氏名・(本籍)	藪田公三（やぶた こうぞう）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第452号
学位授与年月日	昭和50年1月29日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	京都大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Theory of Abstract Hardy Spaces （抽象ハーディ空間論）
論文審査委員	（主査） 教授 洲之内源一郎　教授 深宮政範 教授 黒田正

論文目次

論文内容要旨

まえがき

この論文で扱う抽象ハーディ空間は次のようなものである。まず (X, Σ, m) という確率空間があって，その上の $L^\infty(m)$ の weak* 閉な部分代数 H が常数函数を含み，さらに $\int uvdm = \int udm \times \int vdm\ (\forall u, v \in H)$ をみたすとき，H は抽象 H^∞ 空間と呼ばれる。この H の $L^p(m)$ 閉包を H^p で表わす。これらが複素平面の単位円板 U 上の古典的なハーディ空間 $H^p(U)$ に対応する。よく知られている函数環から出発して作った H^p も我々の例になる。我々は又一般な領域上のハーディ空間も扱う。この論文は 4 章に分かち，一章から三章で H^p 上の極値問題を色々な場合に応じて扱い、四章では抽象 H^∞ 空間の各元の値域を調べ，平面上の幾何学的概念であるカラテオドリ領域との関連を明らかにする。その際ドイツでの学位論文に使用した Loewnerの補題の一般化を使うので，それに関連して二編の参考論文を付け加える。

第一章　抽象ハーディ空間における極値問題について

E をノルム空間，Φをその部分線型空間，S をE から複素数全体Cの中への連続線型汎函数とする。$S(\varphi_0) = \sup_{\|\varphi\|=1}\{|S(\varphi)|,\ \varphi \in \Phi\}$をみたす$\varphi_0 \in \Phi$ が存在するか，あるいは存在したとしたら一意的かというのがわれわれのいう極値問題である。一般にEが回帰的でΦがEの閉部分空間のときは常に肯定的である。したがって H^p に対するときも $1<p<\infty$ なら一般的に正しい。又，$p=\infty$のときも Rogosinski - Shapiro (Acta Math, 1953) の手法で正しいことがわかる。そこで著者は de Leeuw - Rudin (Pacific J. Math., 1958) の単位円板に対する $H^1(U)$ の結果の改良及び抽象化として次を示した。以下Hが抽象 H^∞空間で $u \in H$が $|u|=1$ とき u を内部函数と呼び，$h \in H^1$で $|\int hdm| = \exp(\int \log|h|\, dm)$ となるときh を外部函数と呼ぶ。

定理．Hが抽象H^∞空間であって，$\int ugdm = \int udm\ (\forall u \in H)$ をみたす $g \in L^1(m)$ は $g=1$ しかないとする。さらにf は H^1上のある線型汎函数に対する極値問題の解であるとする。すると，もし f が外部函数で $f^{-1} \in L^1(m)$ならば，実はこれが唯一の解である。

これは次のように一般化できる。

定理．Hは上と同じとし，$p \geq \frac{1}{2}$ とする。このとき $f \in H^1$ が外部函数で $f^{-1} \in L^p(m)$なら

$$\begin{cases} g \in H^q & (1/q + 1/p = 2) \\ \|f\|_1 = \|g\|_1 & \\ \operatorname{Arg} f = \operatorname{Arg} g & a.e. \end{cases}$$

より　$f=g$ が従う。

又，関連したものとして，上のHに対する条件の下に，〃$f \in H^{1/2}$で $f \geq 0$ ならば，実はf は常数である〃という Neuwirth - Newman の定理の一般化が得られる。

第二章　多重円板あるいは有界対称領域上のハーディ空間における極値問題について

複素n次元ユークリッド空間$\mathbf{C}^n$上の単位多重円板U^nあるいはより一般に$\mathbf{C}^n$上の有界対称領域上にハーディ空間が単位円板Uのときと同様に定義されるが，このとき$n \geqq 2$なら第一章で述べた条件（表現測度の一意性）が成り立たないが，それでも前章の結果は正しいことを示す。それに関連して，$H^1(U^n)$における極値点と外部函数の関係も調べる。

第三章　多重円板上のハーディ空間におけるある種の一意性定理

前章の最後の部分とも関連するのであるが，$H^1(U)$及び$H^1(U^n)$についての極値問題の解の一意性に対する十分条件をさらに二つ与え，その中の一つは次のように強めることができることを示す。

定理．f, gがU^nで正則で，その値域が共に開角$\alpha\pi$（$0<\alpha<2$）の原点を頂点とした扇形領域に含まれるとする。このとき$\lim_{r\to 1} f(rw)$, $\lim_{r\to 1} g(rw)$はU^nのシーロフ境界T^n上のほとんどすべての点$w \in T^n$に対して存在するが，それをf^*, g^*で表わすとき，もしf^*/g^*がT^n上実数値函数となり，さらに$\{w \in T^n : u < f^*/g^*(w) < v\}$のルベーグ測度がある$u < v \leqq 0$に対して0になるなら，実は$f/g$は常数函数である。

又，関連した話題として外部函数であるための十分条件をいくつか吟味する。

第四章　抽象H^∞空間とカラテオドリ領域

ここでの主題は次の四つの定理にまとめられる。まず定義を二つ述べ次に定理を与える。

定義．$\mathbf{C}$上の有界領域Dに対してD_∞を$\mathbf{C} \setminus \overline{D}$の開成分の中，有界でないものとする。$\partial D = \partial D_\infty$となるとき，$D$をCaratheodory（カラテオドリ）領域と呼びC－領域と書く。C－領域は必然的に単連結である。ジョルダン領域はC－領域である。

定義．$\mathbf{C}$上の領域Dに対して$H^\infty(D)$はD上の有界な正則函数全体に一様ノルムを入れたものとする。領域Dが極大であるとは，Dのどの境界点についても，その点を越えて正則有界に拡張できない$f \in H^\infty(D)$が存在することをいう。単連結領域は極大である。

定義．Hは抽象H^∞空間とする。常数でない$u \in H$には次のようなC－領域が（Γと書く）唯一つ対応する。(i) $m\{u(x) \in \overline{\Gamma}\}=1$, (ii) $\int u\,dm \in \Gamma$, (iii) $m\{|u(x)-b|<\varepsilon\}>0$, $\forall\varepsilon>0$, $b \in \partial\Gamma$。

さらにuのHにおけるスペクトル集合$\sigma(u)$は$\overline{\Gamma}$に含まれ，かつ$\partial\Gamma \subset \sigma(u)$である。

定理．Hは抽象H^∞空間とする。DはC－領域であるとする。さらに，$u \in H$は常数でなく，$m\{u(x) \in \overline{D}\}=1$で$\int u\,dm \in D$とする。すると，すべての$f \in H^\infty(D)$に対して，合成函数$f(u) = f \circ g^{-1}(g(u))$がうまく定義でき次のような性質を持つ。ここで$g$は$D$から単位円板$U$への等角写像である。

(i) $f(u)$はgのとり方によらない。

(ii) $f(u) \in H$, $\int f(u)\,dm = f(\int u\,dm)$, $\forall f \in H^\infty(D)$。

(iii) $\varphi \in \mathscr{M}(H)$で$\varphi(u) \in D$ならば，$\varphi(f(u)) = f(\varphi(u))$, $f \in H^\infty(D)$。

(iv) $f\in H^\infty(D)$ が $\overline{D}$ まで連続ならば，$f(u)(x)=f(u(x))$。

(v) $m\{u(x)\in D\}=1$ ならば，$f(u)(x)=f(u(x))$, $\forall f\in H^\infty(D)$。

ここで $\mathscr{M}(H)$ は H 上の nonzero muliplicative linear functionals の全体とする。

定理．H は抽象 H^∞ 空間とし，H の中に $|u|=1$ なる常数でない函数が存在するものとする。又 D は C－領域であるとする。さらに，$f(z)$ は D 上すべての点で定義されたルベーグ可測函数とする。f が次の条件(*)をみたすための必要十分条件は $f(z)$ が D で有界かつ正則なことである。

(*) $m\{v(x)\in D\}=1$ と $\int vdm\in D$ をみたすすべての $v\in H$ に対して $f(v)\in H$ でかつ $\int f(v)dm=f(\int vdm)$。

定理．D は極大な有界領域とする。すべての抽象 H^∞ 空間 H に対して次の (**) が成り立つための必要十分条件は，D がカラテオドリ領域であることである。

(**) $m\{u(x)\in D\}=1$ と $\int udm\in D$ をみたすすべての $u\in H$ とすべての $f\in H^\infty(D)$ に対して，合成函数 $f(u)$ が又 H に属する。

これらに関連してカラテオドリ領域を抽象 H^∞ 空間的な面から色々な性格付けを行なう。

論文審査の結果の要旨

本論文は抽象 Hardy 空間の理論に関したものである。(X, m) を確率測度空間とし、$L^\infty(m)$ の w^*で閉じた部分代数で 1 を含み，かつ積分が、その上の積形線形汎関数であるものを抽象 $H^\infty(X)$という。さらに $0<p<\infty$ に対し $H^\infty(X)$ の $L^p(m)$ 閉被を p 次の抽象 Hardy 空間 $H^p(X)$ という。

著者は本論文において抽象 Hardy 空間における極値問題の解の一意性及びそれに関連して $H^\infty(X)$ の関数の 値域についての研究を行なっている。極値問題の解については $H^p(X)$ $(1<p\leqq\infty)$ では解決している故，$p=1$ に限定している。代表的な結果は f が外部関数で $1/f \in L^1(m)$, $g \varepsilon H^1$, $\|f\|_1=\|g\|_1$, $\arg f=\arg g$, $a.e. (\bmod 2\pi)$ ならば $f=g$ となることである。これはX が単位円板の時でも，de Leeuw - Rudin の結果より精密な結果である。さらにこの応用として非負値な $H^{\frac{1}{2}}(X)$ は定数に限るという Neuwirth - Newman の定理の拡張が出ることは興味深いことである。次の第二、第三章では、領域を特殊にした場合，即ち多重円板，有界対称領域($\mathbf{C}^n$上の)上の極値問題，U^n上の $H^1(U^n)$に関連した種々の関数空間についての極値問題の一意性等を論じている。第四章は $H^\infty(X)$の値域と Carathéodory 領域を論じた種々の定理を与えている。特に $H^\infty(X)$ によって Carathéodory 領域の特徴付けを与えたことは注目すべき結果である。

参考論文は二篇で主論文の前半の延長線上にあるもので，一つは非負値な実部を持つ抽象 Hardy 空間の特徴付けで、これは $H^1(X)$の極値問題及び関数値の分布に関係する。第二のはこの続きで Löwner の定理の精密化で，主論文の前半と後半の橋渡しをするものであるが、これらは西ドイツで著者の *PhD* 学位論文となった為に参考論文としたものである。

以上のべた如く，本論文は抽象 Hardy 空間という，実解析と複素解析の出会う分野において興味ある貢献をなしたもので，博士論文として合格と認める。