氏名・（本籍）	吉野　崇（よしの　たかし）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第465号
学位授与年月日	昭和50年7月2日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和39年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	On hyponormal operators （亜正規作用素について）
論文審査委員	（主査） 教授 深宮政範　教授 土倉　保 教授 黒田　正

論文目次

論 文 内 容 要 旨

緒 言

ヒルベルト空間の作用素論に於て，正規作用素は最も重要な扱いやすい作用素として知られている。その構造はスペクトル分解定理を通じて詳しく研究され，スペクトル理論が確立されている為である。従って非正規作用素の研究に於ては，どの程度まで，又如何にして正規作用素の場合に帰着させ得るかが大切な問題となる。

非正規作用素の，正規作用素との関係を調べる上で最も基礎になった結果は，１９４０年の対称作用素についてのＮｅｕｍａｒｋの拡張定理である。ここで導入された"与えられた空間の拡張を許す作用素の拡張"の概念は，ヒルベルト空間Ｈ上の任意の有界線型作用素が拡張されたヒルベルト空間上の正規作用素の，もとの空間Ｈ上への射影として表現出来る事を示唆し，この事は，一方に於ては，Ｎａｇｙ 及びＦｏｉａｓ による縮小作用素のｕｎｉｔａｒｙ ｄｉｌａｔｉｏｎ の理論(1953)へと進展し，又一方に於ては，Ｈａｌｍｏｓ（１９５０）による正規作用素に拡張可能な作用素のｃｌａｓｓ の導入の誘因となるのである。

この正規作用素に拡張出来る作用素を劣正規作用素という。Ａを劣正規作用素とすると，$A^*A \geqq AA^*$ なる条件を満たし，これは正規作用素を特徴づける条件 $A^*A = AA^*$ より弱い。この条件を満たす作用素を亜正規作用素という。又，$A(A^*A) = (A^*A)A$ なる条件を満たす作用素を準正規作用素といい，これは劣正規作用素の一つである事が知られている。

これらの作用素は１９５０年にＨａｌｍｏｓによって導入されて以来（準正規作用素については，１９５３年にＢｒｏｗｎ によって導入された）非正規作用素の主要なテーマとして，多くの人々によって調べられて来た。著者は，１９６７年以降，このテーマととり組み以下に述べる成果をあげた。

主論文は，次の〔１〕から〔６〕までをまとめたもので〔７〕から〔１０〕までは参考論文である。

主 論 文

〔１〕 Spectral resolution of a hyponormal operator with the spectrum on a curve, Tôhoku Math. J., 19(1967) 86-97.

〔２〕 Nearly normal operators, Tôhoku Math. J., 20(1968) 1-4.

〔３〕 Subnormal operator with a cyclic vector, Tôhoku Math. J., 21(1969) 47-55.

〔4〕 On the commuting extensions of nearly normal operators, Tôhoku Math. J., 25(1973) 263-272.

〔5〕 Note on Toeplitz operators, Tôhoku Math. J., 26(1974) 535-540.

〔6〕 Hyponormal operators in von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., (to appear).

参考論文

〔7〕 Note on the canonical decomposition of contraction (with T. Saitô), Tôhoku Math. J., 16(1964) 309-312.

〔8〕 On a conjecture of Berberian (with T. Saitô), Tôhoku Math. J., 17(1965) 147-149.

〔9〕 On a class of operators (with T. Saitô and V. Istratescu), Tôhoku Math. J., 18(1966) 410-413.

〔10〕 A note on a result of J. Bram, Proc. Japan Acad., (to appear).

第１章　曲線上にスペクトルを持つ亜正規作用素のスペクトル分解

亜正規作用素のノルムはそのスペクトル半径と一致する事が知られているが，この性質は正規作用素の持つ典型的性質の一つである。この性質からそのレゾルベント作用素のノルムを評価する或る条件を満たす事がわかる。この条件がDunfordの意味のスカラー型のスペクトル作用素になる為の必要条件の一つである事に注目して，著者は亜正規作用素のスペクトルが長さのある区分的に滑らかな曲線上に存在する場合にSchwartzに依るレゾルベントの解析接続の技法を応用してスペクトル部分空間を直接構成出来る事を調べた。

定理　亜正規作用素のスペクトルが長さのある区分的に滑らかな曲線上にあれば正規作用素である。

この結果はPutnam の結果（１９７０）の基礎となったものであり，又このスペクトル部分空間の構成は自己随伴作用素の場合のLorch の結果（１９５０）と比較評価される。

第Ⅱ章　関数空間上の積作用素の制限としての劣正規作用素とテープリッツ作用素

非正規作用素の最も基本的問題は，その不変部分空間の存在である。不変部分空間の存在は正規作用素の基本的性質の一つでそれらの特別なものがスペクトル部分空間であり，これらは正規作用素のスペクトル理論を構成する本質的なものであるからである。この問題は劣正規作用素についても解けていない。この問題を考える場合にはその作用素が巡回ベクトルを持つという条件の下で考えれば良い事がわかるが，この条件の下で劣正規作用素を考えると，その拡張のスペクトル分解を用いて，或る関数空間上の積作用素をその不変部分空間へ制限した作用素として表現出来て，しかもその劣正規作用素と可換な任意の作用素も同じ空間上の積作用素を同じ部分空間に制限した作用素として表現出来て，それらの全体はHardy の意味のH^{∞}と一致する事がわかる。第1節ではこの表現を用いて巡回ベクトルを持つ劣正規作用素の生成する作用素環の構造及び劣正規作用素の不変部分空間の存在に対する十分条件について得た結果を示した。

定理　巡回ベクトルを持つ劣正規作用素と可換な作用素は劣正規である。従って特にその随伴作用素とともも可換ならば正規である。

この事は巡回ベクトルを持つ劣正規作用素の生成する作用素環がⅠ型である事を示している。これはWogen の学位論文（1969）の基礎となったものの一つである。

定理　Bを劣正規作用素Aの拡張とするとき，$\widetilde{\mathcal{R}}_0(\sigma(B))\cap\overline{\widetilde{\mathcal{R}}_0(\sigma(B))}\neq\{C\cdot 1\}$ならAは不変部分空間を持つ。ここで$\widetilde{\mathcal{R}}_0(\sigma(B))$はBのスペクトル$\sigma(B)$に極を持たない有理関数全体の一様閉包で$\overline{\mathcal{R}_0(\sigma(B))}$はその複素共役関数の全体を表わす。

これはWermerの結果（1955）の拡張になっている。

定理　劣正規作用素Aと可換な非スカラー作用素Tで或る非零ベクトルyに対して$\|Ty\|=\|T^{*}y\|$なるものが存在すれば，Aは不変部分空間を持つ。

関数空間上の作用素として良く知られているテープリッツ作用素は単純片側推移作用素と密接な関係があり，単純片側推移作用素は第1節で調べた巡回ベクトルを持つ劣正規作用素の一つである。この関係で第2節ではテープリッツ作用素を扱う。単純片側推移作用素の不変部分空間の構造については有名なBeurlingの結果（1949）が知られているが，その不変部分空間はそれと可換な任意の作用素の不変部分空間にもなっている事がわかる。この性質を用いて，著者はテープリッツ作用素を定義する関数が内部関数になる為の条件をそれが作用する空間の部分空間の言葉で表わす事が出来る事を示した。又テープリッツ作用素の点スペクトルの性質を得た。

定理　$T\varphi$を縮小テープリッツ作用素とするとき，$\{f\in H^2 : \|T\varphi^n f\|=\|f\|,\ n=1,2,\cdots\}\neq\{0\}$ならば，$\varphi$は内部関数である。

系　$T\varphi$がノルムに到達する亜正規テープリッツ作用素なら，φは内部関数のスカラー倍である。

定理　L^{∞}の非定数関数φに対して，$\sigma_p(T_\varphi)\cap\overline{\sigma_p(T_{\varphi}{}^{*})}=\phi$ である。ここで$\sigma_p(T_\varphi)$はテープリッツ作用素$T\varphi$の点スペクトルを表わす。

系　L^{∞}の非定数関数φに対して，$T\varphi$が亜正規テープリッツ作用素なら$\sigma_p(T_\varphi)=\phi$である。

これらの結果はテープリッツ作用素の持つ本質的な性質の一つと考えられる。何故ならBrown及びHalmos (1963)，Goor (1972)，Hartman 及びWintner (1954)，Brown 及びDouglas (1965) 等によって得られた結果がこれらの結果に帰着してしまうからである。

第Ⅲ章　準正規作用素の構造と作用素環の中の亜正規作用素

等長作用素の生成する作用素環がⅠ型である事が鈴木氏によって示されて以来この等長作用素に近い準正規作用素の場合が問題となっていた。第1節では準正規作用素の極分解に於て現われる部分等長作用素の固有空間及び推移部分空間の構造を調べる事によって，準正規作用素及びその随伴作用素と可換な作用素の構造を明らかにし，この問題を解いた。

定理　準正規作用素の生成する作用素環はⅠ型である。特にAが完全非正規準正規作用素ならばその生成する作用素環の中心は$(A^{*}A)^{1/2}$によって生成される。

この結果は，等長作用素の場合の鈴木氏の結果 (1963) の拡張になっている。又，Wogen の学位論文 (1969) の基礎になったものの一つでもある。

第2節では，準正規作用素とその拡張の極分解の間の関係を調べ二つの準正規作用素が互いに可換な拡張を持つ為の必要十分条件を与えた。

定理　H上の準正規作用素Aとその拡張Bの極分解を$A=V|A|$，$B=U|B|$とすると，VはUを$|A|$は$|B|$を，それぞれHに制限した作用素になっている。

定理　H上の準正規作用素Aの極分解を$A=V|A|$とするとき，H上の作用素TがAの拡張と可換な拡張を持つ為の必要十分条件は，TがV及び$|A|$と可換である事である。

この結果は劣正規作用素の場合のBram の結果 (1955) との関係が深い。

定理　H上の二つの準正規作用素A_1，A_2の極分解を，$A_1=V_1|A_1|$，$A_2=V_2|A_2|$とするとき，これらが同一空間上の互いに可換な拡張を持つ為の必要十分条件は，各V_1，$|A_1|$がV_2及び$|A_2|$と，それぞれ可換である事である。

これらの結果は将来応用上有効と思われる。

第3節では作用素環の中の亜正規作用素が，その中の縮小作用素と密接な関係がある事を調べその応用について示した。又縮小作用素の標準分解に関連して，亜正規作用素の正規部分の作用する部分空間の構造を明らかにした。

定理　作用素環の中の任意の亜正規作用素が正規である為の必要十分条件はその中の任意の完全非合同縮小作用素Tに対して，T^nが零作用素に強収束する事である。

これは，Foias 及び Kovàcsの結果（1962）に関連した結果で，トレースの議論を使わずに示したものである。将来その応用が考えられる。

定理　H上の亜正規作用素Tの正規部分の作用する部分空間$H^{(n)}$は，次の形で特徴づけられる。

$$H^{(n)}=\{x\in H : \|T^k x\|=\|T^{*k}x\|,\ k=1,2,\cdots\cdots\}$$
$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{x\in H : T^{*k}T^k x=T^k T^{*k}x\}。$$

この結果はApostol（1966），Morrel（1973）等による非正規作用素の一連の分解定理に関連した亜正規作用素の分解であり，この構造は縮小作用素の合同部分の作用する部分空間の構造と非常によく似ている事がわかる。

参考論文

この中の幾つかは，斎藤氏との，又は斎藤氏及びIstratescu との共同研究に於て得られたもので，それらは縮小作用素のスペクトルに関する結果，亜正規作用素の数域に関するBerberianの予想に関する結果及び或る種の作用素の正規性に関する結果である。

他は，Bram の或る結果についての一注意である。

論文審査の結果の要旨

本論文は亜正規作用素，劣正規作用素，準正規作用素等の非正規作用素についての研究を述べたものである。

第Ⅰ章は曲線上にスペクトルが分布する亜正規作用素を対象とした有界作用素のスペクトル解析論で，Schwarz教授の一方法に準じているが，レゾルベント作用素の増大条件，スペクトルの分布条件及び純連続スペクトルの3条件の下で展開されてあり，この解析法は曲線上にスペクトルをもつ亜正規作用素のみでなく，後にPutram教授が指摘したように類似の場合にも応用できるものである。この結果として，長さある区分的に滑かな曲線上にスペクトルをもつ亜正規作用素は正規作用素であることが証明されている。

第Ⅱ章は巡回ベクトルをもつ劣正規作用素のHahn−Hellinger型定理，不変部分空間及びテープリッツ作用素論への一知見を示したもので，第1節は劣正規作用素Aが巡回ベクトルをもてばA並にAと交換できる凡ての作用素はAの最小正規拡張Bのスペクトル上の函数空間 $H^2(d\mu(\lambda), \sigma(B))$ 上の乗積作用素としてユニタリー同値に表現され，且かかるもの全体はHardy クラス $H^\infty(d\mu(\lambda), \sigma(B))$ と一致することを示した。之は良く知られたHahn−Hellinger 定理のアナロジーを劣正規作用素に対して示した新しい知見で，応用として特に巡回ベクトルをもつ劣正規作用素の生成するVon Neumann 代数はⅠ型であること，劣正規作用素の不変部分空間についての知見を得た。第2節は単純片側推移作用素は巡回ベクトルをもつ劣正規作用素であることから，Halmos−Brown の研究と前節で得た表現定理の応用によって，この作用素と密接なテープリッツ作用素について多くの研究者によって得られた諸定理等がヒルベルト空間の技法で導くことができ，更にテープリッツ作用素とユニタリー同値となる作用素の特長づけを示した。

第Ⅲ章は作用素の極分解表示を主眼点とした準正規作用素の研究である。第1節は準正規作用素の作用空間は極分解によって定められる3個の直交成分に分けられ，夫々に於てこの作用素は正規又は完全非正規作用素として作動する。その結論の一は，準正規作用素の生成するVon Neumann 代数はⅠ型である等が示されている。第2節は2個の準正規作用素の可換な正規拡張の存在問題がそれ等作用素の極分解から解答されることが示されている。又第3節は亜正規作用素の正規部分の作用空間の特長づけ及び亜正規作用素によって，Von Neumann 代数のFoias−Kovàcs の有限型条件を改良しうる事を示したものである。

参考論文4篇も夫々興味ある研究である。之を要約すれば，本論文は非正規作用素の種々のクラスについて多くの観点から種々の研究を行って，作用素論の分野に重要な貢献をなしたものと言うことができる。仍って審査員一同は吉野崇提出の学位申請論文は理学博士の学位論文として合格と認めた。