| | |
|---|---|
| 氏名・(本籍) | 内田興二 (うちだこうじ) |
| 学位の種類 | 理学博士 |
| 学位記番号 | 理第320号 |
| 学位授与年月日 | 昭和46年4月28日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第5条第2項該当 |
| 最終学歴 | 昭和39年3月<br>東北大学大学院理学研究科<br>(修士課程) 数学専攻修了 |
| 学位論文題目 | Unramified extensions of algebraic number fields (代数体の不分岐拡大) |
| 論文審査委員 | (主査)教授 淡中忠郎　教授 佐々木重夫<br>教授 黒田正 |

## 論文目次

# 論文内容要旨

## 序

$K$を有限次代数体とする。$K$の不分岐拡大といっても，不分岐アーベル拡大と一般の不分岐ガロア拡大では事情が全くちがうのでそれらを分けて考える。類体論によれば$K$のアーベル拡大はすべて類体であるが，特にここでは不分岐なアーベル拡大のみを考える。そのようなもののうち最大のものがヒルベルト類体（あるいは絶対類体）である。それは$K$上有限次アーベル拡大で，そのガロア群は$K$のイデアル類群，即ち$K$の０でない分数イデアル全体のつくる乗法群を$K$の単項イデアル全体のつくる部分群で割った剰余群に同型である。従ってヒルベルト類体の大きさを調べることは$K$のイデアル類群の大きさ即ち類数を調べることと同じである。類数公式，特に類数を無限級数ではなく有限回で計算できる形に表わす公式については２次体の場合，円分体の場合，さらにはアーベル体の場合等に与えられている。しかしこれらの公式では$K$を定めたとき個々には計算できても，$K$が体のある無限列を動くときその類数がどのように変化するか等について知ることができない。例えば虚２次体において判別式の絶対値が大きくなると類数も大きくなり，特に類数が１の虚２次体は有限個である。しかしこれは類数公式から直接には分らない。従って類数１の虚２次体が９個求められ，他にあるとしても高々１個であることが１９３０年代に既に知られていたにもかかわらず，９個しか存在しないことをスタークが示したのは３０年も後のことである。これは１０個目が存在すればその判別式がどの範囲にあるかその限界を計算できる形に与えることが難しかったためである。実２次体については類数１のものが無限に存在することがガウス以来予想されているがまだ分っていない。このように無限に多くの体について考えるとき類数公式は有効でないので，それらの公式を得る前の解析的な公式に戻ってランダウや他の人が行なっているような，ゼータ函数や$L$函数の評価等が必要になる。本論文の第１章ではその評価をわれわれに都合のよいように変形し評価しなおすことによって，虚２次体の場合と同様の結果を一般の虚アーベル体について求め，特に１の$l$分体（$l$は素数）のときには類数が１となる$l$の限界を求める。次に一般の不分岐ガロア拡大については与えられた体$K$上存在するかどうかさえ調べる一般的方法が知られていない。基礎体を固定しなければ任意の有限群をガロア群にもつ不分岐拡大が存在することが知られているが，それでは十分ではない。当面$K$を固定してその不分岐拡大をすべて求めることは望めないので，第２章においては$K$の次数を固定して，特に２次体の場合に可解でない不分岐拡大を得る一つの方法を述べる。なお第２章の主な部分は山本芳彦によっても独立に得られている。

## 第１章　虚アーベル体の類数

一般に$K$を有理数体のガロア拡大とし，$n$をその次数，$d$を判別式の絶対値，$R$を単数規準，$h$を類数とする。$K$が$n/\log d \to 0$となるガロア体の列を動くときブラウアー・ジーゲルの定理（以後Ｂ－Ｓ定理という）は

$$\log hR / \log\sqrt{d} \rightarrow 1$$

となることを主張する。$K$を虚のアーベル体，$K_0$をその最大実部分体とするとき$h$，$R$，$d$と$K_0$の対応するものとの関係を調べてB－S定理から

定理 1. $N$を任意に与えられた正の整数とするとき，虚アーベル体でその類数（の第 1因子）が$N$以下であるものは有限個しか存在しない。

B－S定理の 2次体の場合（ジーゲルの定理）と，ランダウ及び竜沢による$L$函数の評価を使うと定理 1の別証明が得られ，さらに

定理 1′ 虚のアーベル体でその類数の第 1因子が$N$以下であるものに対し，その導手の上限が次の 2つの場合を除いて計算できる。

（ⅰ） 虚 2次体

（ⅱ） 虚 4次体でガロア群が（2,2）型

B－S定理を用いた場合にはこのような上限の計算はできないけれども，アーベル体でない場合にもある条件の下で定理 1が成立つことがわかる。従って定理 1はかなり一般な虚のガロア体で成立つことが予想される。定理 1′の特別の場合として 1の$l$分体（$l$は素数）のときには導手は$l$に等しく，$N=1$としたときの$l$の限界が計算できる。これはアンケニー・コーラ及びジーゲルによって知られていたが，実際にその値を計算した結果は発表されていない。（ジーゲルの最近の講義録に$l \leqq 10^8$が与えられているという）。ここではランダウの方法を改良して一つの限界を求める。方法は本質的に新しいとはいえないが，評価は非常に良くなって

定理 2. 1の$l$分体で，$l > 2400$ならばその類数の第 1因子は 1より大きい。

古くから$l \geqq 23$のときには$l$分体の類数（の第 1因子）は 1より大きいだろうと予想されている。$l < 23$のときには類数は 1である。$23 \leqq l < 163$のときには 1より大きいことが知られていたが，最近$l < 200$なら 1より大きいことが知られたという。$l \equiv 3 \pmod 4$の素数については虚 2次体についての結果から正しいことが分かり，又．非正則な素数についても正しいから，$200 < l < 2400$，$l \equiv 1 \pmod 4$となる正則な素数に対してのみ確めればよいことになる。そのような素数は 85個ある。又，第 1因子と限らなければ実 2次部分体について調べてそのうち 10個は除くことができる。残りのものについて類数公式から計算機で類数を求めることは原理的には可能であるが，今まで知られているものを見ると$l$と共に類数は非常な速さで大きくなる（類数の第 1因子を$h_1$とすると$l \to \infty$のとき，$\log h_1$と$\frac{l}{4}\log l$との比が 1に近づく）こともあって，実際には難かしいということである。

## 第 2 章　2次体の不分岐拡大

可解でないガロア群をもつ不分岐拡大を得るために

$$f(X) = X^n - aX + b = 0$$

の形の方程式を考える。この方程式はクンマー拡大を与える方程式$X^n - a = 0$に次いで簡単な形の方程式であり，$n$が素数で考える体の標数に等しいときにはアルテイン・シュライアー型と呼ば

れる拡大を与えるので，それ自身興味のある方程式であるが$f'(X)=nX^{n-1}-a$だから

$$Xf'(X)-nf(X)=(n-1)aX-nb$$

となって，どんな体を基礎体にとっても$ab\fallingdotseq 0$ならば$f(X)=0$は重根を高々一組の2重根を除いて持たないので，不分岐拡大を得るのに都合がよい。

定理3. $k$を有限次代数体とし，$a$，$b$を$k$の整数で$((n-1)a,\ nb)=1$なるものとする。

方程式

$$f(X)=X^n-aX+b=0$$

の分解体，即ち$k$に$f(X)=0$の根$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$を添加した体を$K$とする。$D$を$f(X)$の判別式とするとき，$K$は$k(\sqrt{D})$上不分岐である。

この定理を$k$が有理数体の場合に適用すると，

定理4. $S_n$及び$A_n$をそれぞれ$n$次の対称群及び交代群とする。そのとき$S_n$を（又は$A_n$を）ガロア群とする不分岐拡大をもつような2次体が無限に多く存在する。

系. $G$を任意の有限群とするとき，有限次代数体$k$が存在して$k$上$G$をガロア群にもつ不分岐拡大が存在する。$G$の位数を$n$とするとき，$k$は有理数体上高々$2\times(n-1)!$次にとれる。

この系の前半はフレーリッヒ及びアルテインによって得られていたが，後半の次数はそれらの方法から計算されるものよりは非常に小さくなっている。定理4が$S_n$や$A_n$以外の群についても証明されることが望ましいが，有理数体上のガロア体の構成ができない以上それは殆んど見込みがない。

## 第3章　方程式　$X^n-aX+b=0$　のガロア群

第2章で扱った方程式

$$X^n-aX+b=0$$

のガロア群を，こんどは$a$，$b$を不定元として，種々の基礎体の上で求める。ガロア体の構成問題，即ち任意に与えられた有限群をガロア群にもつ（有理数体の）拡大体が存在するか，又存在するとして具体的にその体を与えることができるかどうかという問題に対して，可解でない群に対しては（対称群と交代群を除いて）全く手がかりがない現状では特殊な形の方程式のガロア群を計算してみることも無意味ではないと思う。

定理5. 体$k$の標数$p$が$n(n-1)$の約数でなければ，方程式

$$X^n-aX+b=0,\qquad a,\ b\text{は不定元}$$

のガロア群は$n$次対称群である。

系. 任意の体$k$に対し$n\geqq 4$のとき方程式

$$X^n+aX^3+bX^2+cX+d=0,\qquad a,\ b,\ c,\ d\text{は不定元}$$

のガロア群は$n$次対称群である。

このように殆んどすべての標数についてはガロア群は対称群になってしまうが，定理5の条件をみたさないときには事情は全く異なる。標数と$n$との関係で種々のちがった型の群が出てくるので，すべての場合を調べることは（ある程度の法則性を見つけることも）非常に難かしいと思われる。

特に次の例をあげておく。標数が 3のとき方程式

$$X^{12}-aX+b=0$$

のガロア群はマチウ群$M_{11}$になる。マチウ群は置換群の理論の中で特異な位置を占める群であり，その中の一つが方程式のガロア群として具体的に書けることは興味深い。

# 論 文 審 査 結 果 の 要 旨

二次代数体の類数については古くからGauss , Dirichlet , Dedekind 等により研究がなされ，Gaussにより類数1の虚二次体は有限個であること，類数1の実二次体の数は無限個であることが予想された。前者に関しては最近いくつかの結果が発表され，Starkに到って決定的な研究がなされた。然し後者の問題に関しては今後に残されている所が多い。

内田興二の論文の主要な部分はこれ等の問題に関連をもつものである。

第1章に於いて内田はBrauer—Siegel の定理の応用として次の主定理を得ている。即ち与えられた整数$N$に対して類数の第1因子が$N$以下となるような虚アーベル体は有限個しかないことが著者によって証明された。著者はこの事実に対して二つの証明を与えているが，第二の改良された証明はLandauの方法を精密化して得られたもので，その応用の一例として次の結果を挙げることができる。即ち1の$l$ベキ根の体の類数の第1因子$h_1$は$l > 2400$の時$> 1$となる。これは$l$の下限が23であると云う予想に一歩近附いた結果である。

与えられたガロア群$G$をもつ不分岐拡大に関しては$G$がアーベル群の場合には類体論的な取り扱いが可能であるが，一般には系統的な研究がなされていない。これに関して著者は対称群，交代群をガロア群にもつ不分岐拡大が無限に多くの二次体上に存在することを示した。

第三章に於いて著者は

$$X^n - aX + b = 0 \qquad (a,\ b：不定元)$$

の形の方程式のガロア群を標数$p$のいくつかの場合に決定し，多くの場合にそれらが対称群であることを示した。

この他内田は単数群の構造と深い関連をもつものとされているTateのGalois cohomology に関する双対性をより一般な条件のもとに証明し，Nakayama, Hochschild の結果の一般化に関する淡中の予想の一部を解決し，Grothendieck環や射影加群に関するいくつかの新しい結果を与えた。

以上著者は広い学力と計算力によって虚アーベル代数体の類数の精密な限界を与え，類体論的な方法によっては処理の困難な二次体上の非アーベル的不分岐拡大についての存在を確かめ，標数$p$の代数函数体についても類似の問題を研究し，群のコホモロジーや射影性について整数論と深い関連を持つ諸性質を誘導するなど広い分野にわたって新知見を加えた所が大きく，博士の学位論文として十分な内容をもつものと判断される。よって審査員達は内田興二提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。