氏名・(本籍)	渡（わた）辺（なべ）金（きん）治（じ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第563号
学位授与年月日	昭和53年10月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和45年3月 東北大学大学院理学研究科 (修士課程) 数学専攻修了
学位論文題目	線型偏微分方程式に対するCauchy問題の解の一意性
論文審査委員	(主査) 教授 小竹 武　教授 黒田 正 教授 吉沢太郎

論文目次

論 文 内 容 要 旨

緒　言

偏微分方程式に対する非特性的Cauchy 問題の解の一意性に関する研究は偏微分方程式論における重要かつ基本的な研究課題の一つである。

本論文は線型偏微分方程式に対するこの問題の一般的考察，ならびにそれら結果の楕円型および放物型偏微分方程式の解の一意接続性の問題への応用を目的とするものである。

1901年　E. Holmgrenは解析的Cauchyデータに対する非特性的Cauchy 問題の解析的解の一意的存在を保証するCauchy－Kowalewski の定理をもとに，与えられた偏微分作用素の係数が解析函数であるときに，解空間を連続的微分可能な函数族にひろげてもCauchy 問題の解はなお一意的であることを証明した。しかし係数が解析的でない場合，もはやCauchy－Kowalewski の定理を適応することができず，Holmgren の証明方法とは本質的に異なる方法が必要である。1938年　T. Carlemanは2独立変数の方程式系に対して，この問題を新しい方法で解決し，そのご1959年　A. P. Calderon はその方法をさらに発展させ，多独立変数の方程式に対するとりあつかいを可能ならしめた。その新しい方法とはいわゆるCarlemanタイプ評価式といわれる重みのついたL^2 評価式を導びく方法である。またこの方法におけるCalderonの基本的考え方は特異積分作用素の重要さを示すと同時に，擬微分作用素さらにはFourier積分作用素の研究を促す一要因となり，偏微分方程式論の多くの分野に今なお強い影響を与えている。

われわれはCarlemanタイプ評価式を用いる方法により以下に述べる諸定理を証明する。そこでの種々の仮定はすべて座標変換により不変であり，従って以下に述べる結果は，初期平面をより一般な初期曲面におきかえたCauchy 問題に対してもそのまま成り立つ。そして楕円型偏微分方程式に対してはすべての方向についての解の一意接続性が，また放物型偏微分方程式に対しては空間方向についての解の一意接続性が導かれる。

さてわれわれの問題を定式化すれば次のように述べられる。n＋1次元実ユークリッド空間内で与えられた偏微分作用素

$$P=(\partial/\partial t)^m+\sum_{\substack{|\alpha|+j\leq m\\ j<m}} p_{\alpha,j}(x,t)(\partial/\partial x)^{\alpha}(\partial/\partial t)^j$$

に対するCauchy問題

$$P[u]=0,\quad u\Big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cdots=(\partial/\partial t)^{m-1}u\Big|_{t=0}=0$$

の解uは初期平面$t=0$の近傍で恒等的に0となるか？

われわれの目的はCalderonの結果の拡張であるが，そこでは偏微分作用素Pの特性多項式

$$P_m(x, t; \xi, \tau) = \tau^m + \Sigma_{\substack{|\alpha|+j=m \\ j<m}} p_{\alpha, j}(x, t)\xi^\alpha \tau^j = 0$$

のτに関する根，すなわち特性根はすべて単根であるとの仮定がなされている。この特性多項式が重根をもつ場合には上記Cauchy 問題の解は一般には一意的でない。それ故われわれにとって興味深い場合は特性根に重根が現われる場合である。第1章において特性根の重複度が2を越えない場合，第2章において特性根の重複度がパラメータ（x，t，ξ）に関して一定かつ3を越えない場合を考察する。第3章においては，第2章で用いられる方法をさらに一般化し，放物型偏微分方程式の空間方向に関するCauchy問題の解の一意性を考察する。

第1章　特性根の重複度が2を越えない方程式に対するCauchy問題の解の一意性

まず反例について述べる。特性多項式が実数の重根をもつ任意の定数係数偏微分作用素に対し，滑らかな係数をもつ適当な低階の項を選べばCauchy 問題の解は一意的でないことをP.Cohenは注意した。このことより特性多項式が実根をもたない方程式，すなわち楕円型偏微分方程式が興味深い対象となる。しかしA. Plisは特性根の重複度が高々2である，無限回連続的微分可能な係数をもつ楕円型偏微分方程式で一意性の成り立たない例を構成した。

この反例では，特性根はパラメータ（x，t，ξ）に関し滑らかではないが，L. HormanderおよびS. Mizohataはパラメータ（x，t，ξ）に関して滑らかな特性根をもつ楕円型偏微分方程式に対しては一意性が成り立つことを示した。われわれはこの特性根の滑らかさを仮定せず次の結果を得た。

定理。偏微分作用素Pは2変数の楕円型作用素でその特性根の重複度は高々2であるとする。このとき，もしPの主要部の係数が解析的で，その他の係数は有界可測ならばCauchy 問題の解は一意的である。

第2章　特性根の重複度が3を越えない方程式に対するCauchy問題の解の一意性

P. Cohenによれば重複度3の特性根をもつ任意の定数係数楕円型偏微分作用素に対し，Holder 連続な係数をもつ適当な低階の項を選べば，Cauchy 問題の解は一意的でない。われわれは低階の項の係数に滑らかさを仮定することにより次の結果を得た。

定理。偏微分作用素Pはその特性根の重複度は一定かつ3であるm階楕円型作用素とする。このとき，もしPの主要部の係数は十分滑らかであり，m－1階の項のそれはLipschitz連続，m－2階までの項のそれは有界可測であるならばCauchy 問題の解は一意的である。

この定理は実数の特性根をもつ偏微分方程式に対して次のように拡張される。

定理。偏微分作用素Pの係数は十分滑らかな函数とする。このとき，もしPの主要部が，特性根の重複度が一定かつ３を越えない楕円型偏微分作用素と強双曲型偏微分作用素との積作用素との主要部と一致するならばＣａｕｃｈｙ 問題の解は一意的である。

これまでの結果での本質的な仮定は偏微分作用素Pの主要部のみにより定まる特性根の重複度，およびパラメータに対する滑らかさに関するものであった。しかし重複度が４以上のときには，たとえ特性根がパラメータに関し滑らかであっても，必ずしも解の一意性が成り立たない楕円型偏微分作用素が存在し，偏微分作用素の主要部のみならず，低階の項に関するより精しい考察が必要である。このことに関しては，特別な場合，すなわち斉次楕円型偏微分方程式に対して，特性根の重複度に関する仮定なしに，われわれは次の結果を得た。

定理。偏微分作用素Pは斉次楕円型作用素であり，その特性多項式は次の条件を満すものとする。τ に関する方程式

$$P_m(x,t;\xi+\tau\eta,\tau)=0$$

はパラメータ(x,t,ξ,η)に関し十分滑らかな根をもつ。このとき一般な初期曲面に対してもＣａｕｃｈｙ 問題の解は一意的である。

第３章　放物型方程式に対するCauchy問題の解の一意性

実数tをパラメータにもつn次元実ユークリッド空間内で与えられた２階楕円型偏微分作用素

$$A(t)=\Sigma_{|\alpha|\leq 2}\ a_\alpha(x,t)(\partial/\partial x)^\alpha$$

に附随する放物型偏微分方程式に対するＣａｕｃｈｙ問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(t)u=0,\qquad u\Big|_{x_1=0}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0}=0$$

の解の一意性はよく知られている。

われわれはこの結果を次のように拡張した。

定理。上記２階楕円型偏微分作用素$A(t)$の係数は十分滑らかな実数値函数とする。このとき次の放物型偏微分方程式の空間方向に関するＣａｕｃｈｙ問題

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(t)^k u=\Sigma_{|\alpha|\leq 2k-1}\ b_\alpha(x,t)(\partial/\partial x)^\alpha u$$

$$u\Big|_{x_1=0}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0}=\cdots=(\partial/\partial x_1)^{2k-1}u\Big|_{x_1=0}=0$$

の解uは恒等的に０となる。ここでkは２又は３で，係数b_αは$|\alpha|=5$のときＬｉｐｓｃｈｉｔｚ の意味で連続な函数，$|\alpha|\leq 4$のとき有界な可測函数である。

論文審査の結果の要旨

本論文は，偏微分方程式の解の一意接続性に関する研究である。ここに，一意接続性とは，非特性的な多様体に初期値が与えられたとき，その多様体の近傍で解が高々一つに定まるかということで，この性質はまた，初期値に関する解の安定性や，正則性の伝播，さらには，双対性の概念を通して，偏微分方程式の局所可能性とも関連するものである。偏微分方程式の重要なクラスの一つである楕円型方程式を例にとれば，一意接続性が成り立てば解の存在領域全体での一致の定理が導かれる。それは楕円型方程式では任意の滑らかな多様体は常に非特性的であり，それら多様体を連続的に移動させることにより，解の一致する領域を存在領域全体に拡げられるからである。このように解の一意性の問題は偏微分方程式論での基本的な問題であり，これまでにも肯定的な結果として，解析的に正則な係数をもつ線型方程式に対するホルムグレンの定理や，主部より定義される特性根が単純であるときのカルデロンの定理などが知られているが，これら結果も，アプリオリに係数の滑らかさも特性根の重複度も不明な非線型方程式に対しては十分でなく，それら仮定を緩めることが一つの大きな問題点となる。

著者は，かかる問題の解決にあたり，一意接続性の証明を重みの函数をもつ積分不等式の証明に帰着させるカルレマンの方法に従い，特異積分作用素の理論における解析的手法を積極的に利用することにより，これまでの多くの結果の精密化ならびに拡張に成功している。中でも，一般な楕円型方程式について，その主部ならびに低階の項の係数に適当な滑らかさがあれば，特性根に多重根があらわれても，その重複度が一定かつ3を越えないかぎり，初期値の一意接続性が成り立つことを証明したが，これはこの方面での重要な結果として知られてきたヘルマンダー，溝畑の定理を一般化したものとして注目される。また，斉次の楕円型方程式に関するものとして，一致の定理が成り立つための一つの十分条件を座標変換に対し，不変かつ特性根の重複度に無関係な形で与えているが，これによって従来知られていたいくつかの結果が特段な場合として得られることになり興味ある結果である。

以上のように本論文は偏微分方程式の解の一意接続性をめぐる分野において重要な寄与をしたものであり，理学博士の学位論文として合格と認める。