氏名・(本籍)	芳　賀　義　則（こが　よしのり）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	理　第　488　号
学位授与年月日	昭和51年2月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和31年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	On crossed products of von Neumann algebras.（フォン.ノイマン代数の接合積の研究）
論文審査委員	（主査） 教授　深宮政範　　教授　吉沢太郎 教授　黒田　正 教授　斉藤　偵四郎

論　文　目　次

Introduction.（序文）

1. Crossed products of von Neumann algebras by compact groups.
（フォン・ノイマン代数のコンパクト群による接合積）

2. On subalgebras of a cross product von Neumann algebra.
（フォン・ノイマン代数の接合積の部分代数について）

3. On approximately finite algebras.
（漸近有限代数について）

論 文 内 容 要 旨

〔序文〕 数学の多くの分野において，研究対象の構造をより簡単な扱い易い対象を用いて，記述し把握しようとする構造理論が主要な課題となるが，von Neumann 代数（以下V. N. 代数と略記）の理論においては，Murray-von Neumann による因子（factor）の I_n , I_∞, II_1 , II_∞, III型への基本的な分類以来，II型，III型のv.N. 代数の構造理論は困難な問題として残されてきた。最近III型の場合については，富田一竹崎理論を背景にして Connes や竹崎等による大きな進展が見られ，問題をII型代数の構造に帰着させ得ることが明らかになったが，II型の場合については，非可算個の異なる代数型の因子が存在するという Mc Duff の結果以外には著しい結果は公表されていない。最も典型的かつ基本的なII型因子である漸近有限因子(hyperfinite factor）についても，未解決の問題が数多く残されているのが，現状である。この論文も v. N. 代数の代数型に関する研究であり，特に接合積を用いて，主としてII型の代数を研究する事を主題とする。第1章では，コンパクト群による接合積を考察し，第2，第3章では離散群による接合積を用いて漸近有限代数について考察する。

v. N. 代数の自己同型群による接合積は，実質的には既に１９３６年 Murray-von Neumann によって因子の一例の構成に際して用いられたが，それが多元環の拡大に用いられる接合積の自然な類似に他ならない事に着目し，鶴丸，中村一武田，鈴木等の諸氏は1958〜1961年頃 II型因子の研究の為にこれを明確に接合積として取り上げ，その研究を開始して基本的な骨組を作り上げた。因子の構成法として接合積は因子の所謂，測度構成と群構成を特別の場合として含む最も一般的な方法である。これがテンソル積と共に v. N. 代数の研究に欠くべからざる手段であることは近年特に急速に認識されつつある所である。例えば，最近大きな話題となった Connes によるIII型因子の分類の理論や，竹崎によるIII型代数の構造定理等において果たした接合積の役割を見ても，それは当然の事であろう。II型代数の今後の研究にも接合積はこれまで以上に重要な役割と位置を占めるであろうことは疑いない。

〔第1章〕 コンパクト群による v.N. 代数の接合積を考察し，2つの構造定理を示す。鶴丸に始まる接合積の研究は，従来その殆どが離散群による接合積に限定されていた。局所コンパクト群による接合積は，C^*-代数の場合については，数理物理学者の Doplicher-Kastler-Robinson によって １９６６年“共変代数”の名で取り上げられたが，v.N. 代数の場合については，ようやく １９７３年竹崎のIII型代数の構造に関する論文において初めて明確な定義を与えられた。彼はIII型代数がII型代数と1径数の自己同型群との接合積として表現されることを示し，又その中には離散接合積としては表現し得ないものもある事を示した。従って連続（群による）接合積についての

一般論が当然望ましいわけであるが，それは離散接合積の場合に比して著しく困難であり，竹崎による基本的な幾つかの結果の他には殆ど何も知られていないと云ってよいのが現状である。それは主として接合積の元を明確に表示する方法が見つかっていない所に原因があり，例えば接合積の中心を求めることもままならない等，離散接合積に較べて研究上不利な点が多い。ここでは基礎的な場合としてコンパクト群に限って考察するが，群の可換性は前提しない。可換群の場合については参考論文〔 5 〕において詳しく論じた。

Aを可分ヒルベルト空間H上の v.N. 代数，GをA上の自己同型の（第2可算公理を満たす）コンパクト群とする。自己同型$g \varepsilon$ Gを誘導するH上のユニタリ作用素をU_gで表わす。ヒルベルト空間$L^2(H.G)$上にAの表現π，π' とGの表現λ. λ'をそれぞれ次の様に定義する。$A \varepsilon A$，$g.h \varepsilon G$，$\xi \varepsilon L^2(H.G)$として

$(\pi(A)\xi)(g) = g^{-1}(A)\xi(g)$，　$(\lambda(h)\xi)(g) = \xi(h^{-1}g)$

$(\pi'(A)\xi)(g) = A\xi(g)$，　　$(\lambda'(h)\xi)(g) = U_h\xi(gh)$

$\pi(A)$と$\lambda(G)$によって生成される$L^2(H.G)$上の v.N. 代数$R(A.G)$が通常の接合積であるが，$\pi'(A)$と$\lambda'(G)$で生成されるもう一つの接合積$R'(A.G)$を定義する。これは$R(A.G)$に同型な v.N. 代数である。一方，$L^2(H.G)$の元をフーリエ展開することによって,$L^2(H.G)$を互いに直交する可算個の部分空間H_α $(\alpha \varepsilon \widehat{G})$に分解することが出来る。特に定ベクトル値関数全体から成る部分空間をH_iで表わすことにする。上の2種類の接合積$R(A.G)$，$R'(A.G)$の各々をこの分解と結びつけて考察することによって，次の２つの構造定理が得られる。

定理（Theorem2.2　Corollary 2.3）

H_2上への射影の$R'(A.G)$における中心台（central support）が恒等作用素に一致するならば，従って特に接合積が因子ならば，$R(A.G)$は原空間HにおいてAと$U_G = \{Ug : g \varepsilon G\}$から生成される v.N. 代数と同型である。

この定理はコンパクト群による接合積を考える限りにおいては，空間Hを$L^2(H.G)$に拡げる必要がなく，Hにおいて，AにユニタリUg $(g \varepsilon G)$を添加するだけの簡単な構造になることを示している。

定理（Theorem3.1　Theorem3.3）

各H_α上への射影がH_i上への射影に同値な或る個数（αに属する既約表現の次元の２乗）の部分射影に分解されるならば，特にAが半有限で$R(A.G)$が因子ならば，$R(A.G)$はテンソル積，$A^G \otimes L(L^2(G))$に同型である。

ただし，A^GはGによるAの固定元から成る部分代数，$L(L^2(G))$は$L^2(G)$上の有界作用素全体の代数を表わす。

この定理は接合積の代数型がA^Gによって，ほぼ定まることを示している。これらの定理から連続接合積と離散接合積との著しい相違が明らかになる。例えば，Ⅱ型因子の外部自己同型の離散群による接合積は常に再びⅡ型因子であるのに対し，コンパクト群による接合積では一般に無限型になってしまうだけでなく，Ⅰ型に退化してしまう。上の定理の条件を満足するような自己同型群は，離散群の場合の freely actingに相当する性質に密接に関連していることが分かるが，連続群の場合にはまだ有用な特徴付けは知られていない。ともかく上の定理の結論から見て，コンパクト群による接合積の型は常に退化の方向に向かうものと思われる。この事は少なくともⅡ型因子の構成や分類を考えるときは，離散接合積を用いる方がより自然であることを示唆している。そして，この章で用いられた手段は離散接合積に対しても有効であることが予想されるが，それはこれからの研究課題である。

〔第2章〕 この章では離散接合積を扱い，特に保測変換群に関する Dye の理論の一般化を主題とする。彼のこの理論が接合積を用いることによって簡明になり，かつ非可換代数の場合へ拡張出来る事は，既に芳賀一武田の共同研究（参考論文〔4〕）において明らかにされている。ここでは更にその考察を進める。以下Aは有限型，GはAの可算自己同型群とする。先ずDye による決定関数の概念を接合積の観点から捉えてその性格を明らかにし，それによって$A\subset B\subset R(A.\mathrm{G})$なる$B$（これを$R(A.\mathrm{G})$の中間部分代数とよぶ）の元を表示する方法を示し，これを下記のアーベル射影に関する計算に利用する。他方，自己同型群が充満（full）であるというDyeの概念は，参考論文〔4〕において，内部自己同型を無視するという着想によって，一般の v.N. 代数の場合へ拡張されている。ユニタリUの誘導する自己同型をφ_{U}で表わし，またAを不変にするような$R(A.\mathrm{G})$の自己同型全体をNで表わそう。このとき$R(A.\mathrm{G})$の中間部分代数BとGの充満化〔G〕の充満な部分群Kとの間に与えられる対応

$B=R〔\mathrm{U}〕\varphi_{\mathrm{U}}\ \varepsilon\ \mathrm{K}〕\leftrightarrow \mathrm{K}=\{\varphi_{\mathrm{U}}\ |\ \mathrm{U}\ \varepsilon\ N\cap B\}$ を Dyeの対応とよぶ，GがA上で freely acting であれば，この対応は束同型になる（〔4〕）。

さて，Bを$R(A.\mathrm{G})$の中間部分代数とするとき0でない射影$\mathrm{P}\ \varepsilon\ B$が$A$に関するアーベル射影であるとは，$\mathrm{P}\ \varepsilon\ A'\cap B$かつ$\mathrm{P}A=\mathrm{P}B\mathrm{P}$なることである。今$B$が$A$に関してⅠ型であるとは，$B$の0でない任意の中心射影が$A$に関するアーベル射影を含むこととし，また$B$が$A$に関するアーベル射影を全く含まないときは，$B$を$A$に関して，Ⅱ型であるとよぶことにする。一方，Gの充満化〔G〕の充満な部分群KがⅠ型（Ⅱ型）であるとは，Aの中心Zが上の意味で固定代数Z^{K}に関してⅠ型（Ⅱ型）なることとして定義する。然かるとき

定理（Theorem 4.9 Theorem 4. 10）

Dey の対応によって，中間部分代数$B\subset R(A.\mathrm{G})$と充満な部分群K⊂〔G〕が対

応するならば，GがZ上で freely acting なるときは，BのAに関する型とKの型とは一致する。特に，AがI型であるときは，Bの通常の意味での型がKの型と一致する。

この定理の後半は Dye の結果の拡張になっている。これによって接合積$R(A.G)$を近似する部分代数Bの型を，対応する群Kの型へ帰着させて論じ，漸近有限代数に関する定理を得ることが出来る。それについては次章で触れる。

〔第3章〕 漸近有限代数の定義について考察する。v.N. 代数Aが漸近有限であるとは，Aを任意に近似するようなI型の部分代数Bが存在することをいうが，従来の定義においては，BがAと同じ中心を持つことが要請されていた。この為例えば Dye の漸近有限代数に関する一定理の証明において，彼はBをAと同じ中心を持つように選べる事を示すために込み入った議論を行っている。しかもそれは変換群Gに対して群の拡大に関する一つの結果を引用していて，Aが特に可換な v.N. 代数Mの接合積$R(M.G)$である場合にしか適用出来ないものである。ここでは，それが実はGには無関係に論じ得る事であり，そして接合積と限らず一般の場合について，漸近有限代数の定義は条件を弛める事が出来ることを示す。即ち，(Theorem 1. Theorem 2.)

Bの中心はAの中心を含んでさえいればよい。従ってAが因子の場合は，任意の中心をもつI型代数で近似できれば，漸近有限である。

証明は v.N. 代数の reduction の議論を用いるだけで自然なものである。

これと第2章の結果によって，Dye の結果を一般化した次の定理が得られる(Theorem 3.)

AをI型有限の代数とし，Gを漸近有限群とすれば，接合積$R(A.G)$は漸近有限である。

論文審査の結果の要旨

芳賀義則提出の論文は von Neumann 代数とその自己同型群による接合積に関する研究で3章に分けられ，他に参考論文5篇が添えられている。

本論文第1章はコンパクト群による von Neumann 代数の接合積の研究で，可分ヒルベルト空間に作用する半有限型 von Neumann 代数A，Aの自己同型群としてコンパクト群Gが連続的に作用するものとして，同型な接合積$R(A.G)$，$R'(A.G)$が構成される，之にコンパクト群のユニタリ表現論を適用して接合積の構造定理を得，夫を基礎として接合積が因子環ならば$R(A.G)$は不動元代数A^GとI型代数$L(L^2(G))$とのテンソル積と同型となる事を導いている，之から接合積の代数型が不動元代数によりほゞ定まること，又従来知られた離散群による接合積と事情が異なりコンパクト群による場合は一般に無限型且I型に退化する傾向をもつとの新知見を得たことは注目すべきことゝ考えられる。

第2章は，接合積の代数的理論に於ける部分群と中間代数の対応の研究であるが，有限型 von Neumann 代数Aとその自己同型可算群Gとの接合積に関する芳賀及び武田の理論（参考論文4）を基礎としている，即ち Dyeの決定函数をこの場合に適応させ，基礎代数Aと接合積$R(A.G)$の中間代数Bの束と，Dye の決定函数E_g の束との間，及び群Gの充満化〔G〕の充満部分群Kの束と決定函数の束との間に，夫々束同型が存在することを定式的に示し（定理2.5，2.9），又中間代数Bが基礎代数Aに関してI型，II型であることを定義して，対応する群が Dyeの意味でI型，II型であることと対応する等が示され，之は保測変換群の Dye の対応を有限型von Neumann 代数の接合積に拡張したのみならず，von Neumann 代数の接合積の構造を見るに役立つと考えられる。

第3章は，von Neumann 代数に関する漸近有限型の充分条件の研究で，von Neumann 代数AがII型であるとき任意にAを“近似する”I型部分代数Bが，その中心がAの中心を含む様に存在するとの充分条件を示したが，之は定理3としても指摘されているが応用上有効な知見と考えられる。

参考論文5篇あり，綜合して申請者の学力を十分示すと考えられる。

之を綜合するに，本論文は von Neumann 代数における接合積の方面を研究して此分野に重要な寄与をなしたもので，芳賀義則が自立して研究活動を行うに必要な学識と研究能力を有することを示すものである。仍て審査員は本論文は理学博士の学位論文として合格と認めた。