氏名・(本籍)	浅野(あさの) 正二(しょうじ)
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第393号
学位授与年月日	昭和48年2月28日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和44年3月 東北大学大学院理学研究科　修士課程地球物理学専攻修了
学位論文題目	Light Scattering by a Spheroidal Particle (回転楕円体粒子による光の散乱)
論文審査委員	(主査) 教授 山本 義一　教授 上山 弘 教授 鳥羽 良明 助教授 田中 正之

論文目次

5. Angular distribution of the scattered intensity at oblique incidence of the unpolarized light

6. The scattering cross sections and efficiency factors

論　文　内　容　要　旨

第１部　均質な回転楕円体による電磁波の散乱理論

第１章　序　論

波長と同程度以上の大きさの粒子による光（電磁波）の散乱問題は，きわめて限られた形状の粒子に対してしか，その理論的厳密解は得られていない。その一つが球によるもので，Mie（1908）によって解かれ，Mie理論と呼ばれ広く使われており，他の一つは無限に長い円柱によるものであるが，有限の大きさをもつ非球形粒子に対する厳密な解は皆無である。

著者は，回転楕円体を選び，それによる光の散乱問題を厳密に解いた。回転楕円体は，楕円を長軸又は短軸を回転軸として回転して得られるもので，それぞれ長球（prolate spheroid）又は扁球（oblate）と呼ばれる。回転楕円体を選んだ理由は，それが球に次いで幾何学的に単純であり，楕円率を変えることによって長球では，球から針状の間，扁球では球から円板状の間の任意の形を表わせる実用的見地による。楕円体の散乱問題に対する取組は，Möghich（1927）によって始められたが，彼は形式的に問題を定式化するにとどまった。その後Schultz（1950）は，金属長球の回転軸に平行に入射する場合のradar cross sectionを求めるのに成功した。ここでは彼等が用いた変数分離法を発展させ，任意の大きさ，任意の光学特性をもつ均質な長球及び扁球による光の散乱を任意のorientationについて統一的に解いた。

第２章　電磁波散乱の一般論

この章では，電磁波の散乱の問題設定と，基本的仮定について述べてある。即ち，散乱問題とはMaxwell方程式と境界条件を満すような，散乱体によって２次的に誘起される散乱電磁場を決定することである。境界条件としては，回転楕円体の表面で電場・磁場の接線成分が連続であるという条件が課せられる。

第３章　回転楕円体座標系における波動函数

Maxwall 方程式を満すベクトルは，スカラー波動方程式の解を用いて，次のように作ることが出来る。即ち

$$M^{r(j)}_{\substack{e\\0}mn} = \nabla \times (\mathbf{r} \cdot \Psi^{(j)}_{\substack{e\\0}mn}) \tag{1}$$

$$N^{r(j)}_{\substack{e\\0}mn} = k^{-1} \cdot \nabla \times M^{r(j)}_{\substack{e\\0}mn} \tag{2}$$

ここに$\mathbf{r}$は位置ベクトル，kは伝播定数であり，Ψはスカラー波動方程式の解で，回転楕円体波動函数と呼ばれる。スカラー波動方程式は，回転楕円体座標系において変数分離でき，その解はFlammer（1957）のnotationによると，長球に対しては，

$$\Psi^{(j)}_{\substack{e\\0}mn} (c ; \eta, \xi, \phi) = {}_{mn}S (c ; \eta) \; R^{(j)}_{mn} (c ; \xi) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} m\phi \tag{3}$$

及び扁球に対しては，

$$\Psi^{(j)}_{e_0 mn}(-ic;\eta,i\xi,\phi) = S_{mn}(-ic;\eta)R^{(j)}_{mn}(-ic;i\xi)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\phi \tag{4}$$

と書ける。$S_{mn}(\eta)$は角函数，$R^{(j)}_{mn}(\xi)$は動径函数で第１種の函数$R^{(1)}_{mn}$か，第３種の函数$R^{(3)}_{mn}$かによって$j=1$ or 3となる。(3) 又は(4) を代入して作られるベクトル $M^{(j)}_{e_0 mn}$，$N^{(j)}_{e_0 mn}$ は，それぞれ長球系又は扁球系におけるベクトル波動方程式の解である。扁球系に属する式は長球系に属するるものにおいて，$c\to -ic$，$\xi\to i\xi$ の置換によって得られ，逆もまた成り立つ。但し，cは楕円の半焦点距離をlとしたとき　$c=2\pi l/\lambda$で定義されるもので，楕円体の波長に対する相対的な大きさを表わす量であり，$i=\sqrt{-1}$　である。

この章の前半では，Flammer に基づいて，回転楕円体波動函数について簡単なレビューをし，後半ではベクトル函数$M^{\tau(j)}_{mn}$，$N^{\tau(j)}_{mn}$ のexplicitな形とその 性質 について述べた。

第４章　　電磁場ベクトルの級数展開

斜め入射（入射光の伝播方向と回転軸とが平行でない場合で，入射角$\zeta\neq 0$）の場合，偏光している入射光は２つの成分に分けて別々に扱かわれた。１つは入射面に対してTEモードに直線偏光している成分，他の１つはTMモードの偏光成分である。これらの入射平面波${}^{(i)}E$，${}^{(i)}H$は，ベクトル函数$M^{\tau(1)}_{e_0 mn}$，$N^{\tau(1)}_{e_0 mn}$ を用いて次のように展開することができる。

i）TEモード（${}^{(i)}H$∥入射面）

$$\left.\begin{aligned} {}^{(i)}E &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} i^n\left[g_{mn}(\zeta)M^{\tau(1)}_{emn} + i f_{mn}(\zeta)\cdot N^{\tau(1)}_{omn}\right] \\ {}^{(i)}H &= \mathscr{M}^{(\mathrm{I})}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} i^n\left[f_{mn}(\zeta)\cdot M^{\tau(1)}_{omn} - i g_{mn}(\zeta)\cdot N^{\tau(1)}_{emn}\right] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ii）TMモード（${}^{(i)}E$∥入射面）

$$\left.\begin{aligned} {}^{(i)}E &= \sum_m\sum_n i^n\left[f_{mn}(\zeta)\cdot M^{\tau(1)}_{mn} - i g_{mn}(\zeta)\cdot N^{\tau(1)}_{emn}\right] \\ {}^{(i)}H &= \mathscr{M}^{(\mathrm{I})}\sum\sum i^n\left[g_{mn}(\zeta)\cdot M^{\tau(1)}_{emn} + i f_{mn}(\zeta)\cdot N^{\tau(1)}_{omn}\right] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ここに$\mathscr{M}$ は屈折率で，肩につけた(I) は，それが散乱体の周囲の媒質に関するものであることを示す。散乱体に関する量は(II) で表わす。展開係数$f_{mn}(\zeta)$，$g_{mn}(\zeta)$ は入射角ζの函数で，特に$\zeta=0$の場合には$m=1$以外の係数は全てzeroになる。

散乱電磁場 ${}^{(s)}E$，${}^{(s)}H$及び散乱体の内部電磁場 ${}^{(t)}E$，${}^{(s)}H$ も入射場と同じように展開できる。

i）TEモード

$$ {}^{(s)}E = \sum_{m=o}\sum_{n=m} i^n \left[\beta_{1mn} \cdot M^{r(3)}_{emn} + i\,\alpha_{1mn} \cdot N^{r(3)}_{0mn} \right] $$

$$ {}^{(s)}H = \mathscr{M}^{(\mathrm{I})} \sum_m\sum_n i^n \left[\alpha_{1mn} M^{r(3)}_{0mn} - i\beta_{1mn} N^{r(3)}_{emn} \right] \qquad (\xi > \xi_0) \qquad (7) $$

$$ {}^{(t)}H = \sum_m\sum_n i^n \left[\alpha_{1mn} M^{r(1)}_{emn} + i\gamma_{1mn} N^{r(1)}_{0mn} \right] $$

$$ {}^{(t)}E = \mathscr{M}^{(\mathrm{II})} \sum_m\sum_n i^n \left[\gamma_{1mn} M^{(1)}_{0mn} - i\delta_{1mn} N^{r(1)}_{emn} \right] \qquad (\xi < \xi_0) \qquad (8) $$

ii) TMモード

$$ {}^{(s)}E = \sum_{m=o}\sum_{n=m} i^n \left[\alpha_{2mn} \cdot M^{r(3)}_{0mn} - i\beta_{2mn} \cdot N^{r(3)}_{emn} \right] $$

$$ {}^{(s)}H = -\mathscr{M}^{(\mathrm{I})} \sum_m\sum_n i^n \left[\beta_{2mn} M^{r(3)}_{emn} + i\alpha_{2mn} \cdot N^{r(3)}_{0mn} \right] \qquad (\xi > \xi_0) \qquad (9) $$

$$ {}^{(t)}E = \sum_m\sum_n i^n \left[\gamma_{2mn} M^{r(1)}_{0mn} - i\delta_{2mn} \cdot N^{r(1)}_{0mn} \right] $$

$$ {}^{(t)}H = -\mathscr{M}^{(\mathrm{II})} \sum_m\sum_n i^n \left[\delta_{2mn} M^{r(1)}_{emn} + i\gamma_{2mn} \cdot N^{r(1)}_{omn} \right] \qquad (\xi < \xi_0) \qquad (10) $$

ここにα_{mn} , β_{mn} ,γ_{mn} 及びδ_{mn} は未定の展開係数で，これは境界条件によって決定される。

第５章　　境界条件の定式化

(5), (7), (8) 又は (6), (9), (10) を explicit に書き下し，第２章で述べた境界条件に代入し，三角函数の直交性を考慮すると，これらの式のmとnについての二重和のうち，mについての級数 (ϕ - 依存) に関しては，各mについて境界条件を表わす等号が成り立つが，nについての級数 (η - 依存) ではそうはならない。そこで，ηの函数項全てを，第１種ルジャンドル陪函数で展開し，その直交性を用いると，最終的には未定係数を決めるための式は，infinite system of coupled linear equations となる。これを実際に解くには，無限級数を充分収斂が保障される有限項で打切る。

第６章　　無限遠方での散乱電磁場

散乱体から充分遠方での散乱電磁場は，発散する球面波としてふるまい，次のように書き表わせる。

i)　TEモード

$$\left.\begin{aligned} {}^{(s)}E_{1\eta} &= {}^{(s)}H_{1\phi}/\mathcal{M}^{(\mathrm{I})} = \frac{i\lambda^{(\mathrm{I})}}{2\pi r} e^{i2\pi r/\lambda^{(\mathrm{I})}} \cdot \sum_{m\,on}\sum_{m} \{ \alpha_{1mn} \cdot x_{mn}(\theta) + \beta_{1mn} \cdot \sigma_{mn}(\theta) \} \sin m\phi \\ {}^{(s)}E_{1\phi} &= {}^{(s)}H_{1\eta}/\mathcal{M}^{(\mathrm{I})} = \frac{i\lambda^{(\mathrm{I})}}{2\pi r} e^{i2\pi r/\lambda^{(\mathrm{I})}} \cdot \sum_{m\,on}\sum_{m} \{ \alpha_{1mn}\, \sigma_{mn}(\theta) + \beta_{1mn} \cdot x_{mn}(\theta) \} \cos m\phi \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

ii) TMモード

$$\left.\begin{aligned} {}^{(s)}E_{2\eta} &= {}^{(s)}H_{2\phi}/\mathcal{M}^{(\mathrm{I})} = \frac{i\lambda^{(\mathrm{I})}}{2\pi r} e^{i2\pi r/\lambda^{(\mathrm{I})}} \cdot \sum_{m}\sum_{n} \{ \alpha_{2mn} \cdot \sigma_{mn}(\theta) + \beta_{2mn} x_{mn}(\theta) \} \cos m\phi \\ {}^{(s)}E_{2\phi} &= {}^{(s)}H_{2\eta}/\mathcal{M}^{(\mathrm{I})} = \frac{i\lambda^{(\mathrm{I})}}{2\pi r} e^{i2\pi r/\lambda^{(\mathrm{I})}} \sum_{m}\sum_{n} \{ \alpha_{2mn} \cdot x_{mn}(\theta) + \beta_{2mn}\, \sigma_{mn}(\theta) \} \sin m\phi \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

但し,

$$\sigma_{mn}(\theta) = m\,\frac{S_{mn}(\cos\theta)}{\sin\theta}, \qquad x_{mn}(\theta) = \frac{dS_{mn}(\cos\theta)}{d\theta} \quad (13)$$

入射波が回転軸に平行に入射する場合($\zeta=0$)には，TE，TMの両モードに対する解は一致する。

第7章，　消散及び散乱断面積

消散断面積 C_{ext} 及び散乱断面積 C_{sca} は次のようになる。

$$C_{r,\mathrm{ext}} = -\frac{\lambda^{2(\mathrm{I})}}{\pi} Re \cdot \sum_{m\,on}\sum_{n} \{ \alpha_{rmn}\, \sigma_{mn}(\zeta) + \beta_{rmn} \cdot x_{mn}(\zeta) \} \quad (14)$$

$$C_{r,\mathrm{sca}} = \frac{\lambda^{2(\mathrm{I})}}{\pi} \cdot \sum_{m\,on}\sum_{n}\sum_{n'} \pi^{m}_{mn'} \circ Re \{ \alpha_{rmn} \cdot \alpha^{*}_{rmn} + \beta_{rmn} \cdot \beta^{*}_{rmn} \} \quad (15)$$

ここに $r=1,2$ はそれぞれ，TE，TMモードの入射波に対応する。

第8章　議　論

この章では，1）5章で述べた η の函数の展開について，検討し，2）楕円体が金属，即ち $\mathcal{M}\to\infty$ の場合の境界条件と，未定係数を決めるための式を示し，3）未定係数 α_{mn}，β_{mn}，γ_{mn}，及び δ_{mn} を決めるためには第5章で述べた system of equations の代りに，半分の大きさの2組の coupled equations を解けば良いことを示した。

以上のように，回転楕円体による散乱問題に対する解は，長球，扁球の両方に対して，同じ形になり，散乱場は次のような5つの物理量で規定される。即ち，回転楕円体の波長に対する相対的大きさ，回転楕円体の形（楕円率等），相対屈折率，入射角及び散乱方向を表わす角座標である。

第2部　長球及び扁球の散乱特性

第1章　序　論

第1部で開発した理論に基づいて計算した結果を示し，回転楕円体の散乱特性を論じる。

第2章　数値計算

解を表わす級数の収束性について調べた。収束は，楕円率が大きい程，即ち，長軸aと短軸bの比a/bが大きくなる程悪くなることが分った。

第3章　nose-on incidence の場合の散乱強度の角度分布

入射光が回転軸に平行に入射（$\zeta=0$）する場合の，a/b ＝2，5，10の長球及びa/b ＝2の扁球に対する散乱光の角度分布をいくつかのサイズ・パラメタ$C^{(I)}=2\pi l/\lambda^{(I)}$について計算した結果を示してある。同じ$C^{(I)}$の値をもつ長球では，a/b が大きい程，即ちより細長くなる程散乱強度は小さくなり，角度分布は激しく変化しており，そのパターンは球による散乱に対するものとかなり異ってくる。

第4章　直線偏光の斜め入射の場合の散乱強度の角度分布

比較的小さい（$C^{(I)}=1$）長球と扁球に直線偏光が，回転軸に対して斜めに入射した場合の散乱光の角度分布を示してある。入射角ζが大きい場合，TEモードの入射光とTMモードの入射光とに対する角度分布はまったく異なるが，$\zeta\to 0$のとき，両者は第3章の$\zeta=0$の場合の結果に帰着する。更に，散乱強度の分布は，長球と扁球とで異なりその形の効果を示している。

第5章　自然光の斜め入射の場合の散乱強度の角度分布

入射光が偏光していない（自然光）の場合の角度分布を示した。斜め入射の場合には，球の場合と異なり，形の影響を示している。サイズ・パラメタを大きくすると（$C^{(I)}=5$），前方散乱が一層卓越し，角度分布のパターンはますます複雑になってくる。

第6章　散乱断面積及びefficiency factors

この章では，$\zeta=0$の場合の長球と扁球の，及び$\zeta\neq 0$の場合のa/b＝2の長球の散乱断面積を，$C^{(I)}$の函数として図示した。散乱断面積の値は，散乱体の幾何学的断面積（入射光による射影面積）で規格化した値（謂ゆる，efficiency factors）で示してある。
$C^{(I)}\leqq 7$では，efficiency factorsは，$C^{(I)}$が大きくなる程，その値が大きくなり，$\zeta=0$の場合にはfirst resonanceはa/b が大きい程，$C^{(I)}$の大きな処で起き，そのmaximumの値も大きくなっている。更に，$\zeta=0$の場合には，長球の散乱断面積は，TMモードの入射光に対する場合の方がTEモードの入射光によるものより大きくなっており，その差は入射角が大きくなる程，明瞭になっている。最後に球による散乱との比較により，長球による散乱の特徴について簡単に論じた。

論文審査結果の要旨

浅野正二提出の論文は氷晶等の非球形粒子による光の散乱問題に対する理論的アプローチとして，回転楕円体形粒子を選び，それによる光(電磁波)の散乱特性の解明を試みたものである。回転楕円体を選んだ理由は，それが球に次いで幾何学的に単純であり，その上楕円の焦点距離，楕円率を変えることにより種々の大きさと形を表わせる柔軟性による。

論文は2部に分かれており，第1部においては，任意の(複素)屈折率をもつ均質な長球及び扁球による電磁波の散乱問題を任意のOrientationについて統一的に解いている。

用いられた方法は，電場磁場ベクトルを回転楕円体ベクトル波動函数で展開し，境界条件によって展開係数を決定するという常套的手法であるが，回転楕円体波動函数が座標変数のみならず媒質の函数でもあり，異なる媒質に属する波動函数間の非直交性のために従来成功しなかった。著者は，これらの波動函数をルジャンドル陪函数の級数で表わし，その直交性を利用することにより困難さを克服した。展開係数を決定するための式は，モード結合により連立方程式系になるが，方程式の係数の性質に着目し，それを半分の大きさの2組の方程式系に分解することにより，数値計算上の便利を計っている。得られた解は，偏光を考慮した厳密解であり，実際には数値計算に伴う限界があるが，原理的には，球に対するMie理論と同様に，任意の大きさ，任意の形の回転楕円体に適用できる理論である。

第2部においては，計算結果に基づいてこの理論の正しさと有効性を示し，合せて，入射波長と同程度の大きさの回転楕円体による散乱特性を論じている。まず，著者は解を表わす級数の収束性を検討し，楕円率が大きいほど収束が遅いことを示した。次いで，散乱光の強度及び角度分布に対する楕円体の大きさと形の影響について調べ，長球と扁球とではその強度と分布の様子が異なること，楕円率を大きくしてやると角度分布は球に対するものと著しく異ったものとなり，入射方向に関して非対称な分布になること，更にそれらは入射光の偏光状態によっても異なることなどを明らかにした。

有限の大きさの非球形球子の散乱特性を理論的に解明したのは，これが初めてであり，ここで得られた結果は一個の回転楕円体粒子によるもので，それを直ちに現実の大気，海洋中の非球形粒子に当てはめることは出来ないが，それら非球形粒子による散乱の理論的取扱いに対する道を開いたものと言える。よって本論文は理学博士の学位論文として合格と認める。