| | |
|---|---|
| 氏名・(本籍) | 日野義之（ひのよしゆき） |
| 学位の種類 | 理学博士 |
| 学位記番号 | 理第515号 |
| 学位授与年月日 | 昭和51年12月24日 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第5条第2項該当 |
| 最終学歴 | 昭和43年 3月<br>東北大学大学院理学研究科<br>(修士課程)数学専攻修了 |
| 学位論文題目 | Theory of functional differential equations with infinite retardations<br>(無限の遅れをもつ関数微分方程式論) |
| 論文審査委員 | (主査)<br>教授 吉沢太郎　教授 小竹武<br>教授 黒田正 |

# 論文目次

# 論　文　内　容　要　旨

## まえがき

この論文で扱う関数微分方程式の相空間は次のようなものである。$x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ を $R^n$ の任意なベクトルとし $\|x\|$ を $x$ のノルムとする。$B=B((-\infty, o], R^n)$ はノルム $\|\cdot\|_B$ をもつ $(-\infty, o]$ から $R^n$ の中への関数からなるバナッハ空間とする。任意な $\varphi \in B$ と $\sigma \in [o, \infty)$ に対し $\varphi^\sigma$ を $\varphi$ の $(-\infty, -\sigma]$ 上への制限とする。$B^\sigma$ をこのような $\varphi^\sigma$ からなる空間とする，任意な $\eta \in B^\sigma$ に対し $\eta$ のセミノルムを $\|\eta\|_{B^\sigma} = \inf_{\varphi}\{\|\varphi\|_B ; \varphi^\sigma=\eta\}$ によって定義すると $B^\sigma$ はノルム $\|\cdot\|_{B^\sigma}$ をもつバナッハ空間と見なすことができる。もし $x$ が $(-\infty, a)$, $a>o$, 上で定義された関数ならば，おのおのの $t \in [o, a)$ に対し $x_t$ を $x_t(s)=x(t+s)$, $-\infty<s\leqq o$, と定義する。$a>\tau$ なる数 $a$ と $\tau$ に対し $A_\tau^a$ を $(-\infty, a)$ を $R^n$ の中へ写し $[\tau, a)$ 上は連続で $x_\tau \in B$ なる関数 $x$ のクラスとする。空間 B は次の性質をもつものとする。

(I) $x \in A_\tau^a$ ならばすべての $t \in (\tau, a)$ に対し $x_t \in B$ 又 $x_t$ は t に関して連続である，ここで $\tau<a\leqq\infty$。

(II) $(-\infty, o]$ を $R^n$ の中へ写すすべての有界連続関数は B に属す。

(III) もし点列 $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in B$, がノルム $\|\cdot\|$ に関して $(-\infty, o]$ 上一様有界で $(-\infty, o]$ の任意のコンパクト部分集合上一様に $\varphi$ に収束すれば $\varphi \in B$ かつ $k\to\infty$ のとき $\|\varphi_k-\varphi\|_B \to o$。

(IV) $b(o)=c(o)=o$ なる連続，増加そして非負関数が存在し $[0, \infty)$ 上で定義され，任意な $\varphi \in B$ と $\sigma \geqq o$ に対し

$$\|\varphi\|_B \leqq b\left(\sup_{-\sigma\leqq s\leqq o}\|\varphi(s)\|\right)+c\left(\|\varphi^\sigma\|_{B^\sigma}\right)$$

が成り立つ。

(V) もし $\sigma \geqq o$ かつ $\varphi \in B$ ならば $s \in (-\infty, -\sigma)$ に対し $T_\sigma\varphi(s)=\varphi(s+\sigma)$ によって定義された $T_\sigma\varphi$ は $B^\sigma$ の要素で $\sigma\to\infty$ の時 $\|T_\sigma\varphi\|_{B^\sigma}\to o$

明らかにこの空間は通常の関数微分方程式の相空間 $C([-h, o], R^n)$ を含むし，熱力学におけるボルツマン理論から生ずる空間，すなわち，$(-\infty, 0]$ を $R^n$ の中へ写す関数から成る空間でそのノルムを $\|\varphi(o)\|+\int_{-\infty}^{o}\|\varphi(s)\|e^s ds$ で定義されたものとか $(-\infty, 0]$ を $R^n$ の中へ写す連続関数からなる空間で $s\to-\infty$ のとき $\varphi(s)e^s\to o$ を満たしノルムを $\sup_{-\infty\leqq s\leqq o}\|\varphi(s)\|e^s$ で与えられた空間をも含む。

この論文は4章に分ち，1章では解の局所的性質を考える。ここでは“fading memory”と呼ばれる性質(V)は必要としない。2章から4章までは大域的性質を扱う。特に2章ではリアプノフの意味での安定性について，3章では解の漸近行動について，そして4章では周期解，概周期解の存在について考察する。

## 第1章　初期条件に関する解の連続性について

関数微分方程式

(*)　　$\dot{x}(t)=f(t, x_t)$

を考える。ここで $f(t, \varphi)$ は $I \times B^*$ 上で定義され $R^n$ で値をとる連続関数であり，$I$ と $B^*$ は夫々 $[0, \infty)$ と B の open subset である。$x(t_0, \varphi)$ を $x_{t_0}(t_0, \varphi)=\varphi$ なる(*)の解とし $x(t_0, \varphi)$ の t での値を $x(t, t_0, \varphi)$ とすると，我々は局所的性質の基本定理の1つである次の定理を得る。

定理　$(t_0, \varphi^\circ) \varepsilon I \times B^*$ を通り $[t_0, t_0+a]$, $a>o$, 上で定義された(*)の解 $x(t, t_0, \varphi^\circ)$ は初期条件の下で一意的とする。このとき任意な $\varepsilon>o$ に対し $\delta(\varepsilon)>o$ が存在し $(s, \psi)\ \varepsilon\ I \times B^*$, $|s-t_0|<\delta$ そして $\|\psi-\varphi^\circ\|_B<\delta$ ならすべての $t\ \varepsilon\ [\max\{t_0, s\}, t_0+a]$ に対し $\|x_t(s, \psi)-x_t(t_0, \varphi^\circ)\|_B<\varepsilon$ が成り立つ。

上の定理の証明にさいし次の性質を導きださねばならない。すなわち，あるM>oに対し $\|g(t, \varphi)\| \leqq M$ かつD上 $f(t, \varphi)=g(t, \varphi)$ なる $\{x_t(t_0, \varphi^\circ)\ ;\ t_0 \leqq t \leqq t_0+a\}$ の近傍Dと関数 $g(t, \varphi)$ を見い出し，$(t_m, \varphi^m)$ が $(t_0, \varphi^\circ)$ に収束するとき $\dot{x}(t)=g(t, x_t)$ の解 $y(t_m, \varphi^m)$ に対し $\{y_s(t_m, \varphi^m)\ ;\ m\ 1, 2, \cdots,\ s\ \varepsilon\ [t_0, \tau]\}$ がBの relatively compact subset になるということである。我々は空間Bに若干の制限を加えることにより上のことを証明することができる。

## 第2章　リアプノフの安定性について

この章の目的は常微分方程式でなされた0解の漸近安定に関するMatrosov (Prikl. Mat. Mekh. 26 (1962)) とRouche (Int. J. Nonlinear Mechanics, 3 (1968)) の結果を無限の遅れをもつ関数微分方程式へ拡張することである。Matrosovはリアプノフ関数 $V(x)$ と補助的なscalar valued関数 $W(x)$ を用いて0解の漸近安定を示した。ここで $V(x)$ は正定値で解に添っての $V(x)$ の微分は非負，又 $W(x)$ は有界で解に添っての $W(x)$ の微分は集合 $E\ (=\{x : \dot{V}(x)=0\}) \setminus \{0\}$ 上で0ではない。Roucheは $W(x)$ としてvector-valued関数を考えた。ここで $W(x)$ はE上で0で解に添っての $W(x)$ の微分は $E \setminus \{0\}$ 上で0ではない。彼等の証明の中で重要な役割を果したのは相空間 $R^n$ が locally compact であるということである。明らかに空間Bは locally compact でない。しかしながら有界な解の orbit と positive limit set が compact であることを利用して我々は彼等の結果を拡張することができる。

## 第3章　解の漸近行動について

相空間Bをもつ関数微分方程式系が autonomous の時，Hale (J. Math. Anal. Appl. 26

(1969))は次のことを示した。すなわち，もしBのsubset G上で定義されたリアプノフ関数V$(x)$が存在し，又解$x(t_0, \varphi^{\circ})$が$t \geqq t_0$に対しGの中にあり，更にそのorbitがGのcompact subsetなら解$x_t(t_0, \varphi^{\circ})$は$t \to \infty$の時E $(=\{\varphi ; \dot{V}(\varphi)=0\})$の中の最大のinvariant setに近ずく。一般に，invariance principleと呼ばれるものである。この章ではHaleの結果を概周期系に拡張する。我々は概周期関数のnormalityを用いるためにBにseparability を仮定する。

## 第4章　周期解と概周期解に対する存在定理について

この章では空間Bに対して(I)〜(V)に加えて次の2つの性質を仮定する。

(VI)ある$M_1 > 0$に対して$\|\varphi(0)\| \leqq M_1 \|\varphi\|_B$

(VII)Bはseparableである。

上の仮定を加えても“まえがき”で挙げた空間の例をBが含んでいることには変わりない。

次の方程式を考える。

$$(**) \qquad \dot{x}(t)=F(t, x_t),$$

ここで$F(t,\varphi)$は$R^1 \times \overline{B_M}$, $\overline{B_M}=\{\varphi \in B ; \|\varphi\|_B \leqq M\}$，上連続で，$\varphi \in \overline{B_M}$に対し一様にtに関して概周期とする。更に$L>0$が存在して$R^1 \times \overline{B_M}$上$\|F(t,\varphi)\| \leqq L$とする。又$(**)$はすべての$t \in I$，$I=[0,\infty)$，に対し$\|\xi_t\|_B \leqq \beta$，$0<\beta<M$，を満たす解$\xi(t)$をもつものとする。

初期条件に関する解の一意性を仮定しないでYoshizawa(Funkcial. Ekvac. 12(1969))とKato(Tôhoku Math. J. 22(1970))は概周期系における概周期解の存在を示した。彼等は有限の遅れをもつ関数微分方程式を考えた。そしてある安定性をもつ有界な解の存在を仮定した。この安定性は有界の解が初期条件の下で一意的であることを保障している。又彼等は$t_0$において初期関数を$C=C([-h,0], R^n)$のあるbounded setの中に取るどの解も，すべての$t \geqq t_0+h$に対しCのcompact setの中にとどまっているという事実を利用した。Hale(J. Math. Anal. Appl. 48(1974))はもしも遅れが無限ならばsolution operatorは決してcompletely continuousにはならないで，あるorderの$\alpha$－contractionになることを示した。しかしながら，我々は次の集合$\overline{S(\xi_0, M_1\beta, L)}$が$\xi(t)$のhullのすべての解を含むBのcompact setであることを示すことができる。ここで$\overline{S(\xi_0, M_1\beta, L)}$は$S(\xi_0, M_1\beta, L)$のclosureで

$$S(\xi_0, M_1\beta, L)=\{\varphi_t ; t \geqq 0, \varphi \in S^*(\xi_0, M_1\beta, L)\}$$

更に

$$S^*(\xi_0, M_1\beta, L)=\{\varphi \in A_0^{\infty} ; \varphi_0=\xi_0, \|\varphi(t)\| \leqq M_1\beta \text{ for all } t \geqq 0, \|\varphi(\theta)-\varphi(\theta')\| \leqq L|\theta-\theta'|, \text{ for any } \theta, \theta' \in [0, \infty)\}$$

上の事実を用いて次の定義を与える。

定義　解$\xi(t)$が$H^+_F(\xi)$に関して一様安定とは，任意の$\varepsilon>0$に対して$\delta(\varepsilon)>0$が存在して$t_0 \varepsilon I$，$x \varepsilon H^+_F(\xi)$そして$\|\xi_{t_0}-x_{t_0}\|_B<\delta(\varepsilon)$である時に限り$\|\xi_t-x_t\|_B<\varepsilon$ for all $t\geqq t_0$がなりたつ。ここで$H^+_F(\xi)=\{x(t);(x(t),G(t,\varphi))\varepsilon H^+(\xi,F)$，又$H^+(\xi,F)$はhull $H(\xi,F)$のsubsetでその要素は$\{t_k\}$, $t_k\to\infty$，が存在して$k\to\infty$のとき$\xi(t+t_k)\to x(t)$ uniformly on any compact interval in $R^1$かつ$F(t+t_k,\varphi)\to G(t,\varphi)$ uniformly on $R^1\times\overline{S(\xi_0,M_1\beta,L)}$を満たす$(x(t), G(t,\varphi))$から成るものである。

定義　解$\xi(t)$がstable under disturbances from $H^+(\xi,F)$とは，任意の$\varepsilon>0$に対して$\delta(\varepsilon)>0$が存在して$(x, G)\varepsilon H^+(\xi,F)$, $\|\xi_\tau-x_0\|_B<\delta(\varepsilon)$, $\rho(F^\tau, G)=\sup\{\|F(t+\tau,\varphi)-G(t,\varphi)\|, t\varepsilon R^1, \varphi\varepsilon S(\xi_0, M_1\beta, L)\}<\delta(\varepsilon)$ for some $\tau\geqq 0$である時に限り$\|\xi_{t+\tau}-x_t\|_B<\varepsilon$ for $t\geqq 0$。

上で与えた安定性は通常の安定性より弱いものである。なぜかというと$\xi(t)$の初期値に関する一意性を必らずしも保障していないからである。例えば$\dot{x}=x^{\frac{1}{3}}$の解$x(t)=0$はuniformly stable for $t\geqq 0$でない。しかし$H^+_{x^{\frac{1}{3}}}(x(t)=o)$に関して一様安定であり，stable under disturbances from $H^+(x(t)=0, x^{\frac{1}{3}})$である。我々は漸近概周期関数の性質を用いて次の定理を得る。

定理　$(**)$における$F(t,\varphi)$は周期的とする。もし$\xi(t)$が$H^+_F(\xi)$に関して一様安定なら，$\xi(t)$は$(**)$の漸近概周期解である。従って$(**)$は概周期解をもつ。

定理　もし$\xi(t)$がstable under disturbances from $H^+(\xi,F)$なら$\xi(t)$は$(**)$の漸近概周期解である。従って$(**)$は概周期解をもつ。

この章の最後の部分においては，我々は線形概周期系におけるFavard のseparation theoremを取り扱う。我々は新しくsemi-normを導入しそのsemi-normに関してのminimal solutionを考えることにより，有限の遅れをもつ関数微分方程式に対して与えられたKato(Funkcial. Ekvac. 18(1975))の結果を無限の遅れをもつ関数微分方程式系へ拡張する。

# 論文審査の結果の要旨

多くの生物学,. 物理学, 経済学の問題の数学的モデルとして, 遅れ時間をもつ微分方程式すなわち関数微分方程式の研究は遅れ時間が有限の場合に対しては, 非常な発展をとげたが, 生物学におけるVolterraの方程式や, 熱力学におけるVoltzman理論のモデルなど, 無限の遅れ時間が影響する場合が多い。本論文では, これらを統一的に研究するため, 一般的な相空間における無限の遅れをもつ関数微分方程式の基礎定理, 安定性の問題, 周期解, 概周期解の存在が論じられている。無限の遅れをもつ場合は, solution operatorは決して完全連続にはならない。このことが有限の遅れをもつ場合と全く異なり, 一つの大きな問題点である。著者はこれを解決し, 無限の遅れの場合における研究の一つの方向を示した。

特に, 概周期系において, 有限の遅れの場合の従来よく知られている多くの結果は, 共通して一様安定な有界な解の存在を仮定している。常微分方程式や有限の遅れをもつ関数微分方程式における議論を無限の遅れをもつ場合に適用しようとすると, 一つの大きな困難にぶつかる。すなわち$\xi(t)$を一様安定な有界な解とすると, $\xi(t)$もこの近くから出る解も, 時間がたてば共通のcompact setに含まれる。しかし無限の遅れをもつ場合は, 時間がいくら大きくなっても, この性質をもつcompact setの存在を示すことは不可能である。しかし著者は一つの重要な点に着目することによって, この問題を解決した。すなわち, ある種の安定性をもった有界な解$\xi(t)$に対して, その安定性を$\xi(t)$のhullの中の解にのみ制限して考え, 通常の安定性より弱いhullに関する安定性の概念を導入して, 適当なcompact setを構成することにより, $\xi(t)$が漸近的概周期解であることを示し, さらに概周期解の存在を導いた。

このように, 本論文はこの分野における研究に著しく貢献したものであり, 理学博士の学位論文として合格であると認める。