氏名・（本籍）	森　正気（もり　せいき）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第 546 号
学位授与年月日	昭和53年 2月22日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和45年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	有理型関数および有理型写像の 位数と除外指数
論文審査委員	（主査） 教授 黒田　正　教授 小田忠雄 教授 土倉　保

論　文　目　次

論　文　内　容　要　旨

序　有理型関数論における最も重要な結果の一つはピカールの定理（１８７９年）である。そしてネバンリナによってそれを含む統一的な理論（Acta Math. 46(1925)p.1−100）が樹立された。さらにネバンリナ理論は１９６０年代からエドレー・フックス，ワイツマンなどにより解析的により深く精密化された。一方ワイル，アールフォース，カルタン，チャーン，グリフィースなどにより幾何的手段での研究がおこなわれ高次元への拡張がなされた。ネバンリナ理論における最も基本的な定理は有理型関数の（ネバンリナの意味の）除外指数の総和が２を越えないという結果であるが，エドレー・フックス（Trans. Amer. Math. Soc.93.(1959)293−328）は位数と除外指数との関係について多くの興味ある研究を行なっており，特に，二つのネバンリナの除外値（除外指数が正となる値）をもつ有理型関数の劣位数は正であり，最大除外指数総和２をもつ整関数は位数および劣位数が相等しく（正則増大性という）しかもそれらが有限ならば正の整数であるという奇麗な結果を述べている。

本論文においては，第一章では位数と除外指数総和についてのエドレー・フックスの定理の一般化について，第二章において合成関数の位数について，第三章で合成関数の位数と除外値についてのべる。

第一章　有理型関数および有理型写像の位数と除外指数

プフリューガーおよびエドレー・フックスにより「除外指数総和２をもつ有限位数の超越整関数の位数と劣位数は相等しく，しかもそれらは正の整数であり，更に各除外指数は位数の逆数の整数倍である」ことが知られている。一方，チュアンはネバンリナの結果（次の定理の $p=3$ の場合）の一般化を行ない「全複素平面 $|z|<+\infty$ で定義された非定数有理型関数 $f(z)$ に対して，複素数 a の代りに $f(z)$ よりも増大度が非常に小さい p（$2\leqq p\leqq+\infty$）個の相異なる有理型関数 $\varphi(z)$　$(T(r,\varphi)=o(T(r,f)),\ (r\to+\infty))$ を用いてネバンリナの基本定理の一般化が成立つ」ことを示した。我々はネバンリナの除外指数 $\delta(a,f)$ を複素数 a の代りに $f(z)$ に比べて増大度の非常に小さい有理型関数 $\varphi(z)$ を用いて一般化し，除外指数 $\delta(\varphi,f)$ が正となる φ を除外関数とよぶことにすると，エドレー・フックスの定理の一般化として次の定理を得る。

定理．　全複素平面 $|z|<+\infty$ での超越有理型関数 $f(z)$ が２つの相異なる除外関数をもつならば，$f(z)$ の劣位数は正である。

定理．　位数有限な超越有理型関数 $f(z)$ が ∞ で除外指数 $\delta(\infty,f)=1$ をもつものとし，さらに p（$2\leqq p\leqq+\infty$）個の相異なる $f(z)$ に比べて増大度が非常に小さく，しかも $f(z)$ よりも位数が低い有理型関数に対して除外指数総和が１（したがって全除外指数総和が最大値２となる）である

とすると，$f(z)$は正則増大性をもち，その位数（＝劣位数）は正の整数である。

次に高次元の場合について考える。fをn次元複素ユークリッド空間C^nからN次元複素射影空間P^Nへの有理型写像とするとき　ストール　あるいはヴィッター　などによりP^Nの一般の位置にある超平面族に対するネバンリナの除外指数の総和がN＋1以下であることが知られている。我々はこの場合における次のエドレー・フックスの定理の一般化を得る。すなわち，

定理　　fをC^nからP^Nへの非退化超越有理型写像とするとき，もしP^Nの中のN+1個の一般の位置にある超平面に対してそれらのネバンリナの除外指数が正であるならば，fの劣位数は正である。とくにN＋1個の各超平面の除外指数が最大値1をとるならば，fは正則増大性をもち，かつその位数は正の整数であるか，または無限大である。

しかしN＋1個より多くの一般の位置にある超平面に対して除外指数総和がN＋1になったとき，fの位数が整数になるかどうか，正則増大性をもつかどうかについてはまだ判っていない。

第二章　合成関数の位数

ポリア（J.Lonclon Math.Soc.1（1926）12－15）は，$f(z)$，$g(z)$をCにおける二つの整関数とするとき，もし$f(g(z))$が有限位数をもつならば

(a)　$g(z)$が多項式で，$f(z)$が有限位数をもつ整関数である
　　かあるいは

(b)　$g(z)$が多項式でなく，有限な位数をもつ整関数で$f(z)$が位数零をもつ
　　かのいづれかであることを述べている。

我々はこの定理の逆の問題を扱う。すなわち(a)または(b)の条件のもとに$f(g(z))$の位数はどうなるかについて調べる。(a)については明らかだから(b)について，いくつかの場合に分けて調べ，さらに各場合における条件が最良であることを例を与えることによって示す。$f(z)$が多項式でない場合は$g(z)$の位数が零であっても，ほとんどの場合は$f(g(z))$の位数は無限大となってしまうことがわかる。

第三章　合成関数の除外指数

バリロン（C.R. Acad. Sci. Paris. 225.（1947）556－558）は次の定理を述べている。「$f(z)$を$|z|<+\infty$で定義された有限な位数μおよび劣位数λをもつ有理型関数とするとき，もし$\mu-\lambda<1$ならば原点の平行移動によって$f(z)$に関するすべての除外指数は不変である。」さらにゴールドベルグ・ベリンスキーは$\mu-\lambda<1$なる条件を落せないということを例を与えることによって示した。我々はこの問題を合成関数の問題としてとらえ，

(A)　a_0が$g(z)$の除外値のとき，$f(a_0)$は$f(g(z))$の除外値か？

(B)　w_0が$f(z)$の除外値のとき，w_0は　また$f(g(z))$の除外値か？

という問題を考える。　問(A)についてはつぎの結果がえられた。

定理．　$g(z)$を超越整関数；　$f(z)$をn次の多項式とすると，$g(z)$がa_0を除外値にもてば，$f(g(z))$はまた$f(a_0)$を除外値にもつ。

$f(z)$，$g(z)$が共に超越整関数のときは$f(g(z))$の位数が有限であっても上の定理の結論は成立しない。すなわち，任意の位数有限な整関数$g(z)$および任意の複素数a（$\neq\infty$）に対していくらでも増大度の低い超越整関数$f(z)$で$f(a)$が$f(g(z))$の除外値とならないようなものを見出せる。

問(B)についてはつぎの定理が成立つ。

定理．　$g(z)$をn次多項式，$f(z)$を有限位数μ_fおよび劣位数λ_fをもつ超越有理型関数とするとき，もし$\mu_f-\lambda_f<\frac{1}{n}$ならば$f(z)$の除外値$w_0$はまた$f(g(z))$の除外値である。（実際$f(z)$のすべての除外指数$\delta(w, f)$は$\delta(w, f(g))$と一致する。）

またこの定理の条件$\mu_f-\lambda_f<\frac{1}{n}$が最良であることを例を与えることによって示すことができる。その際n＝1の場合に相当するゴールドベルグ・ベリンスキーの例は擬等角写像論を用いるが，我々の例はもう少し初等的な方法で構成される。

論文審査の結果の要旨

今世紀初めにネバンリナが樹立した有理型函数の値分布理論，いわゆるネバンリナ理論は前世紀末にえられたピカールの定理を含む解析的理論であるが，以後種々の立場からその理論の深化が多くの研究者により試みられてきた。ワイルによる有理型曲線の理論やアールフォルス，陳省身による幾何学的立場での理論の再構成はそのよい例であるが，エドレイ・フックスによる解析的精密化も重要な寄与の一つである。

本論文では有理型函数の位数と除外指数の関係が上述のエドレイ・フックスの結果の一般化を中心として論じられている。まず，除外指数が正となる，いわゆる除外値を扱うかわりに，庄圻泰によって導入された除外函数なる概念を用いて超越有理型函数が異なる二つの除外函数をもてば，その函数の劣位数は正となることを示し，さらにエドレイ・フックスの定理の一般化を与えることに成功した。さらにn次元複素ユークリッド空間からm次元複素射影空間への非退化超越有理型写像について，一般の位置にあるm＋1個の超平面の除外指数がすべて正なら，その有理型写像の劣位数は正であり，特にm＋1個の各超平面の除外指数が1であれば，その有理型写像は正則増大度をもち，かつその位数は正の整数か又は無限大であることを示した。これはエドレイ・フックスの定理の高次元の場合へのほとんど完全な形での拡張になっている。

ついで合成函数の位数についての古典的なポリアの問題の逆問題に対し，ほぼ完全な解決を与え，さらにバリロンの定理を合成函数の問題としてとらえて，値aを除外値とする超越整函数gの多項式f(g)はまたf(a)を除外値とすることを示して，バリロンの定理の精密化を与え，それがある意味で最良の結果であることを示した。

また参考論文では非孤立特異点をもつ有理型函数の値分布についての興味ある結果がえられている。

以上，本論文における諸結果はネバンリナの理論の進展に寄与する所が大きく，理学博士の学位論文として合格であり，また著者が自立して研究をおこなうにたる十分な能力を有することを示している。