氏 名・(本籍)	富山 淳（とみやま じゅん）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第 76 号
学位授与年月日	昭和40年7月21日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和32年3月 東北大学大学院理学研究科修士課程修了
学位論文題目	The structure of C^*—algebras and other Banach algebras,（C^*—代数を中心とするBanach 代数の構造の研究）
論文審査委員	(主査) 教授 深宮政範　教授 洲之内源一郎 教授 佐々木重夫

論文目次

論　文　内　容　要　旨

緒　　言

函数解析の基礎となる具体的な函数空間は，その中で定義された自然な積とノルムによつて多くの場合Banach 代数を構成し，その構造が常に重要な研究対象となつているが，中でもJ. von Neumann 及びF. J. Murray によつて量子力学等と関連して1930年代より研究されはじめたring of operators（ヒルベルト空間上の有界な線型作用素のつくる弱位相で閉じた自己共役環で現在ではvon Neumann代数と呼ばれている）及びI. Gelfand, M. A. Naimark（後にI. Kaplansky, M. Fukamiya）によつて1943年に公理化されたC^*—代数（ヒルベルト空間上の有界作用素のつくるノルムで閉じた自己共役環）は代表的なBanach代数として知られている。C^*—代数はI. Kaplansky の先駆的な研究（Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 219～255）以後直接の構造理論はなかつたが60年代に入りJ. Glimm, J. Dixmier, J. M. G. Fell 等によつてようやくその表現論的な構造がきわめられるにつれてその独自の意味と重要性が次第に明らかになり，現在ではvon Neumann代数の一般化とは完全に違つた作用素環としてリー群のユニタリー表現等とも関連して多くの研究者の関心を集めている。

本論文はこのようなC^*—代数の構造の研究を中心にvon Neumann代数，又可換なBanach 代数のテンソル積などについての次の5編の論文の研究を合せたものである。

主　　論　　文

〔1〕 On the projection of norm one in W^*—algebras, Proc. Japan Acad., 33 (1957), 608～612.

〔2〕 On the product projection of norm one in the direct product of operator algebras, Tohoku Math. Journ., 11 (1959), 305～313.

〔3〕 Tensor products of commutative Banach algebras, Tôhoku Math. Journ., 12 (1960), 147～154.

〔4〕 Topological representation of C^*—algebras, Tohoku Math. Journ., 14 (1962) 187～204.

〔5〕 A characterization of C^*—algebras whose conjugate spaces are separable, Tôhoku Math. Journ., 15 (1963), 96～102.

参　考　論　文

〔1〕 A remark on the invariants of W^*—algebras, Tôhoku Math. Journ., 10 (1958), 37～41.

〔2〕 Generalized dimension function for W^*—algebras of infinite type, Tôhoku Math. Journ., 10 (1958), 121～129.

〔3〕 On the projection of norm one in W^*-algebras II, Tôhoku Math. Journ., 10 (1958), 204～209.

〔4〕 On the projection of norm one in W^*—algebras III, Tôhoku Math. Journ., 11 (1959), 125～129

〔5〕 T. Saito & J. Tomiyama; Some results on the direct product of W^*—algebras, Tôhoku Math. Journ., 12 (1960), 455～458

〔6〕 J. Tomiyama & M. Takesaki, Applications of fibre bundles to the certain class of C^*—algebras, Tohoku Math. Journ., 13 (1961), 498〜523

第一章　可換なBanach代数のテンソル積について

Aを可換なBanach代数，Gを局所コンパクト可換群とした時G上のA－Valued Bochner積分可能な函数全体のつくる空間L^1 (G, A) はconvolutionについて可換なBanach代数をつくるがその構造空間（regularな極大イデヤルのつくる空間にGelfand位相を入れたもの）は，G. P. Johnson (Trans. Amer. Math. Soc., 92 (1959), 411〜429), A. Hausner (Pacific Journ. Math., 7 (1957), 1603〜1610) 等によつて研究され，Gのdual $\widehat{G}$とAの構造空間$\mathscr{M}(A)$との積空間とhomeomorphになることが知られた。又B. Yood (Amer. Journ. Math., 73 (1951), 30〜42), A. Hausner (Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 246〜249) によればコンパクト空間X上のA—valued連続函数環C (X, A) の構造空間はXと$\mathscr{M}$ (A) との積空間にhomeomorphになつている。しかるにA. Grothendieck によれば (Memoir of Amer. Math. Soc., No 16, 1955) $L^1(G, A)$ はL^1 $(G)\underset{\gamma}{\otimes}A$ (γ－ノルムのテンソン積)，C (X, A) はC $(X)\underset{\lambda}{\otimes}A$ (λ－ノルムのテンソン積) と同型であり，更にL^1 (G)，C (X) の構造空間はよく知られているように夫々G，Xに等しい。これらのことを考慮に入れ§1では前述の結果を統一的立場から同時に一般化して次の定理を証明する。

定理　A，Bを可換をBanach代数とし$A\underset{\alpha}{\otimes}B$を$a$－ノルムによるテンソン積 (但し$\alpha \geqq \lambda$) で，Banaeh代数になつているものとする。この時 $\mathscr{M}(A\underset{\alpha}{\otimes}B)$ は $\mathscr{M}(A)\times\mathscr{M}(B)$ にhnmeomorphである。

次に§2ではBanach代数のいくつかの性質（regularity, semi—simplicity等）についてAとBが共通にそれらをもてば，$A\underset{\alpha}{\otimes}$も又それらをもつことを示す。これらは又前記Hausner, Johnsonによる結果の一般化になつている。なおこの章と同様な研究がB. Gelbaumによつてもなされており (Canadian Journ. Math., 11 (1959), 297〜310; Trans. Amer. Math. Soc., 103 (1962), 525〜548)，上の定理のlocally convex algebraへの拡張も試みられている (A. Mallios Math. Ann., 154 (1964), 171〜180)

第二章　C^*一代数におけるノルム１のprojectionのある性質とその応用

AをC^*—代数，BをそのC^*一部分代数とし今AよりBへ連続なprojection πが存在するものとする。このような写像はその性質から一般にその作用素としてのノルムが1より小にはならないが，それが特に1の時には次のような性質をもつ（§1の主定理）

定理　AよりBへのノルム1のprojection πは次の性質をみたす。

1° 任意のAの元$a\geqq 0$についてπ $(a) \geqq 0$,

2° 任意のBの元b, c, Aの元aについて

$$\pi\ (bac) = b\pi\ (a)\ c$$

この定理はまずその応用としてS. Sakai (境正一郎) によつて示されたvon Neumann代数のcharacterizationに関する定理 (Pacific Journ. Math. 6 (1956), 763〜773) 及び代数同型対応に関する定理 (Proc. Japan Acad., 32 (1956), 329〜332) に簡単に別証を与えるほか，von Neumann代数やAW^*一代数の部分代数を調べるのにも用いられる。

§2では次のことを考える。A_1, A_2, B_1, B_2をC^*—代数（又はvon Neumann代数）とし今π_1をA_1よりB_1へ，π_2をA_2よりB_2への写像とした時一般にA_1とA_2の代数的なテルソン積$A_1\odot A_2$上で自然に定義された$B_1\odot B_2$への写像$\pi_1\otimes\pi_2$がA_1, A_2のC^*—テンソン積$A_1\underset{\alpha}{\otimes}A_2$（又は

von Neumnn 代数のテンソン積 $A_1 \otimes A_2$ ）上に迄いつ拡大出来るかという問題は解析的なテンソル積に必ず起る問題として種々研究され，＊－準同型，（normal な＊－準同型）についてはそれが可能なことが知られている。ここではこれに加えて前節で研究されたノルム１の projection については同様なことが成立することを証明し，その応用例を二，三示す。即ち

定理 A_1，A_2 をC＊－代数（又は von Neumann 代数），B_1，B_2 を夫々 A_1 及び A_2 の C^*－部分代数（又は von Neumann 部分代数）とし π_1，π_2 を A_1 より B_1，A_1 より B_2 へのノルム１の projection（又は normal なノルム１の projection）とする。この時 $A_1 \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} A_2$（又は $A_1 \otimes A_2$）よりその部分代数 $B_1 \hat{\underset{\alpha}{\otimes}} B_2$（又は $B_1 \otimes B_2$）へのノルム１の projection $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ が一意に存在して

$$\pi(a \otimes b) = \pi_1(a) \otimes \pi_2(b) \qquad (a \in A_1,\ b \in A_2)$$

となる。

第三章 共役空間が可分な C^*－代数の構造

可分なヒルベルト空間上の完全連続な作用素の全体のつくる C^* 一代数は，すべての既約表現が元の空間への表現とユニタリー同値であるような単純な C^* 一代数として特徴づけられるという A. Rosenberg の結果（Amer. Journ. Math., 75（1953），523～530）に関連して S. Sakai（境正一郎）は 1959 年に未発表の論文で共役空間が可分な単純な C^*－代数は可分なヒルベルト空間上の完全連続作用素環として表現できることを証明した。この章では上の境の結果を更に一般にして共役空間が可分な C^*－代数は次のような構造をもつことを証明する。

定理 共役空間が可分な C^*－代数は，$I_{\rho+1}/I_\rho$ が可分な dual C^* 一代数になるような可附番の長さの composition series $\{I_\rho\}$ をもつ GCR 代数である。

第四章 連続な operator fieldのつくる代数への C^*－代数の表現について

C^* 一代数の理論は前述のように60年代に入つて新しい展開をみせるにいたつたが，よく知られている可換な C^*－代数の連続函数環への Gelfand 表現に対応する非可換の函数表現の議論は Kaplansky の研究（緒言参照）のみで不満足な状態のまゝとり残されていた。著者は先に参考論文［6］においてその既約表現が一定の n 次元であるような C^*－代数については Gelfand の表現定理の拡張が出来ることを示し得たのであるが，本章においては更に表現の一般理論を建設する。

X を局所コンパクト空間とし，X の各点 t に対して C^*－代数 $A(t)$ が対応しているものとする。

X 上の函数で各点 t の値 $a(t)$ が $A(t)$ に属するものを operator field と呼び，それらの集合 F が次の条件をみたすように与えられているとする。

1° F の元 $a(t)$ について $\|a(t)\|$ は X 上無限大点で０になる連続函数である。

2° F の元の点 t での値の集合は $A(t)$ と一致する。

3° F は各点でこの和，積，involution で自己共役代数をつくる。

この時 X 上のバンドル空間 $\mathcal{B} = \bigcup_{t \in X} A(t)$ に F を用いて Hausdorff 位相を定義することが出来，これによつて X 上の（無限大で０になる）連続な operator field のつくる C^*－代数 $C_F(X, \mathcal{B})$ といういわば非可換な連続函数環を考えることが可能となる。§１ではこの $C_F(X, \mathcal{B})$ の構造を示すいくつかの定理を証明する。§２では可換な場合の Stone－Weirstrass の定理にあたる次の結果を証明する。

定理 B を $C_F(X, \mathcal{B})$ の自己共役部分代数で，X の任意の二点 t，s に於て $A(t)$，$A(s)$ の任意の組の値をとる operator field を含むものとする。この時Bは $C_F(X, \mathcal{B})$ で稠密である。

この基本定理を $A(t)$ に何の制限もなしに示すことによつて，我々は Kaplansky の既述の論文に

未解決であつたいくつかの結果を肯定的に解決することが出来る。次にAをC^*—代数，XをAのJacobsonの意味での構造空間とし，更にXはHausdorff空間であるものとする。Xの点tはAのprimitive idealであるが，tによるAの商代数A/tを$A(t)$とし，$a(t)$を$A(t)$におけるaのcanonical imageとすると，Aに対してX上のoperator fieldの族$F=\{a(t) \mid a \quad A\}$が対応してこれは§1の条件をみたす。この時§2の結果により次の表現定理を得ることが出来る。

定理　Aと$C_F(X, \mathcal{B})$はC^*—代数として同型である。（§3の主定理）

C^*—代数の構造空間は一般には必ずしもHausdorff空間ではないが，§3では更にその場合の表現の一つの方法を示し§4ではその方法がvon Neumann代数の場合は常に適用出来ることを証明する。又これを用いてJ. Glimmの結果（Ann. Math.，72（1960），216〜244）により詳細な意味をつけ加える。

論　文　審　査　要　旨

富山淳提出の学位申請論文は C^* 代数を中心とするBanach代数の構造の研究と題し主論文4章から成り，他に参考論文6篇を副えて居る。

主論文第1章は可換なBanach代数のテンソル積の研究で，A，Bを可換なBanach 代数とするときA，Bのα－normによるテンソル積CがBanach代数で，$\alpha \geqq \lambda$ならば，Cの構造空間はA，Bのそれの位相積であるとの定理を得，成分の二，三の代数的性質の移行について明かにした。之はHausner，Jnhnson，Gelbaumによる諸結果の統一と考えられる。

主論文第2章は，C^* 代数Aから部分代数Bへのnorm 1の射影作用素の研究で，その基本的特性を確立し，又テンソル積に於る射影作用素の拡大について考察し，又von Neumann代数への新しい有効な応用を示し，作用素環に於て有用な指針となると考えられる。

第3章は共役空間が可分なC^* 代数を特長つける研究で，之によれば，此C^* 代数はGCR型代数で且各商代数$I_{\rho+1}/I_{\rho}$ が可分なdual C^*—代数である如き可附番的の長さのidealsの合成列をもつものとして特長づけられる，之はRosenberg－Neumarkによる完全連続作用素のC^* 代数の特長づけの自然な拡張でC^* 代数の構造に寄与すると考えられる。

第4章はC^* 代数のKaplansky構造論の研究で一般的考察として局所コンパクト空間X上のcontinuous operator fieldsのC^* 代数$C_F(X, \mathcal{B})$ なるものを提案し，その構造及び連続函数環の拡張を証明し，Kaplansky構造論に於ける二，三の問題点の考察を与え，次いでC^* 代数の表現への応用を研究して居る。即ち，C^* 代数$\mathfrak{A}$のprimitive idealsの空間即ちJacobsonの構造空間をXとし，primitive ideal tによる商代数を$\mathfrak{A}(t)$，$\mathfrak{A}$ の元を$\{a(t) \mid a(t) \in \mathfrak{A}(t)\}$と自然に対応させると，もし$X$がHausdorff空間ならば，$\mathfrak{A}$は$C_F(X, \mathcal{B})$なる形の$C^*$ 代数として表現される。但しFは$\{a(t), t \in X\}$，$a \in \mathfrak{A}$ の集合とすればよい。本章の主結果の一つであるが$\mathfrak{A}$ の構造空間がHausdorff空間でない場合の表現の一方法をも与えて居り，又この方法がvon Neumann代数にも適用可能なことを論じ，之等はC^* 代数の理論に多くの新しい知見をもたらしたものと考えられる。

参考論文は自著4篇，共著2篇で何れもvon Neumann代数及びC^* 代数に関する有用な多くの結果を含んで居る。

之を綜合するに富山淳の提出せる論文は創意と有効な数学的手法を用いてBanach代数及び作用素代数の種々の分野で新しい多くの寄与をしたものと考えられ，よつて本論文は理学博士の学位論文として合格と認めた。