氏名・(本籍)	長谷川(はせがわ) 芳光(よしみつ)
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	理 第 590 号
学位授与年月日	昭和54年5月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和29年3月 東北大学理学部卒業
学位論文題目	Integrability theorems for orthogonal series and integral transforms (直交級数及び積分変換に対する可積分性定理)
論文審査委員	(主査) 教授 土倉 保　教授 黒田 正 教授 渡利千波

論 文 目 次

論　文　内　容　要　旨

緒　言

一般に，関数項級数に対する可積分性定理とは，その関数項級数の和である関数（フーリエ級数の場合は初めに与えられた関数）に重みをかけたもののある意味における可積分性（例えば L^p やCauchy の意味で），又はその関数のリプシッツ条件と，係数によって作られる何らかの級数の収束（例えば l^p における収束や条件収束など）との間の関係を与える定理である。また，積分変換に対する可積分性定理とは，与えられた関数に重みをかけたもののある意味における可積分性（例えば L^p やCauchyの意味で），又はその関数のリプシッツ条件とその関数の積分変換に重みをかけたもののある意味における可積分性（例えば L^p やCauchy の意味で）との間の関係を与える定理である。

三角級数・巾級数に対する可積分性問題は永い間研究されてきた。三角級数については，古くはHardy-Littlewood(1926)，Nagy(1949)などの研究，さらにBoas による一連の研究がある。巾級数については，早くはHeywood(1955，1957)，González-Fernández(1961)による研究，さらにAskey-Karlin(1970)による研究がある。特に，三角級数についてはBoas の著書“Integrability Theorems for Trigonometric Transforms(1967)”に詳細にまとめられている。ヤコビ級数に対する可積分性問題についてはAskey-Wainger(1966)，Askey(1967)，Ganser(1966，1969)などの研究がある。著者は第1章で三角級数，第2章でヤコビ級数，すなわち直交級数に対する可積分性定理を述べる。巾級数は直交級数ではないが，三角級数との深い関連において，著者は第3章で1変数の巾級数に対する可積分性のある定理の2変数の巾級数への類似を与える。

積分変換に対する可積分性問題について述べる。三角変換，特に正弦及び余弦変換についてはNagy(1949)，Edmonds(1942，1947，1950，1953)，Heywood(1967)などの研究がある。また，ラプラース変換についてはHeywood(1955，1957，1965)の研究がある。K. Soni-R. P. Soni(1973)はハンケル変換（正弦及び余弦変換を含む），Y変換K変換（ラプラース変換を含む）などを含む積分変換のあるクラスの定義を与え，主にL可積分に関するいくつかの定理を証明した。さらに，彼等は同じ1973年にタウバー型条件をもつ可積分性定理を，1974年にはパーセバルの等式で表現できる可積分性定理を証明した。これら一連の両 Soni の研究は前述のNagy，Edmonds，Heywood 等の研究のかなりの部分を含む。第4章で，著者は両Soni の定義（著者の定義と幾分違うが，本質的には同じ）した積分変換のあるクラスに対するいくつかの L^p 可積分性（$1 \leqq p < \infty$）定理を与える。将来，両Soni によって定義された積分変換の級数への類似な定義が与えられるならば，ベッセル級数（正弦及び余弦級数を含む），巾級数，デ

ィリクレ級数などを含むある関数項級数に対する可積分性問題を研究することも可能になるものと思われる。フーリエ〜ヤコビ変換についての研究は1970年頃より行われており，Flensted-Jensen (1972) はPaley-Wiener型の定理を証明し，Flensted-JensenとKoornwinder (1973) はヤコビ関数に対する一般化された移動演算子及びたたみこみの構造を与えた。これらの研究をもとにして，第5章で，著者はフーリエ〜ヤコビ変換に対する可積分性定理を与える。

第1章　関数$f(x)$のフーリエ正弦及び余弦級数をそれぞれ (1) $f(x) \sim \Sigma a_n \sin nx$，(2) $f(x) \sim a_0/2 + \Sigma a_n \cos nx$ とおく。1965年，Boasは実数列に対してδ-quasi-positive及びδ-quasi-monotoneの定義を与えた。Boasは，級数(1)と(2)において，$\{a_n\}$及び$\{a_{2n+1}\}$がδ-quasi-positiveのとき。 (3) $x^{-r}\{f(x)-f(0)\} \in L(0,\pi) \Longleftrightarrow \Sigma n^{r-1}|a_n|<\infty$ ($r=1$のとき$\Sigma|a_n|\log n$) の型の定理(級数(1)のとき$1<r<2$，級数(2)のとき$1 \leqq r<3$) を証明した。著者は，級数(1)及び(2)において，$\{a_n\}$に課せられたδ-quasi-positiveなる条件を緩め，x^{-r}を含むような関数でx^{-r}を置きかえたときに，(3)より広い関係を与え，かつそれがパーセバルの等式で結び得る結果を与える。特に，級数(1)の場合は，(3)の$\Rightarrow$の部分では，L可積分の仮定はCauchyの意味の可積分で置きかえられることを示す。Boasはまた，級数(1)及び(2)において$\{a_n\}$がδ-quasimonotoneのときに，(3)の型の定理($0<r<1$，しかし級数(1)についてのみ$r=1$のときΣa_nが収束)を与えた。著者は，級数(1)において$\{a_n\}$がδ-quasimonotoneのとき，上述の如き方法でBoasの定理を拡張する。著者によって得られた第1章の結果は，前述のBoasの著書の§4に書かれているいくつかの定理の拡張でもある。

第2章　ヤコビ多項式を$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$，$n=0,1,\cdots$，$\alpha, \beta>-1$，$-1 \leqq x \leqq 1$ で表わす。ヤコビ級数を (4) $\Sigma a_n \omega_n P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ とおく。ただし，$\{a_n\}$は実数列，ω_nとn次のヤコビ多項式との積によって作られる列は正規直交系とする。Ganser(1969
Bavinck(1972) は，リプシッツ条件に関する可積分性問題についての種々の結果を与えた。著者は，この章で，$(0,\pi)$の上でのR可積分の定義を与える。この定義は$\alpha=\beta=-1/2$のときCauchyの意味の可積分と一致する。以後，α，$\beta \geqq -1/2$とする。定理1では，級数(4)が$0<\theta<\pi$で収束するための$\{a_n\}$に課すべき十分条件を与え，さらに級数(4)の和である関数を$f(\theta)$とおくとき，$f(\theta)$にどんな重みをかければ，L可積分なるかまたはR可積分なるかを示した。定理2では，定理1においてR可積分になる場合に$f(\theta)$にかけた重みを変えずに，$\{a_n\}$にどんな強い条件を課すならば，$f(\theta)$と重みとの積がL可積分になるかを示した。

「級数$\Rightarrow$積分」の型とは，関数項級数の係数によって作られるある級数が収束するならば，与えられた関数項級数の和である関数(関数項級数がフーリエ級数ならば，初めに与えられた関

数）に何らかの重みをかけたものが可積分であることを指すものとする。「積分=>級数」の型は逆の場合とする。

定理3は，$\{ n^{1/2} a_n \}$が0に向う減少列とするとき，「級数（絶対収束）=>積分（L可積分）」の型の定理で，正弦及び余弦級数（$\alpha=\beta=\pm 1/2$）の場合のヤコビ級数への拡張である。定理4及び5において，級数(4)をフーリエ〜ヤコビ級数とする。定理4は，「級数（絶対収束）=>積分（R可積分）」の型の定理で，両者の関係がパーセバルの等式で表わされることを示している。定理5は，定理4の逆向きの結果で，「積分（L可積分）=>級数（単に収束）」の型をもつ。定理4及び5の$\alpha=\beta=\pm 1/2$の場合，すなわちフーリエ正弦及び余弦級数の場合は，M. Izumi-S. Izumi（1967）によって証明された。また，第2章における定理及び系のうち$\alpha=\beta>-1/2$の場合，(ultraspherical series)の「級数（絶対収束）=>積分（L可積分）」の型及び「積分（L可積分）=>級数（絶対収束）」の型の部分については，そのある部分はGanser（1966）が証明した。

第3章　$f(x, y)$が円の内部$x^2+y^2<r^2$で調和，その周及び外部で調和でないとする。このとき，$f(x, y)$の二重級数展開は正方形の内部$|x|+|y|<r$で絶対収束するが，この正方形の周及び外部（ただし，$xy\neq 0$）で発散するということはKiselman（1969）によって証明された。また，$f(x, y)$はこの円の内部で調和なN次の同次多項式（Nは非負整数）によって級数展開（絶対収束級数）されることは古くから知られている。ただし，N次の同次多項式の$N=m+n$のときの(m, n)次の係数は$f(x, y)$の二重級数展開の(m, n)次の係数である。調和関数$f(x, y)$に関して，「積分<=>級数」の型の可積分性定理を求めるとき，積分領域を三角形$x+y<1$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$とするか，4分円$x^2+y^2<1$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$とするかによって定理は異ってくる。著者は，この両方の場合について，「積分（L可積分）<=>級数（絶対収束）」の型の定理を証明した（定理2及び4）。この結果は，1変数の巾級数に関するHeywood（1957）の結果の2変数の場合への類似を与えている。

第4章　この章で定義された積分変換のあるクラスをk変換と呼ぶこととする。Askey-Boas（1967）は，一般化されたフーリエ〜スティルチス正弦及び余弦級数に対して，「積分（L^p可積分）=>級数（l^pでの収束）」の型及び「級数（l^pでの収束）=>積分（L^p可積分）」の型の可積分性定理を証明した。これに対して，一般化されたフーリエ〜スティルチス正弦及び余弦変換への類似が考えられ得る。緒言で述べたように，k変換はこれらの積分変換を含む。そこで，著者はAskey-Boasの結果のk変換への類似を与える。同時に，極めて特別な場合として，フーリエ正弦及び余弦変換に関するBoasの予想（1972）に対する完全な解答をも与える。以上から容易に予想できるように，k変換の関数項級数への類似な定義が与えられるならば，前述のBoas

の著書のかなりの部分は一般化することが可能になるものと思われる。

第５章　関数が２πの周期をもち，かつ次数が１／２より大きいリプシッツ条件を満たすとき，その関数のフーリ　級数は絶対収束することはBernstein(1914)によって証明された。この定理のハンケル変換（ここでは重みをもつ測度に関して定義される）への類似をSchwartz (1971) が与えた。著者は，フーリエ〜ヤコビ変換に対して，この定理の類似を与える。Flensted-Jensen(1972)は，フーリエ〜ヤコビ変換が$L^2(d\mu)$から$L^2(d\nu)$上への等距離写像を与えることを証明した。著者は，$f \varepsilon L^2(d\mu)$がn回微分可能のとき，$m=0, 1, \cdots\cdot n$に対して$f^{(m)}$と双曲線正弦を用いてある種の導関数$D^m f$を定義する。さらに$D^m f$の移動演算子の$L^2(d\mu)$におけるプシッツ条件と，fのフーリエ〜ヤコビ変換が$L(d\nu)$可積分であることの間の関係を与える定理を得る。この定理の系として，上記のリプシッツ条件を，$f^{(m)}$を直接用いたときの$L^2(d\mu)$におけるリプシッツ条件で置きかえたとき，どんな形の定理が得られるかということを示す。

論文審査の結果の要旨

関数項級数の和として表わされる関数のスチールチェス積分可能性または連続率などは関数としての基本性質で，これともとの関数項級数の関係，とくに係数列との関係は重要な研究課題である。また，積分変換ともとの関数との間についても同様の問題がある。これらについては，特殊な三角級数，巾級数等については古くから研究が続けられている。著者は第1章では三角級数に対するものを扱っている。すなわち，Boas は係数列の準単調性などの性質の対応性を示したのに対し積分を Cauchy の意味にゆるめたり，荷重を変更することなどを示してBoas の結果を拡張している。第2章ではヤコビ級数について収束の一つの条件とその和で表示される関数の可積分性を導くための荷重を示しており，フーリエ級数の場合と同様のことが成立することを示した。

第3章では，円の内部で調和な関数を2変数関数とみたとき，二重級数展開の性質と可積分性との関係を調べているが，積分範囲を四分円とするか三角領域とするかで状況が異ってくることを明らかにした。これは一変数の場合におけるHeywood の研究(1957)ではおきない現象である。

第4章では，著者はK変換とよんでいる一つの積分変換を導入しているが，これは Askey-Boas(1967)が扱ったフーリエ・スチールチェス正弦・余弦級数に対応するものである。これについて類似の性質を研究しているが，その一つの結果として前記 Boas の一つの予想問題について完全な解答を与えている。

第5章では，フーリエ級数の絶対収束についての有名なBernstein の結果をフーリエ・ヤコビ変換の場合に類似を与えて関数と級数間の関係を調べている。すなわち関数のある種のm次導関数を定義して，そのL^2 の意味のリプシッツ条件からフーリエ・ヤコビ変換のある可積分性を導いている。

これら諸結果はいずれも古くから尨大な諸結果の総合的見通しの上になされたものであり，諸計算も労力と技巧を要するものが多く，著者の学識を証するに十分である。この方面の研究に寄与するところも大きいと評価される。

以上のように，本論文は著者が自立して研究を行うに十分な能力をもっていることを示しており，博士論文として合格と認める。