氏　名・(本籍)	竹崎正道 (たけ さき まさ みち)
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第75号
学位授与年月日	昭和40年7月21日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和33年3月 東北大学大学院理学研究科修士課程修了
学位論文題目	On the repesentation theory of operator algebras (作用素環の表現論について)
学位審査委員	(主査) 教授　深宮政範　教授　洲之内源一郎 教授　淡中忠郎

論文目次

論　文　内　容　要　旨

序　論

ヒルベルト空間上の作用素環を公理論的取り扱いにより研究するとき，それの空間への作用はその表現として把握される。種々の表現を考えることは，たとえそれが特定の空間上の作用素環にせよ，非常に重要であつて，これが表現論と呼ばれるものである。

作用素環は今日 C^*—代数と von Neumann 代数の二つのカテゴリーにわけて研究されており，前者は後者を含んでいるが，その研究方法に於て極めて大きな差異がある。著者は第1章で von Neumann 代数の表現論を，第II章で C^*—代数のそれを研究した。

特に，von Neumann 代数の表現については，その連続性をおもに取り上げ，C^*—代数のそれについては積分的直和分解の問題を研究した。

第1章　von Neumann 代数の表現の位相的性質

§1.　作用素環の共役空間

C^*—代数 A の第二共役空間としての von Neumann 代数を $\widetilde{A}$ で表し，A の汎被覆代数と呼ぶ。

定　理　C^*—代数Aについて，その共役空間 A^* の左側（右側）不変閉部分空間 V と $\widetilde{A}$ の弱閉左（右）イデアル m とは

$$\mathfrak{m} = V^0,\quad V = \mathfrak{m}^0$$

により1対1に対応する。特に，A が von Neumann 代数ならば上の対応は A の前共役空間 A_* の左側（右側）不変閉部分空間と A の弱閉左（右）イデアルの間の対応を与える。

定　義　von Neumann 代数 M 上の正汎函数 φ が $\psi \leqq \varphi$ となるような0でない正規正汎函数 ψ を持たないとき，φ は特異であるという。特異正汎函数の一次結合を特異汎函数と呼び，その全体を $M_*^\perp$ と表す。

そうすると測度の絶対連続部分と特異部分への Lebesgue 分解に対応して次の結果が得られる。

定　理　von Neumann 代数 M の共役空間 M^* の左側（右側）不変閉部分空間 V は

$$V = (V \cap M_*) \oplus_{l^1} (V \cap M_*^\perp)$$

と正規部分と特異部分の l_1 一直和に分解される。さらに，$V \cap M_*$ および $V \cap M_*^\perp$ は $\widetilde{M}$ の中心射影 z_0 により

$$V \cap M_* = L_{z_0} V,\quad V \cap M_*^\perp = (I - L_{z_0}) V$$

と表わされる。そして，この z_0 は V とは独立に決る。

von Neumann 代数の共役空間の分解に対応して，von Neumann 代数の表現の分解が得られる。

定　義　von Neumann 代数 M から von Neumann 代数 N への有界線型写像 θ が ${}^t\theta(N_*) \subset M_*^\perp$ のとき θ は特異であるという。M の表現 π が特異であるというのは，π を M から π の表現空間上の全作用素代数 B への写像として特異なことを意味する。

定　理　von Neumann 代数 M の表現 π は $\pi(M)$ の弱閉包の中心射影 z_0 により

$$\pi_1(x) = \pi(x) z_0,\quad \pi_2(x) = \pi(x)(1 - z_0)\quad x \in M$$

とおくと，π_1 が正規になり π_2 が特異になるように一意に分解される。

この π_1 と π_2 をそれぞれ π の正規成分，特異成分というが，π の連続性を調べるためには，π_2 が0であるか否かを調べれば良いことになる。この分解は後に富山氏に上り一般の有界線型写像へ拡張された。

§ 2　von Neumann代数の特異正汎函数

定　理　von Neumann代数M上の正汎函数φが特異であるための必要十分条件はMの各射影$e \fallingdotseq 0$に対して$e \geqq f \fallingdotseq 0$なる射影$f$が方程式$\langle f, \varphi \rangle = 0$の根として存在することである。これを可換な場合に適用すると

系　可換von Neumann代数A上の正汎函数φが特異であるための必要十分条件はφにより誘導されるAのspectrum空間の測度μ_φの台がnon－denseになることである。

定　理　σ－有限型von Neumann代数MとNについてMからNへの忠実な正定値線型写像θに対して，Mの射影$e \fallingdotseq 0$がeMe上でθが正規になるように存在する。そしてθの正規成分θ_1は忠実でその特異成分は忠実ではない。

§ 3　von Neumann代数の可分表現の連続性

J. FeldmanとJ. M. G. Fellは1957年に，II_1型因子および真無限型AW^*－代数の可分な表現は完全加法的なことを示し，さらに「有限I型成分をもたないvon Neumann代数の可分表現は連続にならないか」という問題を提起したが，われわれの方法を適用すれば彼等の結果に別証明を与えると同時に，その残された部分をも肯定的に解決することが出来る。

定　理　有限I型の直和成分を有しないvon Neumann代数の可分表現は連続である。

これの証明は，前節までの表現の分解を使つて，その特異成分が0でなければ必然的に非可分なことを示すことによつて示される。

第II章　C^*－代数の表現とその積分的直和分解

§ 1　NGCR－代数の表現に伴う或る現象

C^*－代数の表現については，そのunitary同値性或はunitary擬同値性は最も基本的概念であり，それの判定条件を調べることは重要である。有限次元のとき或はGCR－代数のときのように，その核により判定することが先づ考えられるが，その方法は次に見る如く適用出来ないことを示した。

定　理　可分NGCR－代数Aにはi_∞型因子表現（$i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$）の族$\{\pi_\gamma^s ; \gamma \in \Gamma, s \in S\}$が次の条件を満すように存在する。

各$s \in S$に対してπ_γ^sと$\pi_{\gamma'}^s$は同一核をもち，$\gamma \fallingdotseq \gamma'$ならば互に素である。また各$\gamma \in \Gamma$に対して$\sum_{s \in S} \oplus \pi_\gamma^s$は$A$の忠実な表現で，$\Gamma$の濃度は少くも連続の濃度$c$以上である。

§ 2　C^*－代数の表現の積分的直和分解とそれに附随した対角型代数

本節で扱うC^*－代数は凡て可分であり，von Neumann代数は忠実な可分表現をもつものとする。

C^*－代数Bの表現φを$\varphi = \int_\Gamma^\oplus \varphi(\gamma) d\mu(\gamma)$と分解した時の成分$\{\varphi(\gamma)\}$間のunitary同値性は何により決定されたかについて調べた。

von Neumann代数Mの可換von Neumann部分代数AはStandard measure space (Γ, μ)により$A = L^\infty(\Gamma, \mu)$と表わされる。$M$の忠実な正規表現$\pi$による像$M_\pi$の交換子代数を$M_\pi'$とする。表現空間は$H_\pi$は$\pi(A)$に関して

$$H_\pi = \int_\Gamma^\oplus H_\pi(\gamma)\, d\mu(\gamma)$$

と分解され，$\pi(A)$はその対角型代数となり$\pi(A)'$の作用素は凡て分解可能である。$\mathcal{A}$をM_π'の弱稠密可分C^*－部分代数とすると，各$x \in \mathcal{A}$は

$$x = \int_\Gamma^\oplus x(\gamma)\, d\mu(\gamma), \quad \|x\| = \mathrm{ess.\,sup}\, \|x(\gamma)\|$$

と分解されるが，$\mathcal{A}$の可分性により写像

$$\varphi_\gamma : x \in \mathcal{A} \to x(\gamma) \in B(H_\pi(\gamma))$$

が$\mathcal{A}$の表現となるように各$x\in\mathcal{A}$のγ一成分を選ぶことが出来る。AがMの極大可換部分代数ならば殆ど凡てのγに対しφ_γは既約になることが知られている。Mの可換部分代数A_1，A_2が与えられたとき，Mの表現πに対してπ（A_1）とπ（A_2）を基準として上と同様の分解を行つて

$$H_\pi=\int_{\Gamma_i}^{\oplus}H_\pi^i(\gamma_i)\,d\mu_i(\gamma_i),\quad A_i=L^\infty(\Gamma_i,\ \mu_i),\quad i=1,\ 2$$

各$x\in\mathcal{A}$を

$$x=\int_{\Gamma_i}^{\oplus}\varphi_{\gamma_i}^i(x)\,d\mu_i(\gamma_i)\quad i=1,\ 2$$

と分解する。$M,\ A_1,\ A_2,\ \pi,\ \mathcal{A}\ \Phi^1=\{\varphi_{\gamma_1}^1\}$及び$\Phi^2=\{\varphi_{\gamma_2}^2\}$によつて決定される$\Gamma_1\times\Gamma_2$の関係$\mathcal{R}_{A_1,\ A_2}^{M,\ \pi\ \mathcal{A},\ \Phi^1,\ \Phi^2}$を

$$\mathcal{R}_{A_1,\ A_2}^{M,\ \pi,\ \mathcal{A},\ \Phi^1,\ \Phi^2}(\gamma_1,\ \gamma_2)\iff\varphi_{\gamma_1}^1\simeq\varphi_{\gamma_2}^2$$

により定義すると

定　理　Γ_1とΓ_2の元の間の関係$\mathcal{R}_{A_1,\ A_2}^{M,\ \pi,\ \mathcal{A},\ \Phi^1,\ \Phi^2}$は測度0の部分を除き$M,\ A_1,\ A_2$の代数的関係だけで决る。即ち，$\pi,\ \mathcal{A},\ \Phi^1,\ \Phi^2$の選び方とは独立である。

従つて，Mの表現πは一つだけ考えれば良い訳で，その一つを固定して，その表現空間に作用する作用素環と考えることによりπを省略する。

定　理　$\mathcal{R}_{A_1,\ A_2}^{M,\ \mathcal{A}\ \Phi^1,\ \Phi^2}$の$\Gamma_1\times\Gamma_2$におけるグラフは$\Gamma_1\times\Gamma_2$の解析集合である。特に$A_1$と$A_2$が共に極大可換ならば$\Gamma_1$と$\Gamma_2$から測度0の集合を除き，そのグラフはBorel集合である。

A_1とA_2が一致したときそれをAとすれば，上の$\mathcal{R}_{A,\ A}^{M,\ \mathcal{A},\ \Phi,\ \Phi}$は$\Gamma$の同値関係となる。これを単に$\mathcal{R}_A^{M,\ \mathcal{A},\ \Phi}$と表す。

定　義　$\mathcal{R}_A^{M,\ \mathcal{A},\ \Phi}$による$\Gamma$の商空間$\widehat{\Gamma}$が．$\Gamma$から測度0の集合を除いて，countably separated ならばAはMの中でsmoothであるという。Aの各射影$e\neq0$に対してAeがeMeの中でsmoothでないときAはMでcompletely rough であるという。$\mathcal{R}_A^{M,\ \mathcal{A},\ \Phi}$が，$\Gamma$から測度0の集合除くと，相異なる二元に対しては成立しないときAはMで単純であるという。

定　理　Aの射影eによりAeはeMeでsmoothで，$A(1-e)$は$(1-e)M(1-e)$でcompletely rough となる様にAは分解される。

さらにsmoothなものの研究は次に示すように単純なもののそれに帰着される。

定　理　von Neumann代数Mの極大可換部分代数Aがsmoothなための必要十分条件はvon Neumann 代数$\widehat{M}$，その単純極大可換部分代数$\widehat{A}$および$\widehat{A}'$からA'の中への正規同型写像θが$\theta(\widehat{A})\subset A$且$\theta(\widehat{M}')=M'$となる様に存在することである。$A$がsmoothならば，上の（$\widehat{M},\ \widehat{A},\ \theta$）は一意的である。

この（$\widehat{M},\ \widehat{A},\ \theta$）を（$M,\ A$）の単純化と呼ぶ。

定　義　A_1，A_2の射影p_1，p_2について，p_1，p_2をそれ等に附随したΓ_1，Γ_2のBorel集合としたとき，P_1とP_2の測度0の部分を除いては$\mathcal{R}_{A_1,\ A_2}^{M,\ \mathcal{A},\ \Phi^1,\ \Phi^2}(\gamma_1,\ \gamma_2)$が各$(\gamma_1,\ \gamma_2)\in P_1\times P_2$に対して成立しないならば，$A_1p_1$と$A_2p_2$はunrelatedであるという。逆に，$p_1$，$p_2$の任意の部分射影$e_1$，$e_2$に対して$A_1e_1$と$A_2p_2$，$A_1p_1$と$A_2e_2$がそれぞれunrelatedにならない時$A_1p_1$と$A_2p_2$は相似であるという。

また，単純化の応用を示すと，smoothな極大可換部分代数が相似であるための必要十分条件はその単純化がunitary同値なことである，等がある。従つて，相似な単純極大可換部分代数は内部自己同型で互に共役である。

我々の定義した極大可換部分代数の諸性質とJ．Dixmierの導入した代数的諸性質との関係につ

いては次の通りである。

定　理　単純極大可換部分代数はJ.Dixmierの意味で特異である。

定　理　smoothな半正則極大可換部分代数を有するvon Neumann代数はI型である。

系　連続型von Neumann代数の半正則極大可換部分代数はcompletely roughである。

定　理　completely roughな極大可換部分代数とsmoothな極大可換部分代数とはunrelatedである。

以上に見て来た極大可換部分代数の諸性質を代数的に特徴づけることが問題となるが，これは本質的には未解決であるが，次の様な部分的解答は与えることが出来る。

定　理　smoothな特異極大可換部分代数は単純である。

上に挙げた種々の極大可換部分代数の存在については次の結果を得た。

定　理　連続超有限型因子はその極大部分代数の中に単純なものとcompletely roughなものとを同時に有する。また同様の性質をもつIII型因子も存在する。

以上に述べた本節の議論のC^*−代数の表現への応用を示して，本要旨を終ることにする。$\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$をC^*−代数としφ, ϕをそれぞれの表現で$\varphi(\mathcal{A})' \cong \phi(\mathcal{B})'$とする。$\theta$を$\varphi(\mathcal{A})'$から$\phi(\mathcal{B})'$への同型対応とすると，von Neumann代数$M$およびその忠実な正規表現$\pi$，$\rho$が$\pi(M)=\varphi(\mathcal{A})'$，$\rho(M)=\phi(\mathcal{B})'$且$\pi=\theta\cdot\rho$となるように存在する。$A_1$，$A_2$を$M$の可換von Neumann部分代数としたとき，$\pi(A_1)$，$\pi(A_2)$，$\rho(A_1)$，$\rho(A_2)$に関して，$\varphi$および$\phi$を

$$\varphi=\int_{\Gamma_i}^{\oplus}\varphi^i(\gamma_i)\,d\mu_i(\gamma_i)$$

$$\phi=\int_{\Gamma_i}^{\oplus}\phi^i(\gamma_i)\,d\mu_i(\gamma_i) \qquad i=1,\ 2$$

と分解する。但し，$A_i=L^\infty(\Gamma_i,\ \mu_i)$，

定　理　Γ_1，Γ_2の測度0の部分を除き，

$$\varphi^1(\gamma_1)\simeq\varphi^2(\gamma_2) \rightleftarrows \phi^1(\gamma_1)\simeq\phi^2(\gamma_2) \qquad (\gamma_1,\ \gamma_2)\ \Gamma_1\times\Gamma_2$$

となる。

従つて，$\mathcal{A}$およびφとして特別なC^*−代数とその表現を選び，それと一般のC^*−代数$\mathcal{B}$とその表現ϕを比較することにより，$\mathcal{B}$とϕの性質を調べることが出来る。これが§1で行つた議論の理論的背景である。

論　文　審　査　要　旨

竹崎正道提出の学位申請論文は作用素環の表現論についてと題し，主論文2章から成り，他に参考論文7篇を副えたものである。

主論文第7章はvon Neumann代数の表現の位相的性質に関する研究で，von Neumann代数の特異汎函数，von Neumann代数MからNへの特異線型写像の概念を新しく導入し，一般的な正汎函数は正規汎函数と特異汎函数の和であること，von Neumann代数Mの共役空間の（左，右）不変部分空間Vも正規部$V \cap M_*$と特異部$V \cap M_*^{\perp}$のl^1直和であること，von Neumann代数の表現は正規部と特異部の和として表わされること等新しい事実を証明し，その応用を種々導いて居る。特に1957 Feldman-Fellが提出した予想に対して始めて肯定的解答を示したことは注目すべきことゝ考えられる。

第2章はC^*代数の表現とその積分的直和分解に関する研究であるが，一般にC^*代数$\mathfrak{A}$，可分なHilbert空間$\mathfrak{H}$上の$\mathfrak{A}$の表現をφ，$\varphi(\mathfrak{A})$のcommutant $\varphi(\mathfrak{A})'=M$に含まれる可換部分代数をAとすれば$\mathfrak{H}$及び表現φに対してAを対角代数$L^{\infty}(\Gamma, \mu)$とする積分的直和分解

(1)　$\mathfrak{H}=\int_{\Gamma} \mathfrak{H}_{\gamma}\, d\mu(\gamma)$,　　$\varphi=\int_{\Gamma} \varphi_{\gamma}\, d\mu(\gamma)$

が存在し，Aが極大可換ならば，φ_{γ}は既約であり，Aが核心ならばφ_{γ}は因子表現であることは良く知られて居る。

本章前半では$\mathfrak{A}$が可分なNGCR型代数であるとき表現の因子表現への積分的直和分解に於て生ずる複雑な現象を調べたもので，可分なNGCR代数$\mathfrak{A}$を構成して，それがI_{∞}，II_{∞}，III型の夫々の表現の族$\{\pi_{\gamma}^{s};\ \gamma \in \Gamma\}$　$s=\mathrm{I}_{\infty}, \mathrm{II}_{\infty}, \mathrm{III}$をもち，各$s$に対しては$\pi_{\gamma}^{s}$と$\pi_{\gamma'}^{s}$は同一核をもち，$\gamma \neq \gamma'$ならば互に素である。且$\Gamma$の濃度は連続体のそれを下らない。且$\Sigma_s \oplus \pi_{\gamma}^{s}$は$\mathfrak{A}$の忠実な表現である如く出来ることを示したもので，此はNGCR型代数の表現の研究上重要な指針を与へるものと考えられる。本章後半はC^*代数$\mathfrak{A}$の表現の分解(1)における成分φ_{γ}間のunitary同値性は何によつて定められるかとのMackey表現論に関する基礎的問題を解析集合等の方法を用いて研究したもので，主定理として成分間のunitary同値性は表現の像$\varphi(\mathfrak{A})$のcommutant $\varphi(\mathfrak{A})'=M$と対角代数Aの代数的関係のみによつて完全に定まることを証明したものである。此結果としてunitary同値関係RによりAがsmooth, completely rough, simple in Mと分類することを行い，又AがMに於て極大可換のとき既に知られたregular, singular, Semiregular等との関連を示す諸定理を導き，更にSimple極大可換代数とCompletely rough極大可換代数を同時に部分代数として含むtypeII，及びtypeIIIの因子の存在を証明する等，C^*代数の表現論に貢献する処大きいと考えられる。

参考論文7篇は作用素環に関する学術論文として秀れたものと考えられる。

之を綜合するに竹崎正道の提出せる学位論文は作用素環について創意と有効な数学的手法によつて新しい多くの貢献をしたものと考えられ，よつて本論文は理学博士の学位論文として合格と認めた。