湯川が対角行列の場合になった場合には $\mu \rightarrow e\gamma$ の分岐比は完全に消えてしまう。しかし、Supersymmetric inverse seesaw 模型の場合には SUSY contribution の他に Non-SUSY contribution があり、この Non-SUSY contribution が Y_ν が対角行列の場合でもある程度の大きさの荷電レプトンフレーバーの破れを起こしうる。このことを見るためにここからは

1. μ_X をインプット
2. M_R をインプット

の 2 つの場合に分けて考えることとする。

7.6.1 μ_X をインプットとした場合

マヨラナ質量行列 X は固有値 3 つと回転角 3 つの計 6 個の実パラメータで記述することが出来る。つまり式 (7.6.3) は 6 個のパラメータを決める式である。一方、 X は M_R, μ_X で書くことが出来て、そこには 15 個の独立なパラメータを含む。つまり式 (7.6.3) によって M_R の 6 個のパラメータが決まり、9 個がフリーパラメータとなる。今 μ_X を決めているので 6 個のフリーパラメータが決定されたことになり、結局 3 つのフリーパラメータが残ることとなる。もともと M_R は 9 個のパラメータで記述するため、残りの 3 つのパラメータを決めてやることで M_R が完全に決まる。

これを定量的に見るために式 (7.6.3) を変形する。まず μ_X はユニタリ行列 W を用いて

$$\mu_X^{\text{diag}} = W \mu_X W^T \quad (7.6.4)$$

と対角化することが出来る。つまりインプットとして W の回転角 3 つと μ_X^{diag} の 3 つの固有値がインプットパラメータとなる。これを用いて式 (7.6.3) は

$$M_R W^T D_{\sqrt{\mu_X}}^{-1} D_{\sqrt{\mu_X}}^{-1} W M_R^T = \frac{v_u^2}{2} D_Y U_{\text{MNS}} (m_\nu^{\text{diag}})^{-1} U_{\text{MNS}}^T D_Y \quad (7.6.5)$$

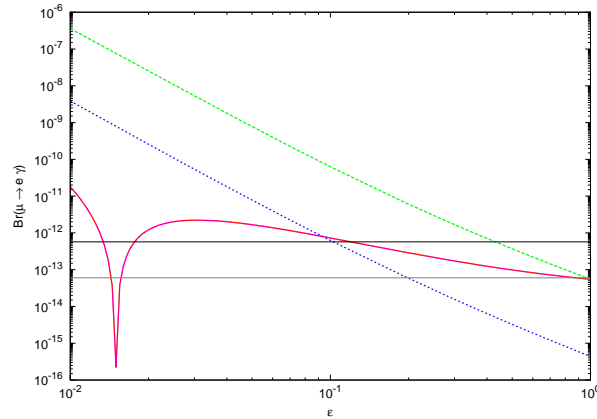


図 7.9 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の M_R の ϵ 依存性。 $D_Y = \text{diag}(10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4})$. 赤の実線が $\tilde{\mu}_X = 10^{-6}\text{GeV}$, $(V, R') = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$. 緑の点線は $\tilde{\mu}_X = 10^{-6}\text{GeV}$, $(V, R') = (\mathbf{1}, U_{\text{MNS}})$ 青の点線が $\tilde{\mu}_X = 10^{-5}\text{GeV}$, $(V, R') = (\mathbf{1}, U_{\text{MNS}})$.

となる。ここで $D_{\sqrt{\mu_X}} = \sqrt{\mu_X^{\text{diag}}}$ である。任意の対称行列 R' を用いて*8

$$M_R = \frac{v_u}{\sqrt{2}} D_Y U_{\text{MNS}} D_{\sqrt{m_\nu}}^{-1} (R')^T D_{\sqrt{\mu_X}} W^* \quad (7.6.6)$$

となる。つまりこれは M_R に含まれる 9 個のパラメータのうち、 X によって決まるパラメータ 6 つを覗いた 3 つのフリーパラメータを R' で表したことになる。

$$R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23}' & \sin \theta_{23}' \\ 0 & -\sin \theta_{23}' & \cos \theta_{23}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{13}' & 0 & \sin \theta_{13}' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{13}' & 0 & \cos \theta_{13}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{12}' & \sin \theta_{12}' & 0 \\ -\sin \theta_{12}' & \cos \theta_{12}' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.6.7)$$

$\theta_{12}', \theta_{23}', \theta_{13}'$ はすべて実数であると仮定する。この時、式 (7.2.6) より

$$F = U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R' D_{\sqrt{\mu_X}}^{-1} W \quad (7.6.8)$$

$$\eta = -\frac{1}{2} U_{\text{MNS}}^* D_{\sqrt{m_\nu}} R' \left(\mu_X^{\text{diag}} \right)^{-1} R'^T D_{\sqrt{m_\nu}} U_{\text{MNS}}^T \quad (7.6.9)$$

となる*9。この R 依存性を図示したものが図 7.9, 7.10 である。

7.6.2 M_R をインプットとした場合

この場合は X が持つ 15 個のパラメータのうち M_R をインプットとしたことにより 9 個のパラメータが決まる。残るパラメータは μ_X の 6 個であるが、これは式 (7.6.3) によって決まる。この場合

$$\mu_X = M_R^T X^{-1} M_R \quad (7.6.10)$$

$$= \frac{2}{v_u^2} M_R^T D_Y^{-1} U_{\text{MNS}}^* (m_\nu^{\text{diag}}) U_{\text{MNS}}^T D_Y^{-1} M_R \quad (7.6.11)$$

となる。 M_R はユニタリ行列 2 つで対角化することが出来る。この 2 つのユニタリ行列を S, T とすると、

$$M_R^{\text{diag}} = S M_R T^\dagger \quad (7.6.12)$$

*8 一般には複素対称行列だが、ここでは簡単のため実対称行列としている。

9 繰り返しになるが、本研究では CP 位相を考えていないため、 $U_{\text{MNS}}^ = U_{\text{MNS}}$ である

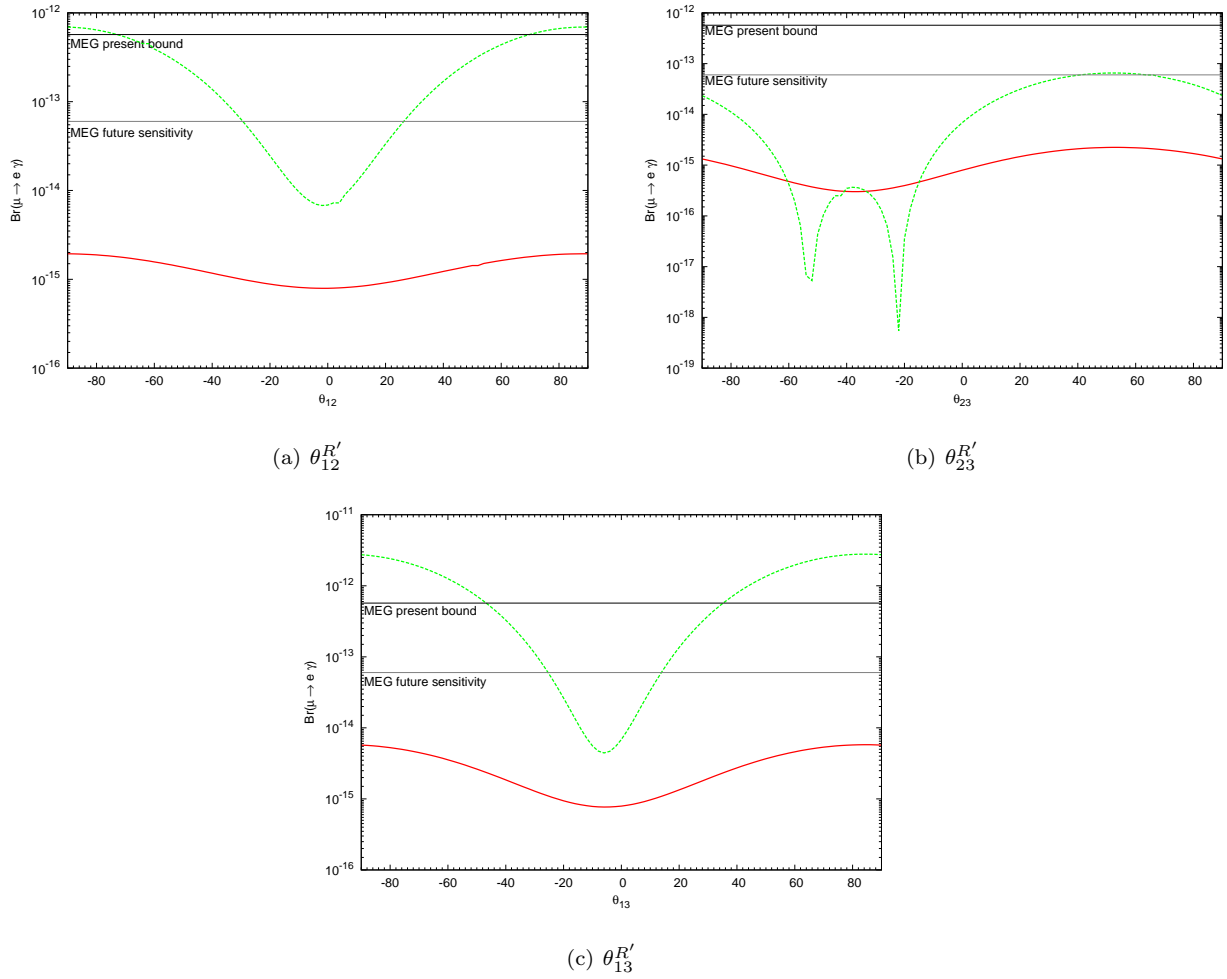


図 7.10 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の $\theta_{12}^{R'}$, $\theta_{23}^{R'}$, $\theta_{13}^{R'}$ 依存性。 $D_Y = \text{diag}(10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3})$, $\tilde{\mu}_X = 10^{-5}\text{GeV}$ 。赤の実線が $\epsilon = 0.5$ 、緑の点線が $\epsilon = 0.1$ の場合である。

となる。この時 F, η はそれぞれ

$$F = \frac{v_u}{\sqrt{2}} D_Y (M_R^T)^{-1} = \frac{v_u}{\sqrt{2}} D_Y S^T (M_R^{\text{diag}})^{-1} T^* \quad (7.6.13)$$

$$\eta = -\frac{v_u^2}{4} D_Y S^T (M_R^{\text{diag}})^{-2} S D_Y \quad (7.6.14)$$

となり、もし M_R に質量階層性がない場合には η に非対角成分が無くなるため、分岐比は非常に小さくなる。

図 7.11

図 7.11 は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ 依存性を調べたものである。今回は effective な Majorana 質量行列の与える影響だけに注目するために、 M_R が対角行列であることを仮定している。 $S = U_{\text{MNS}}$ を仮定しており、赤の実線、緑の波線、青の点線はそれぞれ $D_Y = 10^{-2}\mathbf{1}$, $5 \times 10^{-2}\mathbf{1}$, $5 \times 10^{-3}\mathbf{1}$ を表している。

図 7.12

図 7.12 は $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の θ_{12}^S 依存性を調べたものである。 M_R が対角行列であることを仮定し、 $\theta_{23}^S = \theta_{13}^S = 0$ としている。同様のことを θ_{23}^S や θ_{13}^S についても行うことができるが、今回のケースでは η の非対角

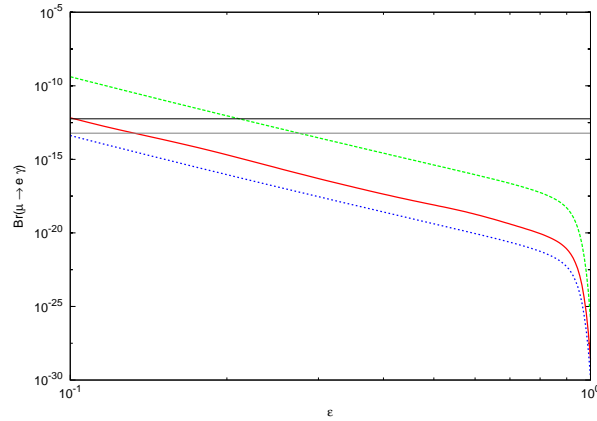


図 7.11 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の ϵ 依存性。赤の実線、緑の破線、青の点線はそれぞれ $D_Y = 10^{-2}\mathbf{1}$, $5 \times 10^{-2}\mathbf{1}$, $5 \times 10^{-3}\mathbf{1}$ である。 $S = U_{\text{MNS}}$, $\tilde{M}_R = 2 \times 10^4 \text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 10 \text{TeV}$. 横線は上が現在の実験値、下が近い将来の精度。

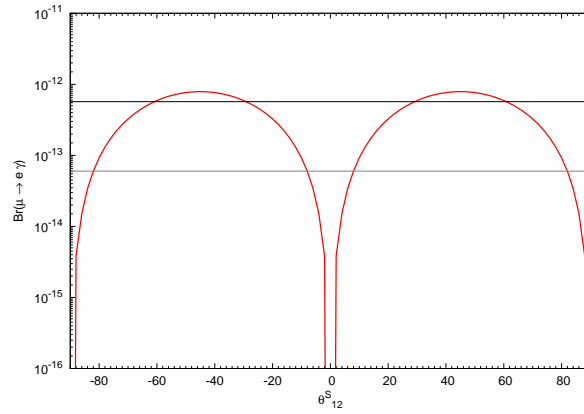


図 7.12 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の θ_{12}^S 依存性。 $D_Y = 10^{-2}\mathbf{1}$, $\epsilon = 0.1$, $\tilde{M}_R = 2 \times 10^4 \text{GeV}$, $M_{\text{SUSY}} = 10 \text{TeV}$, $\theta_{23}^S = \theta_{13}^S = 0$. 横線は上が現在の実験値、下が近い将来の精度。

成分は行列 V からのみ現れるので、 $\eta_{12} \sim 0$ となり、 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ は非常に抑制される。

7.6.3 まとめ

Result2 では Y_ν が対角行列 D_Y である場合を考えた。この場合 SUSY contribution は消えてしまうが、Non-SUSY contribution は消えるとは限らない。このケースでは Y_ν をインプットとしているため、effective な Majorana 質量行列 X は自動的に決まってしまう。しかし X が決まっても、それを構成する M_R, μ_X までは決まらない。本節では、 Y_ν が対角行列であっても、effective な Majorana 質量行列を構成する M_R, μ_X の構造が $\mu \rightarrow e\gamma$ に対して大きな影響をあたえることを明らかにした。

7.7 Summary

本研究では、Supersymmetric inverse seesaw 模型における cLFV について、effective な majorana 質量行列の構造が $l_i \rightarrow l_j \gamma$ に与える影響を調べた。本研究が明らかにしたことは大きく 2 つある。

- Numerical Result 1 では、effective Majorana 質量 X と任意のニュートリノ湯川を決める対称行列 R をインプットとした場合を考えた。 M_R, μ_X のどちらか一方が縮退している時、 X の非対角成分が SUSY, Non-SUSY とともにほとんど影響を与えないが M_R, μ_X がともに非自明な構造をもつ場合には行列 V が $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ に影響をあたえることを示した。
- Numerical Result 2 では、 Y_ν をインプットとした場合を考えた。この時、effective な Majorana 質量行列 X と対称行列 R は共に一意に決まる。特に本研究では Y_ν が対角行列 D_Y である場合を仮定した。SUSY contribution が $Y_\nu^\dagger Y_\nu$ に比例するために、その寄与が完全に消えてしまうが、一方 Non-SUSY contribution (W^-) については自明ではない。本研究では Y_ν を対角行列に取ったとしても X が一般に非対角成分を持ち、 M_R, μ_X の選び方を工夫することで、その効果が $\mu \rightarrow e\gamma$ に対して大きな寄与を与えることを明らかにした。

最後に、今後の展望について簡単にまとめる。本研究では、すべてのパラメータを実数と仮定して議論を行った。しかし実際には U_{MNS}, V, R などのユニタリ行列には複素成分があり、それを含めて考えた場合、議論は今回ほど簡単にはならない。複素数の効果まで考えて議論を展開することが今後の課題となる。また、本研究では $\mu \rightarrow e\gamma$ に限って議論を行った。本研究のように Non-SUSY contribution が dominant な場合、他の cLFV 過程である $\mu \rightarrow 3e$ や $\mu - e$ conversion との換算は容易ではない。今後 $\mu \rightarrow 3e$ や $\mu - e$ conversion は実験精度の向上が見込まれているため、これらについても effective Majorana 質量行列の非対角成分が与える影響を調べるのが重要になってくると考えている。

付録 7.A Inverse seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れ (レビュー)

この節では inverse seesaw 機構における荷電レプトンフレーバーの破れについて過去の文献のレビューを行う。本文中では、先行研究が何をどこまで明らかにしているのかを明示していなかったため、ここでは先行研究で得られている結果について簡単にまとめることで、本研究がどういう意味合いを持つのか、また何のために本研究を行ったのか、その裏付けを行いたいと考えている。

Inverse seesaw 模型の中で、特に Supersymmetric なもの (Supersymmetric Inverse Seesaw : SIS) における荷電レプトンフレーバーの破れを扱っている論文としては、網羅的に扱っている文献として [67] がある。本論文の記法はこの文献に従っている。またそれ以前の論文としては、[78] が SIS における $\mu \rightarrow e\gamma$ を扱っている。

Supersymmetric ではない inverse seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れも研究されており、[73, 79, 99] が代表的なものとなっている。Inverse seesaw 模型の原型になるような模型で初めて荷電レプトンフレーバーの破れについて議論した論文が [73] である。ただしこの論文は出版が 1987 年と非常に古いために、ニュートリノ質量がゼロになるように μ_X をゼロとされており、ニュートリノ振動実験から得られたパラメータは何も考慮していない。non-SUSY inverse seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れを議論している論文として [79, 99] がある。

以下では、supersymmetric inverse seesaw 模型, Non-SUSY inverse seesaw 模型それぞれにおける荷電レプトンフレーバーの破れを論じた文献のレビューを行う。

7.A.1 Supersymmetric Inverse Seesaw 模型 (レビュー)

• Enhanced lepton flavor violation in the supersymmetric inverse seesaw model [78]

Supersymmetric inverse seesaw 模型における cLFV というタイトルで最初に論文として発表されたのが [78] である (2005 年)。この論文が発表される以前にも、inverse seesaw 模型 (の元になる模型) における荷電レプトンフレーバーの破れを議論した論文はあったが、それらはニュートリノ質量をゼロと仮定しており、ニュートリノ実験を再現できるパラメータでの議論はなされていなかった。ニュートリノ実験を再現できるパラメータを用いて、inverse seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れを議論したのがこの論文である。

この論文では、 M_R, μ_X, R をインプットとして Y_ν を決めている。なお、 M_R, μ_X は縮退しており、 R も実対称行列であることを仮定している。この論文に載っている図は 2 種類あり、それが図 7.13 である。内容としては、 $\mu \rightarrow e\gamma$ の M_R, μ_X 依存性を調べ、 M_R が小さい場合には non-SUSY の寄与が現れるということを示している。

• Lepton flavor violation in low-scale seesaw models : SUSY and non-SUSY contributions [67]

Supersymmetric inverse seesaw 模型において、 $\mu \rightarrow e\gamma$ に限らず cLFV の他の過程についても初めて網羅的に記述した論文が [67] である。この論文では、ニュートリノ湯川をインプットとして、 M_R, μ_X は基本的に縮退した場合を考えている。一部、 μ_X が縮退していない場合も考えているが、その詳細に関しては殆ど触られていない。この論文におけるインプットパラメータ基本値は表 7.1 である。またこの時のニュートリノ湯

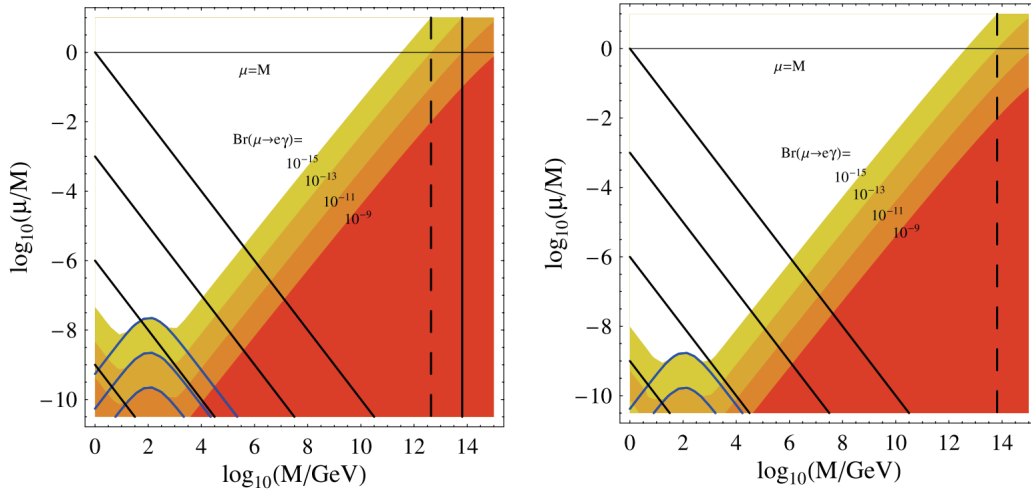


図 7.13 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の $(M_R, \frac{\mu_X}{M})$ 平面における等高線 (対数スケール)。本論文との記法の対応は $M_R \leftrightarrow M, \mu_X \leftrightarrow \mu$ である。左の図は一番軽いニュートリノの質量をゼロとしたものであり ($m_1 = 0\text{eV}$)、右の図はニュートリノが縮退している場合 ($m_1 = 0.3\text{eV}$) である。右側の色がついた等高線はそれぞれ $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) = 10^{-15}, -13, -11, -9$ である。また左下にある青の等高線は重い右巻きニュートリノからの寄与のみを表しており、上から $\mu = 1, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}\text{GeV}$ である。また図の右の縦線 (実線と破線) はそれぞれ通常の type-I seesaw の場合の $(\mu \rightarrow e\gamma) = 10^{-13}, -11$ である [78]。

m_0	1TeV	$M_{1/2}$	1TeV
A_0	-1.5TeV	M_R	2TeV
B_{μ_X}	$100\mu_X$	B_{M_R}	$100M_R$
$\tan\beta$	10	$\text{sign}(\mu)$	+

表 7.1 基本値 [67]

川はインプットとして

$$Y_\nu = 10^{-2} \begin{pmatrix} 0.0956 & -0.0589 & 0.0348 \\ 0.616 & 0.594 & -0.687 \\ 0.404 & 1.78 & 1.91 \end{pmatrix} \quad (7.A.1)$$

で固定している。 M_R の値を変えた場合、ニュートリノ湯川の値を固定しているために変更は μ_X で吸収することになる。つまり

$$\mu_X = \frac{M_R^2}{4 \times 10^{11}} \quad (7.A.2)$$

とする。このような条件のもとで $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ を M_{SUSY}, M_R の関数としてプロットしたものが図 7.14 である。逆に Y_ν が固定されておらず、 M_R, μ_X のインプットから決まる場合を考えているのが図 7.15, 7.16 がある。

このレビューでは $\mu \rightarrow e\gamma$ に関連する部分だけを抜き出しているが、他にも $\mu - e$ conversion なども議論されている。この論文は確かに supersymmetric inverse seesaw 模型における cLFV 過程を網羅的に調べたものであるが、個々の cLFV 過程の特徴に関してはあまり厳密に調べておらず、先にも述べたように、 M_R や μ_X の構造が与える影響に関しては全く触れていない。

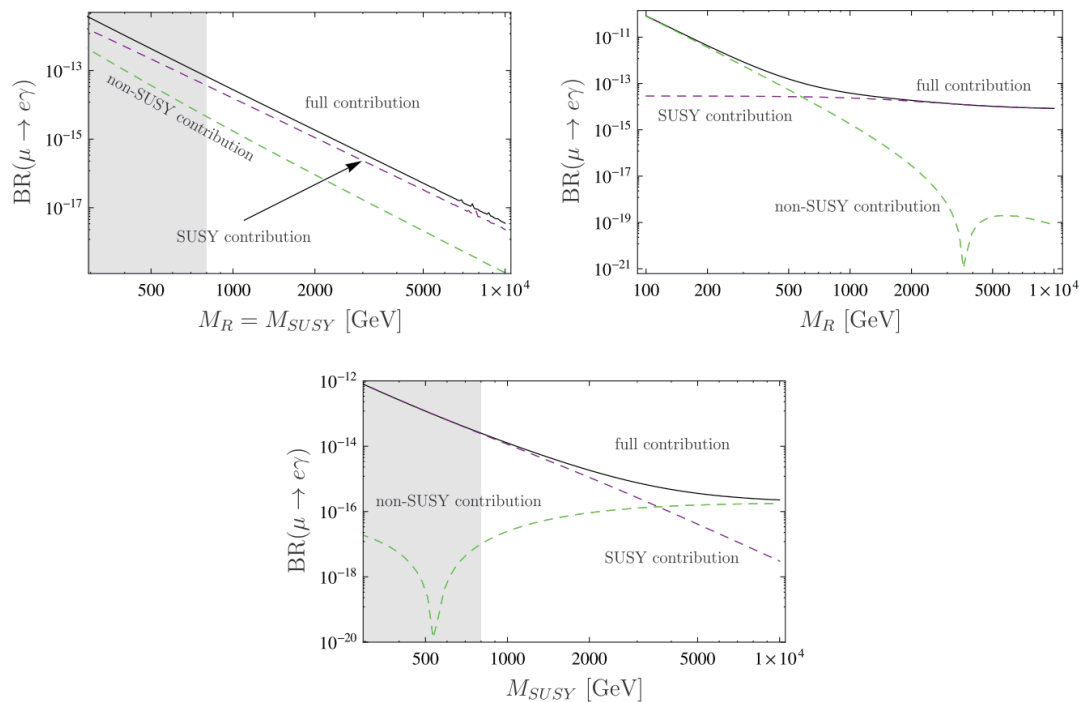


図 7.14 $BR(\mu \rightarrow e\gamma)$ を M_{SUSY}, M_R の関数としてプロットしたもの [67]。

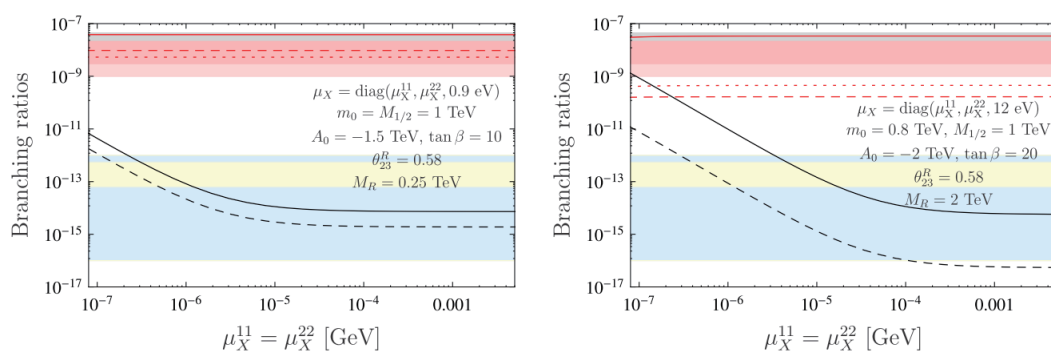


図 7.15 μ, τ の稀崩壊を μ_X の関数として描いたもの。対応する線はそれぞれ $Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)$ (赤の実線)、 $Br(\tau \rightarrow 3\mu)$ (赤の破線)、 $Br(\tau^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-)$ (赤の点線)、 $Br(\mu \rightarrow e\gamma)$ (黒の実線)、 $Br(\tau \rightarrow 3e)$ (黒の破線) である。また、灰、赤、黄、青のバンドはそれぞれ $\tau \rightarrow \mu\gamma, \tau \rightarrow 3\mu, \mu \rightarrow e\gamma, \mu \rightarrow 3e$ の現在と将来の到達精度を示している [67]。

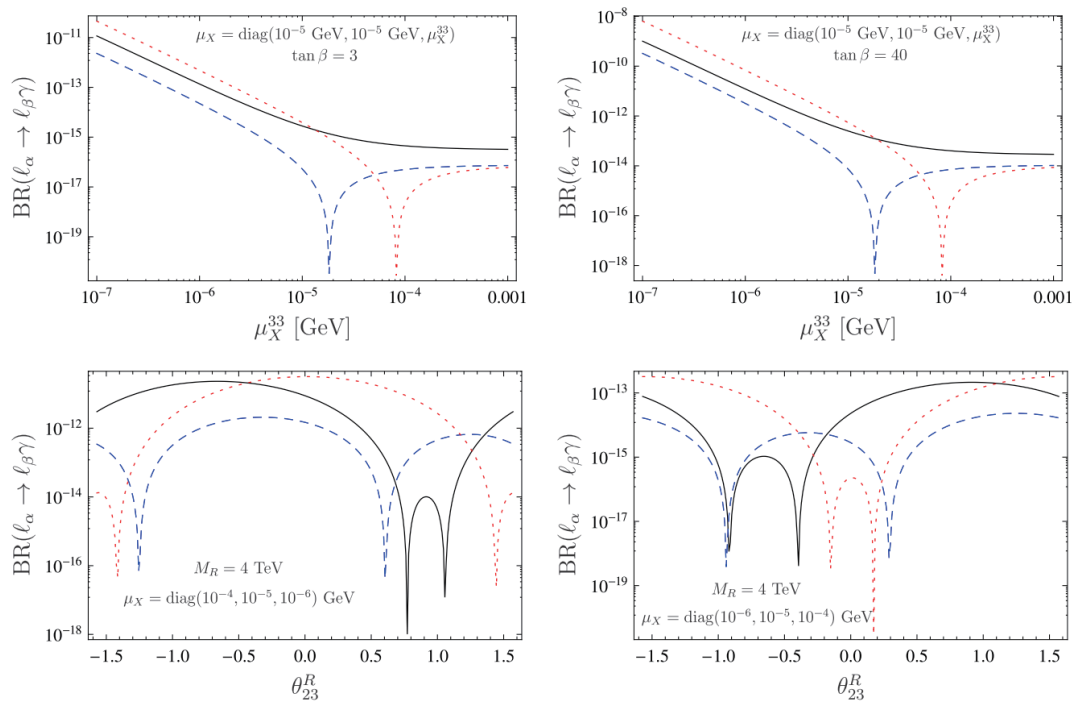


図 7.16 $\ell_\alpha \rightarrow \ell_\beta \gamma$ の $\mu_X^{33}, \theta_{23}^R$ 依存性である。対応する線はそれぞれ $BR(\mu \rightarrow e \gamma)$ が黒の実線であり、 $BR(\tau \rightarrow e \gamma)$ が青の破線、 $BR(\tau \rightarrow \mu \gamma)$ が赤の点線である [67]。

7.A.2 Non-SUSY Inverse Seesaw 模型 (レビュー)

• Enhanced $\mu^- - e$ conversion in nuclei in the inverse seesaw model [79]

文献 [78] の翌年に出版された論文が [79] である。この論文では、inverse seesaw 模型における cLFV 過程として $\mu - e$ 転換に限って議論を行っている。なお、[78] が Supersymmetric inverse seesaw なのに対してこの論文が non-SUSY なのは、 $\mu^- - e$ 転換ではダイアグラムが複雑になるため議論を簡単にする目的であると本文中で述べられている。また M_R, μ_X は共に縮退しており、 R も実対称行列であることを仮定して議論を行っている。Supersymmetric な場合の $\mu^- - e$ 転換については上記の文献 [67] が M_R, μ_X の構造を考えない範囲で網羅的に調べている。

• Lepton flavor violation and non-unitary lepton mixing in low-scale type-I seesaw [99]

この論文は 2011 年に出版されたもので、inverse seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れ、特に $l_i \rightarrow l_j \gamma$ 過程について、レプトンの荷電カレントにおける non-unitary 効果が与える影響を調べている。一般に low-scale seesaw において荷電カレントのレプトンの混合行列に non-unitary 効果が現れることが指摘されており、それが荷電レプトンフレーバーの破れに影響をあたえることが知られていた [89]。具体的なモデルとして inverse seesaw 模型における non-unitary 効果が cLFV に与える影響を調べたのがこの論文である。Inverse seesaw 模型における non-unitary 効果が与える影響については、荷電レプトンフレーバーの破れ以外にも色々と調べられており、例えば文献 [92–94] で扱われている。この論文に載っている図で本研究と関係がありそうなものを抜き出したのが図 7.17, 7.18, 7.19 である。この論文では、 M_R, μ_X が共に対角行列であるという、いわゆる”minimal flavor violation hypothesis”を仮定している。Minimal flavor violation hypothesis というのは、フレーバーが破れるのは通常の湯川結合だけであるというものであり、そのためこの仮定のもとでは inverse seesaw 模型におけるパラメータ M_R, μ_X はどちらも対角行列になる。

内容としては、non-unitary 効果の特徴づけるパラメータ η と $\mu \rightarrow e\gamma$ の関係を η を特徴づけるパラメータを動かすことでスキャンしている。条件としては $(m_D)_{ij} < 175\text{GeV}$ 、 R は特に重要視せずに条件をみたくような $0 - 2\pi$ の値を取る。ニュートリノ実験におけるパラメータに関しては 3σ の範囲でスキャンしている。また M_R, μ_X については

$$(\mu_X)_{ij} = v_\mu(1 + \epsilon_{ii}) \quad (7.A.3)$$

$$(M_R)_{ij} = v_M(1 + \epsilon_{ii}) \quad (7.A.4)$$

としており、 $|\epsilon| \sim 5 \times 10^{-1}$ である。

取りうる可能なパラメータ領域を示したことと、 η の非対角成分に対して実験の制限を課したことがこの論文の結果である。

7.A.3 まとめ

Inverse seesaw 模型における荷電レプトンフレーバーの破れの歴史は古く、その起源は 1980 年代後半にまで遡る。しかし、ニュートリノセクターにおけるパラメータの数が非常に多いために、 M_R や μ_X の構造まで考慮に入れた研究はなされていなかった。特に effective な Majorana 質量行列の構造について議論している論文は SUSY, non-SUSY 共に無いため、本研究ではその部分に着目してその効果を調べた。なお、inverse seesaw 以外の low-scale seesaw 模型も知られており、その荷電レプトンフレーバーの破れについても研究がなされている。ここではその詳細には触れないが、文献 [74] に supersymmetric low-scale seesaw の歴史的経緯が簡単にまとめられている。

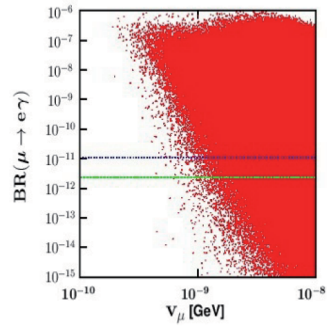


図 7.17 $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ とレプトン数を破るスケール v_μ の対比。青と緑の線は当時の実験の制限を表している。また、ニュートリノの質量階層性としては順階層性を仮定している [99]。

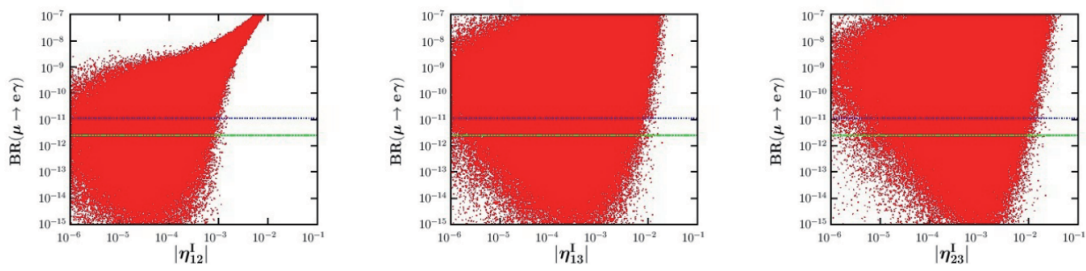


図 7.18 $\mu \rightarrow e\gamma$ を v_M を 1TeV で固定して、 v_μ を $10^{-10} - 10^{-8}\text{GeV}$ 、ニュートリノ実験のパラメータを 3σ でスキャンしたもの。順階層性 [99]。

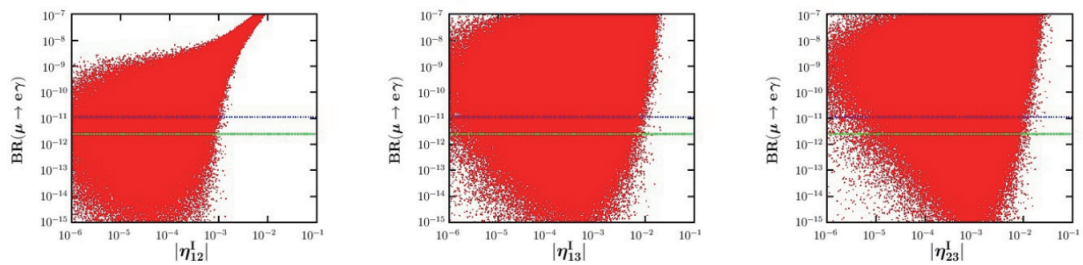


図 7.19 図 7.18 と同じ条件。逆階層性 [99]。

第 8 章

まとめ

本研究では ν MSSM を拡張した模型における荷電レプトンフレーバーの破れを調べた。拡張の方向は二種類あり 1 つがヒッグスセクターを拡張した ν NMSSM であり、もう 1 つがニュートリノセクターを拡張した supersymmetric inverse seesaw 模型である。

ν NMSSM 模型

ν NMSSM 模型では、cLFV を higgs mass と結びつけて考えることで、どのようなパラメータ領域が好まれるのか、 $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ が近い将来の実験で見られる可能性があるのかを調べた。GUT scale における boundary condition として MSSM-like semi-constrained NMSSM を仮定し、tadpole 条件で決めるパラメータとして (s, κ, m_S^2) 、 (s, A_λ, m_S^2) という 2 つの場合をそれぞれ CASE1, CASE2 として考えた。NMSSM は MSSM に比べて higgs mass を tree level で上げることができるという利点を持つが、それはあくまでも singlet との mixing を消すようにパラメータを調整した場合であって一般には成り立たず、むしろ higgs mass は減少する。MSSM-like な場合、higgs mass を大きくするような large λ かつ singlet との mixing を消すようなパラメータの調整を同時に行うことは難しい。そこで本論文では、small λ (~ 0.1) を仮定することで singlet とも mixing を小さくした場合を考えた。CASE1 に関しては、MSSM の場合と近い結果が得られた。ただ、SUSY scale の input である κ の大きさによって higgs mass が変化するために好まれるパラメータ領域が変化することを示した。一方 CASE2 に関しては、higgs mass に影響を与える κ が input ではなく tadpole 条件から決まるため、CASE1 の場合とはかなり異なるパラメータ領域があることを示した。cLFV に関して、我々は CASE1, CASE2 どちらの場合にも、 ν NMSSM 模型において SUSY mass scale が 4TeV 程度であっても、近い将来に観測可能ほど大きな $\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma)$ の値が予想される可能性があることを示した。

Supersymmetric inverse seesaw 模型

Supersymmetric inverse seesaw 模型における cLFV について、本研究では特に effective な majorana 質量行列の構造が $\ell_i \rightarrow \ell_j\gamma$ に与える影響を調べた。本研究が明らかにしたことは大きく 2 つある。

- Numerical Result 1 では、effective Majorana 質量 X と任意のニュートリノ湯川を決める対称行列 R をインプットとした場合を考えた。その場合、 M_R, μ_X のどちらか一方が縮退している場合、 X の非対角成分が SUSY, Non-SUSY ともにほとんど影響を与えないことを明らかにした。一方、 M_R, μ_X がともに非自明な構造をもつ場合には行列 V の影響を受けることを示した。どちらの場合にもニュートリノ湯川を決定する任意の対称行列 R の影響は μ_X が縮退していな限り現れる。
- Numerical Result 2 では、 Y_ν をインプットとした場合を考えた。その場合、effective な Majorana 質量行列 X と対称行列 R は共に一意に決まる。特に Y_ν が対角行列の場合には、SUSY contribution が $Y_\nu^\dagger Y_\nu$ に比例するために、その寄与が完全に消えてしまうが、一方 Non-SUSY contribution (W^-) につ

いては自明ではない。本研究では Y_ν を対角行列に取ったとしても X が一般に非対角成分を持ち、それが $\mu \rightarrow e\gamma$ に対して大きな寄与を与えることを明らかにした。

最後に、今後の展望について簡単にまとめる。本研究では、すべてのパラメータを実数と仮定して議論を行った。しかし実際には U_{MNS}, V, R などのユニタリ行列や複素対称行列には複素成分があり、それを考えた場合、議論は今回ほど簡単にはならない。その複素数の効果まで考えて、議論を展開することが必要となる。また、本研究では $\mu \rightarrow e\gamma$ に限って議論を行った。本研究のように Non-SUSY contribution が dominant な場合、他の cLFV 過程である $\mu \rightarrow 3e$ や $\mu - e$ conversion との換算は容易ではない。今後、 $\mu \rightarrow 3e$ や $\mu - e$ conversion は実験精度の向上が見込まれているため、これらに関しても effective Majorana 質量行列の非対角成分が与える影響を調べることが重要となる。

謝辞

5年間に渡り、貴重な時間を割いて辛抱強く御指導いただいた指導教官である日笠健一教授、論文執筆や研究に際してご尽力いただいた京都大学基礎物理学研究所の野村大輔助教に深くお礼申し上げます。スタッフ、先輩、同期、後輩、秘書さん、東北大学素粒子・宇宙理論研究室の皆様のおかげで非常に有意義な5年間を送ることが出来ました。博士論文執筆は、研究がなかなかうまくいかなかったり、直前になって結果に間違いがあることがあることに気付くなどなかなか苦しい思いもりましたが、なんとか形にすることが出来ました。そんな状況でも最後まで諦めずに頑張れたのは、周りの方々のおかげにほかなりません。また、東北大学国際高等教育院様には修士課程の時から研究教育院生として経済面での支援をしていただきました。そのおかげで金銭的な負担を感じることも無く5年間を過ごさせていただきました。さらに他分野の博士学生と接点を持つ機会をいただけたことで、研究に対する刺激を受けることも出来ました。本当にありがとうございました。そして最後に、いろいろと不安を感じさせてしまったことも多くあった中、それでも長い間学生をさせてくれた両親に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] H. P. Nilles, “Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics,” *Phys. Rept.* **110**, 1 (1984). doi:10.1016/0370-1573(84)90008-5
- [2] H. E. Haber and G. L. Kane, “The Search for Supersymmetry: Probing Physics Beyond the Standard Model,” *Phys. Rept.* **117**, 75 (1985). doi:10.1016/0370-1573(85)90051-1
- [3] S. P. Martin, “A Supersymmetry primer,” *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* **21**, 1 (2010) [*Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* **18**, 1 (1998)] [hep-ph/9709356].
- [4] I. J. R. Aitchison, “Supersymmetry and the MSSM: An Elementary introduction,” hep-ph/0505105.
- [5] J. D. Lykken, “Introduction to supersymmetry,” hep-th/9612114.
- [6] M. Drees, “An Introduction to supersymmetry,” hep-ph/9611409.
- [7] A. Bilal, “Introduction to supersymmetry,” hep-th/0101055.
- [8] K. Hikasa and Friends, “Supersymmetric Standard Model for Collider Physicists,” unpublished.
- [9] H. Murayama, “Supersymmetry phenomenology,” hep-ph/0002232.
- [10] H. E. Haber, “Introductory low-energy supersymmetry,” In *Boulder 1992, Proceedings, Recent directions in particle theory* 589-686, and Calif. Univ. Santa Cruz - SCIPP 92-033 (93/04,rec.Jun.) 98 p [hep-ph/9306207].
- [11] H. P. Nilles, “Phenomenological aspects of supersymmetry,” In *Leuven 1995, Proceedings, Gauge theories, applied supersymmetry, quantum gravity* 81-105, and Muenchen Tech. U. - TUM-TH-95-230 (95/11,rec.Nov.) 37 p [hep-ph/9511313].
- [12] H. Baer *et al.*, “Low-energy supersymmetry phenomenology,” hep-ph/9503479.
- [13] D. J. Castano, E. J. Piard and P. Ramond, “Renormalization group study of the Standard Model and its extensions. 2. The Minimal supersymmetric Standard Model,” *Phys. Rev. D* **49**, 4882 (1994) doi:10.1103/PhysRevD.49.4882 [hep-ph/9308335].
- [14] J. A. Bagger, “Weak scale supersymmetry: Theory and practice,” In *Boulder 1995, QCD and beyond* 109-159 [hep-ph/9604232].
- [15] M. Drees and S. P. Martin, “Implications of SUSY model building,” In *Barklow, T.L. (ed.) et al.: Electroweak symmetry breaking and new physics at the TeV scale* 146-215 [hep-ph/9504324].
- [16] C. Csaki, “The Minimal supersymmetric standard model (MSSM),” *Mod. Phys. Lett. A* **11**, 599 (1996) doi:10.1142/S021773239600062X [hep-ph/9606414].
- [17] G. 't Hooft, “Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking,” *NATO Sci. Ser. B* **59**, 135 (1980).
- [18] Y. Okada, M. Yamaguchi and T. Yanagida, “Upper bound of the lightest Higgs boson mass in the minimal supersymmetric standard model,” *Prog. Theor. Phys.* **85**, 1 (1991). doi:10.1143/PTP.85.1
- [19] H. E. Haber and R. Hempfling, “Can the mass of the lightest Higgs boson of the minimal supersymmetric model be larger than $m(Z)$?” *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1815 (1991).

- doi:10.1103/PhysRevLett.66.1815
- [20] J. R. Ellis, G. Ridolfi and F. Zwirner, “Radiative corrections to the masses of supersymmetric Higgs bosons,” *Phys. Lett. B* **257**, 83 (1991). doi:10.1016/0370-2693(91)90863-L
- [21] M. Carena, J. R. Espinosa, M. Quiros and C. E. M. Wagner, “Analytical expressions for radiatively corrected Higgs masses and couplings in the MSSM,” *Phys. Lett. B* **355**, 209 (1995) doi:10.1016/0370-2693(95)00694-G [hep-ph/9504316].
- [22] M. Carena, M. Quiros and C. E. M. Wagner, “Effective potential methods and the Higgs mass spectrum in the MSSM,” *Nucl. Phys. B* **461**, 407 (1996) doi:10.1016/0550-3213(95)00665-6 [hep-ph/9508343].
- [23] M. Carena, S. Gori, N. R. Shah and C. E. M. Wagner, “A 125 GeV SM-like Higgs in the MSSM and the $\gamma\gamma$ rate,” *JHEP* **1203**, 014 (2012) doi:10.1007/JHEP03(2012)014 [arXiv:1112.3336 [hep-ph]].
- [24] E. P. Hincks and B. Pontecorvo, “Search for gamma-radiation in the 2.2-microsecond meson decay process,” *Phys. Rev.* **73**, 257 (1948). doi:10.1103/PhysRev.73.257
- [25] R. H. Bernstein and P. S. Cooper, “Charged Lepton Flavor Violation: An Experimenter’s Guide,” *Phys. Rept.* **532**, 27 (2013) doi:10.1016/j.physrep.2013.07.002 [arXiv:1307.5787 [hep-ex]].
- [26] G. Signorelli, “Charged Lepton Flavor Violation Experiments,” arXiv:1307.8346 [hep-ex].
- [27] A. de Gouvea and P. Vogel, “Lepton Flavor and Number Conservation, and Physics Beyond the Standard Model,” *Prog. Part. Nucl. Phys.* **71**, 75 (2013) doi:10.1016/j.pnpnp.2013.03.006 [arXiv:1303.4097 [hep-ph]].
- [28] K. A. Olive *et al.* [Particle Data Group Collaboration], “Review of Particle Physics,” *Chin. Phys. C* **38**, 090001 (2014).
- [29] T. P. Cheng and L. F. Li, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 381 (1977).
- [30] S. T. Petcov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **25**, 340 (1977) [*Yad. Fiz.* **25**, 641 (1977)] [Erratum-ibid. **25**, 698 (1977)] [Erratum-ibid. **25**, 1336 (1977)].
- [31] S. M. Bilenky, S. T. Petcov and B. Pontecorvo, *Phys. Lett. B* **67**, 309 (1977).
- [32] J. Adam *et al.* [MEG Collaboration], “New constraint on the existence of the $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$ decay,” *Phys. Rev. Lett.* **110**, 201801 (2013) [arXiv:1303.0754 [hep-ex]].
- [33] A. M. Baldini *et al.*, “MEG Upgrade Proposal,” arXiv:1301.7225 [physics.ins-det].
- [34] T. Aushev *et al.*, “Physics at Super B Factory,” arXiv:1002.5012 [hep-ex].
- [35] U. Bellgardt *et al.* [SINDRUM Collaboration], “Search for the Decay $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$,” *Nucl. Phys. B* **299**, 1 (1988).
- [36] A. Blondel *et al.*, “Research Proposal for an Experiment to Search for the Decay $\mu \rightarrow eee$,” arXiv:1301.6113 [physics.ins-det].
- [37] PRISM/PRIME working group collaboration, “An experimental search for a $\mu - e$ conversion at sensitivity of the order of 10^{-18} with a highly intense muon source: PRISM,” <http://j-parc.jp/researcher/Hadron/en/pac0606/pdf/p20-Kuno.pdf>
- [38] B. Aubert *et al.* [BaBar Collaboration], “Searches for Lepton Flavor Violation in the Decays $\tau^\pm \rightarrow e^\pm\gamma$ and $\tau^\pm \rightarrow \mu^\pm\gamma$,” *Phys. Rev. Lett.* **104**, 021802 (2010) [arXiv:0908.2381 [hep-ex]].
- [39] K. Hayasaka *et al.*, “Search for Lepton Flavor Violating Tau Decays into Three Leptons with 719 Million Produced Tau+Tau- Pairs,” *Phys. Lett. B* **687**, 139 (2010) [arXiv:1001.3221 [hep-ex]].
- [40] C. Dohmen *et al.* [SINDRUM II Collaboration], “Test of lepton flavor conservation in $\mu \rightarrow e$ conversion on titanium,” *Phys. Lett. B* **317**, 631 (1993).

- [41] W. H. Bertl *et al.* [SINDRUM II Collaboration], “A Search for muon to electron conversion in muonic gold,” *Eur. Phys. J. C* **47**, 337 (2006).
- [42] M. Aoki [DeeMe Collaboration], “An experimental search for muon-electron conversion in nuclear field at sensitivity of 10^{-14} with a pulsed proton beam,” *AIP Conf. Proc.* **1441**, 599 (2012).
- [43] A. J. Bevan *et al.* [BaBar and Belle Collaborations], “The Physics of the B Factories,” *Eur. Phys. J. C* **74**, 3026 (2014) doi:10.1140/epjc/s10052-014-3026-9 [arXiv:1406.6311 [hep-ex]].
- [44] R. Aaij *et al.* [LHCb Collaboration], “Searches for violation of lepton flavour and baryon number in tau lepton decays at LHCb,” *Phys. Lett. B* **724**, 36 (2013) doi:10.1016/j.physletb.2013.05.063 [arXiv:1304.4518 [hep-ex]].
- [45] R. M. Carey *et al.* [Mu2e Collaboration], “Proposal to search for $\mu^- N \rightarrow e^- N$ with a single event sensitivity below 10^{-16} ,” FERMILAB-PROPOSAL-0973.
- [46] D. Glenzinski [Mu2e Collaboration], “The Mu2e Experiment at Fermilab,” *AIP Conf. Proc.* **1222**, 383 (2010). doi:10.1063/1.3399348
- [47] R. J. Abrams *et al.* [Mu2e Collaboration], “Mu2e Conceptual Design Report,” arXiv:1211.7019 [physics.ins-det].
- [48] M. Aoki [DeeMe Collaboration], “A new idea for an experimental search for nu-e conversion,” *PoS ICHEP* **2010**, 279 (2010).
- [49] Y. G. Cui *et al.* [COMET Collaboration], “Conceptual design report for experimental search for lepton flavor violating mu- - e- conversion at sensitivity of 10^{-16} with a slow-extracted bunched proton beam (COMET),” KEK-2009-10.
- [50] Y. Kuno [COMET Collaboration], “A search for muon-to-electron conversion at J-PARC: The COMET experiment,” *PTEP* **2013**, 022C01 (2013). doi:10.1093/ptep/pts089
- [51] W. Porod, F. Staub and A. Vicente, “A Flavor Kit for BSM models,” *Eur. Phys. J. C* **74**, no. 8, 2992 (2014) doi:10.1140/epjc/s10052-014-2992-2 [arXiv:1405.1434 [hep-ph]].
- [52] J. Aysto *et al.*, “Physics with low-energy muons at a neutrino factory complex,” CERN Yellow Report CERN-2004-002, pp.259-306 doi:10.5170/CERN-2004-002.259 [hep-ph/0109217].
- [53] 中津川 洋平 “荷電レプトンフレーバー非保存現象探索の実験手法 $\mu \rightarrow e\gamma$ 探索と $\mu N \rightarrow eN$ 探索の比較,” http://nasubi.hep.sci.osaka-u.ac.jp/deeme/internal-documents/technical-notes/deeme-tm-meg-and_mec.pdf
- [54] R. Kitano, M. Koike and Y. Okada, “Detailed calculation of lepton flavor violating muon electron conversion rate for various nuclei,” *Phys. Rev. D* **66**, 096002 (2002) [Erratum-ibid. *D* **76**, 059902 (2007)] [hep-ph/0203110].
- [55] K. Nakamura and D. Nomura, “Charged Lepton Flavor Violation in the Semi-Constrained NMSSM with Right-Handed Neutrinos,” *Phys. Lett. B* **746**, 396 (2015) doi:10.1016/j.physletb.2015.05.028 [arXiv:1501.05058 [hep-ph]].
- [56] U. Ellwanger, C. Hugonie and A. M. Teixeira, “The Next-to-Minimal Supersymmetric Standard Model,” *Phys. Rept.* **496**, 1 (2010)
- [57] I. Gogoladze, N. Okada and Q. Shafi, “NMSSM and Seesaw Physics at LHC,” *Phys. Lett. B* **672**, 235 (2009) [arXiv:0809.0703 [hep-ph]].
- [58] T. Blazek and S. F. King, “Muon anomalous magnetic moment and $\tau \rightarrow \mu\gamma$ in a realistic string inspired model of neutrino masses,” *Phys. Lett. B* **518**, 109 (2001)
- [59] J. R. Ellis, J. Hisano, M. Raidal and Y. Shimizu, “Lepton electric dipole moments in nondegenerate

- supersymmetric seesaw models,” *Phys. Lett. B* **528**, 86 (2002) doi:10.1016/S0370-2693(02)01197-8 [hep-ph/0111324].
- [60] A. Ibarra and C. Simonetto, “Probing Supersymmetric Leptogenesis with $\mu \rightarrow e\gamma$,” *JHEP* **0908**, 113 (2009)
- [61] R. Alonso, G. Isidori, L. Merlo, L. A. Munoz and E. Nardi, “Minimal flavour violation extensions of the seesaw,” *JHEP* **1106**, 037 (2011)
- [62] J. h. Park, “Lepton flavour violation from right-handed neutrino thresholds,” *Phys. Rev. D* **89**, 095005 (2014)
- [63] F. Borzumati and A. Masiero, “Large Muon and electron Number Violations in Supergravity Theories”, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 961 (1986).
- [64] J. Hisano, T. Moroi, K. Tobe, M. Yamaguchi and T. Yanagida, “Lepton flavor violation in the supersymmetric standard model with seesaw induced neutrino masses”, *Phys. Lett. B* **357**, 579 (1995)
- [65] J. Hisano, T. Moroi, K. Tobe and M. Yamaguchi, “Lepton flavor violation via right-handed neutrino Yukawa couplings in supersymmetric standard model,” *Phys. Rev. D* **53**, 2442 (1996) doi:10.1103/PhysRevD.53.2442 [hep-ph/9510309].
- [66] E. Arganda and M. J. Herrero, “Testing supersymmetry with lepton flavor violating tau and mu decays,” *Phys. Rev. D* **73**, 055003 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.73.055003 [hep-ph/0510405].
- [67] A. Abada, M. E. Krauss, W. Porod, F. Staub, A. Vicente and C. Weiland, “Lepton flavor violation in low-scale seesaw models: SUSY and non-SUSY contributions,” *JHEP* **1411**, 048 (2014) [arXiv:1408.0138 [hep-ph]].
- [68] P. Minkowski, “ $\mu \rightarrow e\gamma$ at a Rate of One Out of 1-Billion Muon Decays?,” *Phys. Lett. B* **67**, 421 (1977).
- [69] T. Yanagida, “Horizontal Symmetry And Masses Of Neutrinos,” *Conf. Proc. C* **7902131**, 95 (1979).
- [70] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, “Complex Spinors and Unified Theories,” *Conf. Proc. C* **790927**, 315 (1979)
- [71] R. N. Mohapatra, “Mechanism for Understanding Small Neutrino Mass in Superstring Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **56**, 561 (1986).
- [72] R. N. Mohapatra and J. W. F. Valle, “Neutrino Mass and Baryon Number Nonconservation in Superstring Models,” *Phys. Rev. D* **34**, 1642 (1986).
- [73] J. Bernabeu, A. Santamaria, J. Vidal, A. Mendez and J. W. F. Valle, “Lepton Flavor Nonconservation at High-Energies in a Superstring Inspired Standard Model,” *Phys. Lett. B* **187** (1987) 303.
- [74] A. Vicente, “Lepton flavor violation beyond the MSSM,” *Adv. High Energy Phys.* **2015**, 686572 (2015) [arXiv:1503.08622 [hep-ph]].
- [75] M. Hirsch, T. Kernreiter, J. C. Romao and A. Villanova del Moral, “Minimal Supersymmetric Inverse Seesaw: Neutrino masses, lepton flavour violation and LHC phenomenology,” *JHEP* **1001**, 103 (2010) [arXiv:0910.2435 [hep-ph]].
- [76] M. C. Gonzalez-Garcia and J. W. F. Valle, “Fast Decaying Neutrinos and Observable Flavor Violation in a New Class of Majoron Models,” *Phys. Lett. B* **216**, 360 (1989).
- [77] A. Ilakovac and A. Pilaftsis, “Flavor violating charged lepton decays in seesaw-type models,” *Nucl. Phys. B* **437**, 491 (1995) [hep-ph/9403398].
- [78] F. Deppisch and J. W. F. Valle, “Enhanced lepton flavor violation in the supersymmetric inverse seesaw model,” *Phys. Rev. D* **72**, 036001 (2005) [hep-ph/0406040].

- [79] F. Deppisch, T. S. Kosmas and J. W. F. Valle, “Enhanced $\mu^- - e^-$ conversion in nuclei in the inverse seesaw model,” Nucl. Phys. B **752**, 80 (2006) [hep-ph/0512360].
- [80] D. N. Dinh, A. Ibarra, E. Molinaro and S. T. Petcov, “The $\mu - e$ Conversion in Nuclei, $\mu \rightarrow e\gamma$, $\mu \rightarrow 3e$ Decays and TeV Scale See-Saw Scenarios of Neutrino Mass Generation,” JHEP **1208**, 125 (2012) [JHEP **1309**, 023 (2013)] [arXiv:1205.4671 [hep-ph]].
- [81] A. Ilakovac and A. Pilaftsis, “Supersymmetric Lepton Flavour Violation in Low-Scale Seesaw Models,” Phys. Rev. D **80**, 091902 (2009) [arXiv:0904.2381 [hep-ph]].
- [82] R. Alonso, M. Dhen, M. B. Gavela and T. Hambye, “Muon conversion to electron in nuclei in type-I seesaw models,” JHEP **1301**, 118 (2013) [arXiv:1209.2679 [hep-ph]].
- [83] A. Ilakovac, A. Pilaftsis and L. Popov, “Charged lepton flavor violation in supersymmetric low-scale seesaw models,” Phys. Rev. D **87**, no. 5, 053014 (2013) [arXiv:1212.5939 [hep-ph]].
- [84] A. Abada, D. Das and C. Weiland, “Enhanced Higgs Mediated Lepton Flavour Violating Processes in the Supersymmetric Inverse Seesaw Model,” JHEP **1203**, 100 (2012) [arXiv:1111.5836 [hep-ph]].
- [85] C. H. Lee, P. S. Bhupal Dev and R. N. Mohapatra, “Natural TeV-scale left-right seesaw mechanism for neutrinos and experimental tests,” Phys. Rev. D **88**, no. 9, 093010 (2013) [arXiv:1309.0774 [hep-ph]].
- [86] M. E. Krauss, W. Porod, F. Staub, A. Abada, A. Vicente and C. Weiland, “Decoupling of heavy sneutrinos in low-scale seesaw models,” Phys. Rev. D **90**, no. 1, 013008 (2014) [arXiv:1312.5318 [hep-ph]].
- [87] M. Hirsch, F. Staub and A. Vicente, “Enhancing $l_i \rightarrow 3l_j$ with the Z^0 -penguin,” Phys. Rev. D **85**, 113013 (2012) [Phys. Rev. D **91**, no. 5, 059902 (2015)] [arXiv:1202.1825 [hep-ph]].
- [88] J. A. Casas and A. Ibarra, “Oscillating neutrinos and $\mu \rightarrow e, \gamma$,” Nucl. Phys. B **618**, 171 (2001) [hep-ph/0103065].
- [89] S. Antusch, C. Biggio, E. Fernandez-Martinez, M. B. Gavela and J. Lopez-Pavon, “Unitarity of the Leptonic Mixing Matrix,” JHEP **0610**, 084 (2006) [hep-ph/0607020].
- [90] A. Ibarra, E. Molinaro and S. T. Petcov, “Low Energy Signatures of the TeV Scale See-Saw Mechanism,” Phys. Rev. D **84**, 013005 (2011) [arXiv:1103.6217 [hep-ph]].
- [91] S. Antusch, J. P. Baumann and E. Fernandez-Martinez, “Non-Standard Neutrino Interactions with Matter from Physics Beyond the Standard Model,” Nucl. Phys. B **810**, 369 (2009) [arXiv:0807.1003 [hep-ph]].
- [92] M. Malinsky, T. Ohlsson and H. Zhang, Phys. Rev. D **79**, 073009 (2009) doi:10.1103/PhysRevD.79.073009 [arXiv:0903.1961 [hep-ph]].
- [93] M. Malinsky, T. Ohlsson, Z. z. Xing and H. Zhang, “Non-unitary neutrino mixing and CP violation in the minimal inverse seesaw model,” Phys. Lett. B **679**, 242 (2009) [arXiv:0905.2889 [hep-ph]].
- [94] W. Rodejohann, “On Non-Unitary Lepton Mixing and Neutrino Mass Observables,” Phys. Lett. B **684**, 40 (2010) [arXiv:0912.3388 [hep-ph]].
- [95] W. Abdallah, A. Awad, S. Khalil and H. Okada, “Muon Anomalous Magnetic Moment and $\mu \rightarrow e\gamma$ in B-L Model with Inverse Seesaw,” Eur. Phys. J. C **72**, 2108 (2012) [arXiv:1105.1047 [hep-ph]].
- [96] K. S. Sun, T. F. Feng, G. H. Luo, X. Y. Yang and J. B. Chen, Mod. Phys. Lett. A **28**, 1350151 (2013) [arXiv:1312.2073 [hep-ph]].
- [97] J. Schechter and J. W. F. Valle, “Neutrino Masses in SU(2) x U(1) Theories,” Phys. Rev. D **22**, 2227 (1980). doi:10.1103/PhysRevD.22.2227

-
- [98] J. Schechter and J. W. F. Valle, “Neutrino Decay and Spontaneous Violation of Lepton Number,” *Phys. Rev. D* **25**, 774 (1982). doi:10.1103/PhysRevD.25.774
- [99] D. V. Forero, S. Morisi, M. Tortola and J. W. F. Valle, “Lepton flavor violation and non-unitary lepton mixing in low-scale type-I seesaw,” *JHEP* **1109**, 142 (2011) [arXiv:1107.6009 [hep-ph]].
- [100] Y. Grossman and H. E. Haber, “Sneutrino mixing phenomena,” *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3438 (1997) doi:10.1103/PhysRevLett.78.3438 [hep-ph/9702421].
- [101] W. Porod, F. Staub and A. Vicente, “A Flavor Kit for BSM models,” *Eur. Phys. J. C* **74**, no. 8, 2992 (2014) [arXiv:1405.1434 [hep-ph]].
- [102] F. Staub, “Sarah,” arXiv:0806.0538 [hep-ph].
- [103] F. Staub, “From Superpotential to Model Files for FeynArts and CalcHep/CompHep,” *Comput. Phys. Commun.* **181**, 1077 (2010) [arXiv:0909.2863 [hep-ph]].
- [104] F. Staub, “Automatic Calculation of supersymmetric Renormalization Group Equations and Self Energies,” *Comput. Phys. Commun.* **182**, 808 (2011) [arXiv:1002.0840 [hep-ph]].
- [105] F. Staub, “SARAH 3.2: Dirac Gauginos, UFO output, and more,” *Comput. Phys. Commun.* **184**, 1792 (2013) [arXiv:1207.0906 [hep-ph]].
- [106] F. Staub, “SARAH 4 : A tool for (not only SUSY) model builders,” *Comput. Phys. Commun.* **185**, 1773 (2014) [arXiv:1309.7223 [hep-ph]].
- [107] W. Porod, “SPHeno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at $e^+ e^-$ colliders,” *Comput. Phys. Commun.* **153**, 275 (2003) [hep-ph/0301101].
- [108] W. Porod and F. Staub, “SPHeno 3.1: Extensions including flavour, CP-phases and models beyond the MSSM,” *Comput. Phys. Commun.* **183**, 2458 (2012) [arXiv:1104.1573 [hep-ph]].
- [109] F. Staub, “Exploring new models in all detail with SARAH,” *Adv. High Energy Phys.* **2015**, 840780 (2015) [arXiv:1503.04200 [hep-ph]].
- [110] See, for example, J. Hisano and D. Nomura, “Solar and atmospheric neutrino oscillations and lepton flavor violation in supersymmetric models with the right-handed neutrinos,” *Phys. Rev. D* **59**, 116005 (1999) [hep-ph/9810479].
- S. Davidson and A. Ibarra, “Determining seesaw parameters from weak scale measurements?,” *JHEP* **0109**, 013 (2001) [hep-ph/0104076].
- S. Baek, T. Goto, Y. Okada and K. i. Okumura, “Muon anomalous magnetic moment, lepton flavor violation, and flavor changing neutral current processes in SUSY GUT with right-handed neutrino,” *Phys. Rev. D* **64**, 095001 (2001) [hep-ph/0104146].
- F. Deppisch, H. Pas, A. Redelbach, R. Ruckl and Y. Shimizu, “Probing the Majorana mass scale of right-handed neutrinos in mSUGRA,” *Eur. Phys. J. C* **28**, 365 (2003) [hep-ph/0206122].
- S. Pascoli, S. T. Petcov and W. Rodejohann, “On the connection of leptogenesis with low-energy CP violation and LFV charged lepton decays,” *Phys. Rev. D* **68**, 093007 (2003) [hep-ph/0302054].
- S. T. Petcov, S. Profumo, Y. Takanishi and C. E. Yaguna, “Charged lepton flavor violating decays: Leading logarithmic approximation versus full RG results,” *Nucl. Phys. B* **676**, 453 (2004) [hep-ph/0306195].
- A. Masiero, S. K. Vempati and O. Vives, “Massive neutrinos and flavor violation,” *New J. Phys.* **6**, 202 (2004) [hep-ph/0407325].
- A. Brignole and A. Rossi, “Anatomy and phenomenology of mu-tau lepton flavor violation in the

- MSSM,” Nucl. Phys. B **701**, 3 (2004) [hep-ph/0404211].
- E. Arganda and M. J. Herrero, “Testing supersymmetry with lepton flavor violating τ and μ decays,” Phys. Rev. D **73**, 055003 (2006) [hep-ph/0510405].
- J. Hisano, M. Nagai, P. Paradisi and Y. Shimizu, “Waiting for $\mu \rightarrow e\gamma$ from the MEG experiment,” JHEP **0912**, 030 (2009) [arXiv:0904.2080 [hep-ph]].
- M. Cannoni, J. Ellis, M. E. Gomez and S. Lola, “Neutrino textures and charged lepton flavour violation in light of θ_{13} , MEG and LHC data,” Phys. Rev. D **88**, no. 7, 075005 (2013) [arXiv:1301.6002 [hep-ph]].
- T. Moroi, M. Nagai and T. T. Yanagida, “Lepton Flavor Violations in High-Scale SUSY with Right-Handed Neutrinos,” Phys. Lett. B **728**, 342 (2014) [arXiv:1305.7357 [hep-ph]].
- J. Sato and M. Yamanaka, “A way to crosscheck μ - e conversion in the case of no signals of $\mu \rightarrow e\gamma$ and $\mu \rightarrow 3e$,” arXiv:1409.1697 [hep-ph].
- T. Goto, Y. Okada, T. Shindou, M. Tanaka and R. Watanabe, “Lepton flavor violation in the supersymmetric seesaw model after the LHC 8 TeV run,” arXiv:1412.2530 [hep-ph].