氏名・（本籍）	丹 野 修 吉（たん の しゆう きち）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第151号
学位授与年月日	昭和42年5月17日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和38年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Transformations and contact Riemannian manifolds （変換と接触計量多様体）
論文審査委員	（主査） 教授 佐々木 重 夫　教授 淡 中 忠 郎 教授 深 宮 政 範

論　文　目　次

論　文　内　容　要　旨

序

接触多様体の近来における発展はまず，W. M. Boothby－H. C. Wang（1958）及びJ. W. Gray（1959）の研究成果にみられる。その中でJ. W. Grayは接バンドルの構造群がU（n）×1に可約なものとして概接触構造を定義した。続いて佐々木重夫（1960）は概接触構造をある関係式を満たす3つのテンソルの存在によつて特性し，更にその構造に付随したRiemann計量を導入した。これが概接触計量構造の発祥であり，接触（計量）多様体の研究は4つの基本的テンソルに対してのテンソル計算が非常に有力な道具となる段階に至つた。実際この方法によつて多くの成果が得られるようになつた。接触多様体のより特殊なものはK－接触計量多様体で，更に特殊なものが佐々木多様体である。佐々木多様体は偶数次元であるKähler多様体の奇数次元類似的特性をもつ，この点において接触構造と複素構造の類似性，異質性，あるいは多様体固有の性質の研究は現在微分幾何学において一つの重要な位置を占める。

ϕを不変にする変換を研究する際に，我々は（m－1）－相応変換の研究を必要とする。これが分布に関する幾何的変換研究への発端であり，更には接触計量多様体の位相幾何学的性質の研究への一つの入口ともなつた。即ち著者は（m－1）－相応変形なる概念を導入して調和形式の存在及びBetti数等に関する結果を得た。

本論文は既刊の〔1〕～〔13〕に未刊の〔14〕～〔19〕を加えたものである。尚参考論文は省略した。

〔1〕 Note on infinitesimal transformations over contact manifolds, Tôhoku Math. Journ., 14 (1962), 416－430.

〔2〕 Some transformations on manifolds with almost contact and contact metric structures, Tôhoku Math. Journ., 15 (1963), 140－147.

〔3〕 On fibering of some non－compact contact manifolds, Tôhoku Math. Journ., 15 (1963), 289－297.

〔4〕 Some transformations on manifolds with almost contact and contact metric structures, II, Tôhoku Math. Journ., 15 (1963), 322－331.

〔5〕 A remark on transformations of a K－contact manifold, Tôhoku Math. Journ., 16 (1964), 173－175.

〔6〕 An almost complex structure of the tangent bundle of an almost contact manifold, Tôhoku Math. Journ., 17 (1965), 7－15.

[7] Almost complex structures in bundle spaces over almost contact manifolds, Journ. Math. Soc. Japan, 17 (1965), 167 – 186.

[8] A theorem on regular vector fields and its applications to almost contact structures, Tôhoku Math. Journ., 17 (1965), 235 – 238.

[9] Sur une variete munie d'une structure de contact admettant certaines transformations, Tôhoku Math. Journ., 17 (1965), 239 – 243.

[10] Partially conformal transformations with respect to $(m-1)$–dimensional distributions of m – dimensional Riemannian manifolds, Tôhoku Math. Journ., 17 (1965), 358 – 409.

[11] A conformal transformation of certain contact Riemannian manifolds, Tôhoku Math. Journ., 18 (1966), 270 – 273.

[12] Sue une variété de K – contact metrique de dimension 3, Comptes Rend. Acad. Sci. Paris, 263 (1966), 317 – 319.

[13] Partially conformal transformations with respect to $(m-1)$ – dimensional distributions of m – dimensional Riemannian. manifolds, II, Tôhoku Math. Journ., 18 (1966), 378 – 392.

[14] Curvature – preserving transformations of certain contact Riemannian manifolds, (未刊 sent to Kōdai Math. Sem. Rep.)

[15] Harmonic forms and Betti numbers of certain contact Riemannian manifolds, (未刊 sent to Journ. Math. Soc. Japan)

[16] Strongly curvature – preserving transformations of Pseudo – Riemannian manifolds, (未刊).

[17] Partially geometric transformations of Riemannian manifolds, (未刊).

[18] Transformations on almost hermitian manifolds, (未刊).

[19] $(m-1)$ – deformations in contact Riemannian manifolds, (未刊).

第1章　Riemann 幾何学の等値問題

Riemann 幾何学の等値問題に関連して最近野水－矢野（1965）は計量が正定値の下にある定理を得た。その結果は計量が不定値のときには次ぎの如く成立する：

定理. M と M' が共に既約，実解析的Riemann 多様体とする。M の次元が偶数且つ4以上のときは計量の符号が0でないとする。そのとき曲率テンソル R とその k 階共変微分 $\nabla^k R$ （$k=1$,

2, ……) を共に不変にするMからM'への変換は相応である。

尚Kー接触計量多様体の場合はRを不変にするだけで等長変換になる（§4.4）

第2章　概複素多様体

多くの人達によつて，概Hermite多様体，概Kähler多様体上での無限小変換が研究されて来た。この章では概接触計量多様体上での変換の研究に用いた方法で，無限小に関する結果を大域的変換の結果への拡張について述べる。例えば，命題2.8（p. 18）をKähler多様体で云えば次ぎのようになる：

定理．$4k$次元コンパクトKähler多様体Mでもし$2k$次元Betti数が1ならばM上の共形変換はすべて等長変換である。

第3章　概接触多様体

概接触構造が概複素構造の奇数次元類似と考えられる一面はバンドル構造を考えるとき顕著である。概接触多様体Mが大域的に概複素多様体B上の一次元Lie群を構造群にもつ主バンドルとみなされるための条件，あるいはそのときの性質，逆に底空間として概接触多様体を考えその上にバンドル空間を考えた場合等の考察が最初の部分である。定理の一例として：

定理．概接触多様体Mの接バンドルには概接触構造のみによつて定まる一つの概複素構造が存在し，その積分可能性はMの正則性と同値である。

Betti数や調和形式の研究に際しGysinの完全系列は一つの有用なモデルを与える。

定理．$\pi : M \to B$をコンパクト正規Kー接触計量多様体のバンドル構造とする。M上の調和一形式αに対しB上の調和一形式λが存在し，$\alpha = \pi^* \lambda$である。更にMが佐々木多様体のときはM上の調和r形式（$r \leq (m-1)/2$）αに対しB上の調和r形式λが存在し$\alpha = \pi^* \lambda$が成立する。

定理．コンパクトηーEinstein Kー接触多様体（$m > 3$）$R_1 = ag + b\eta \otimes \eta$において$a > -2$ならば$b_1(M) = 0$.

コンパクト佐々木多様体がηーEinsteinでなくスカラー曲率S一定なら$b_2(M) \geq 1$.

さて（$m-1$）ー相応変形

$$g \to {}^*g = \alpha g + \beta \eta \otimes \eta$$

において，gと${}^*g$の相対的関係とその応用は最も興味あるものの一つである。

定理．Kー接触計量多様体において

$$R_1(w, w) + 2g(w, w) > 0 \quad (w \neq 0 \text{の点で})$$

を満たす調和一形式wは存在しない。

定理．コンパクト佐々木多様体で断面曲率が$-3/(2n-1)$より大ならば$b_1(M)=0$。従つて$m=3$なら$b_2(M)=0$も成立。

$m\geqq 5$で断面曲率が$-3/(2n-1)$より大なら純血な調和二形式は存在しない。断面曲率が正なら混血な調和二形式も存在しない。従つて特に$b_2(M)=0$。

第４章　概接触計量多様体上の変換

ここでは構造テンソルの一つあるいはいくつかを不変にする変換等について考察する。

定理．接触計量多様体M上でϕを不変にする変換は$(m-1)$一相応変換であり，Mがコンパクトなら自己同形である。又ϕを不変にする変換全体はLie群を作る。

定理．コンパクト正規佐々木多様体M，$m>3$，においてもしMが非等長的共形変換を許すならMは単位球面と等長である。

定理．K－接触多様体が完備且つ，ϕを不変にし自己同形でない変換を許せばMは概Kähler多様体上の主バンドルであり位相的にはEuclid空間E^mと同一視できる。

定理．K－接触多様体で曲率テンソルを不変にする変換は等長変換に限る。

第５章　分布に関する幾何的変換

Riemann多様体M上の分布Dに関し，共形，射影，擬似，等長変換等を考える。この際局所的にベクトルになる$^{\varepsilon}\zeta$なる族を導入し種々の結果を得る。特にdim$D=m-1$の場合は詳しく調べた。即ち$(m-1)$－共形変換の全体はどのような場合にLie群となるか，無限小$(m-1)$一共形変換とそれの生成する局所１径数群との関係，スカラー曲率に対する作用，体積元素との関係，その他である。一例をあげると：

定理．コンパクト可符号Riemann多様体においてζ_Uが各U上Killingベクトルで，Sが負の定数とする。もし無限小$[m-1]^3$－共形変換Xがある定数cに対して$L(X)w=cw$を満たすならXはKillingベクトルである。

以上の理論の例あるいは応用には次のものがある：

定理．３次元K－接触多様体Mが，単連結，完備，Sが一定で-3より大なら，Mは単位球面とD－相応的である。

定理．佐々木多様体Mが単連結，S一定，且つ正の断面曲率をもつなら，Mは単位球面とD－相応的である。

論文審査結果の要旨

第一章は1965年に野水・天野両氏により正定値なRiemann多様体の場合に近代的また鋭い形に定式化され，かつ証明された等値問題を不定値なRiemann多様体にも適用できるよう拡張したものである。

第二章は概Hermite多様体上にある種の変換の1径数Lie群が作用しているときその群性質を利用して導かれる定理を個々の変換に対する定理にまで高めようとしたもので「$4k$次元のコンパクトなKahler多様体の共形変換はその$2k$次元Betti数が1ならば等長変換である」などがその例である。

第三章は概接触多様体に関するものでBoothby－WangがコンパクトでF則な接触多様体にBoothby－Wangのfibringとよばれるものを導入したときその証明に欠点があったがそれを修正したこと，ホロノミイ群に関する田代の定理に証明を与えたこと，概接触多様体上の接バンドルとfibreバンドルに種々の概複素構造を導入し，その積分可能性を調べたこと，Compactで正則な接触多様体のBoorhby－Wang fibringでの全空間と底空間の調和微分形式，Betti数の間の関係を調べたこと，正規接触Riemann多様体のBetti数に関するMoskalの研究を鋭くしたり，また証明の誤りを指摘し，別の方法で完全な証明を与えたことなどである。「概接触多様体の接バンドル上には概接触構造だけから定まる概複素構造があり，それの積分可能性は概接触構造の正規性と一致する」「コンパクトな正規接触，Riemann多様体が正の断面曲率をもつときはその2次元Betti数は0に等しい」など美しい定理が多い。

第四章は接触変換や構造テンソルϕを不変にする変換，同型，共形変換などに関する研究である。ϕを不変にする変換の全体はLie群であるが，それがどんな時に同型群と一致するかなどについて著るしい定理を導いている。

第五章は概接触多様体上のϕを不変にする変換の研究よりヒントを得たものでRiemann多様体上に分布が与えられたとき，その分布の上だけ共形的，射影的等の性質をもつ変換の研究である。応用として「正規接触Riemann多様体が単一連結，スカラー曲率一定，断面曲率一定ならば，単位球面と接触形式で定められる分布上で相応である」という美しい定理が導かれる。

以上の要旨に述べたように著者は微分幾何学の著るしい題目である変換と接触多様体の研究において困難に打勝って多くの重要で美しい結果を得た。その展開にはLie群論，接続の理論，調和形式論，位相幾何学の新しい知識や技術が鋭い幾何学的直観に導かれて駆使されている。よって丹野修吉提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。