氏名・（本籍）	関口　健（せきぐち　たけし）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第603号
学位授与年月日	昭和54年10月24日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和46年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Weighted norm inequalities on the martingale theory （マルチンゲール理論における荷重ノルム不等式）
論文審査委員	（主査） 教授　土倉保　教授　吉沢太郎 教授　渡利千波

論文目次

論 文 内 容 要 旨

序　文

Doob によるマルチンゲールの研究の始めから，その主題の一つはマルチンゲールの汎関数の間のノルム不等式であった。Doob の不等式や Burkholder − Davis − Gundyの不等式は，その代表的なものである。これらの不等式は，マルコフ過程論等，確率論の他の分野への応用も広い。またこれらの不等式は，実解析学に現れる不等式と密接な関連がある。近年Garsia，Getoor−Sharpe等によるH^p−マルチンゲール，BMO−マルチンゲールの研究も，実解析学におけるHardy族の理論をモデルとしている。このように，実解析学とマルチンゲール理論の関連は，確率積分論の発展と共に，マルチンゲール理論をより豊かなものとして来た。本論文も，Muckenhaupt等により研究されている実解析学における荷重ノルム不等式の研究をモデルとしている。

以下，我々は系$(\Omega, F, P, (F_t)_t)$上のマルチンゲールを考える。ここで(Ω, F, P)は確率空間で，$(F_t)_t$ はFの部分σ−集合体の増加族とする。今Wを荷重マルチンゲールとする。すなわち，Wは一様可積分マルチンゲールで，$E[W_\infty]=1$と$W_\infty>0$を満たすものである。新しい確率測度P_wを$P_w[A]=E[W_\infty; A]$で定義する。我々の問題は次のように述べられる。確率測度Pについて成立しているノルム不等式が，新しい確率測度P_wについて成立するためには，Wはどのような条件を満たせばよいか?この問題を，Doobの不等式，Burkholder − Daris − Gundyの不等式，Rieszの不等式について，第Ⅲ章で考察する。第Ⅰ章では，上の問題を解くために必要な荷重マルチンゲールのある族について調べる。第Ⅱ章では，法則を変換する代りに，ずれの変換を考え，Davisの不等式を主に論じる。

［第1章］　荷重マルチンゲールの族を$\mathbb{W}$と記し，各$k\geqq 1$に対しその部分族を次のように定義する。

$S^+(k)=\{W\in\mathbb{W} \mid$ 各停止時Tに対し$W_T\leqq kW_{T-}\}$

$S^-(k)=\{W\in\mathbb{W} \mid$ 各停止時Tに対し$W_T\geqq (1/k)W_{T-}\}$

$B_\lambda^+(k)=\{W\in\mathbb{W} \mid$ 各停止時Tに対し$E[W_\infty^\lambda \mid F_T]^{1/\lambda}\ kW_T\}$, $0<|\lambda|<\infty$

$B_\lambda^-(k)=\{W\in\mathbb{W} \mid$ 各停止時Tに対し$E[W_\infty^\lambda \mid F_T]^{1/\lambda}\geqq (1/k)W_T\}$, $0<|\lambda|<\infty$

$B_0^-(k)=\{W\in\mathbb{W} \mid$ 各停止時Tに対し$\exp E[\log W_\infty \mid F_T]\geqq (1/k)W_T\}$

$B_{-\infty}^-(k)=\{W\in\mathbb{W} \mid$ 各停止時Tに対し$W_\infty\geqq (1/k)W_T\}$

$A_p(k)=B_{-1/(p-1)}^-(k)$, $1\leqq p\leqq\infty$

更に$A_p=\bigcup_{k\geq 1} A_p(k)$とし，$B_\lambda^\pm$，$S^\pm$も同様に定義する。このとき次の結果が知られている

Doleans − Dade とMeyer の定理［Lecture Notes in Math. 721 (1979)］Wが$S^+($
$k\geqq 1$に属すとする。そのときWが$B_\lambda^-(k)$，$\lambda<1$，に属するならば，Wが$B_\mu^+(h)$に属する$\mu>$
と$h\geqq 1$が存在する。

この定理を用いて，§ 1.で次の定理を得る。

定理Wは$S^{\pm}$ に属するとする。そのときWがA_∞に属することと，適当なp， $1\leqq p<\infty$，に対しA$_p$に属することは同値である。

上の定理は指数マルチンゲールがA$_p$ ，$1\leqq p<\infty$，に属することを調べるときに用いられる。

§ 2では，Doléans－Dade とMeyerの定理におけるS^{+} の役割について次の結果を得る。

(i) あるk $\geqq 1$ に対し$W=S^{+}(k)$。

(ii) 各$\lambda<1$とk$\geqq 1$に対し，$\mu>1$とh$\geqq 1$が存在して，$B_{\lambda}^{-}(k)\subset B_{\mu}^{+}(h)$となり，更に$(F_t)_t$は∞以外の到達不可能停止時を持たない。

(iii) あるk>1が存在して$B_{1}^{-}(k)\subset\cup_{\mu>1}B_{\mu}^{+}$ となり，更に$(F_t)_t$は∞以外の到達不可能停止時を持たない。

上の定理の条件(i)は，離散時助変数のときσ－集合体列の正則条件と一致している。

Wを局所マルチンゲールMの指数マルチンゲールとする。すなわち，Wは確率積分方程式$W=1+W_{-}\cdot M$の解である。ここで$W_{-}\cdot M$はW_{-}のMによる確率積分である。このときWがA_∞に属することをMの条件で言い換えることが§ 3の目的である。Mが連続局所マルチンゲールの場合は，風巻［Lecture Notes in Math. 511 (1976)］による結果がある。一般の局所マルチンゲールMに対し，彼の結果を次のように拡張した。

定理(i)Wが$A_\infty(k)$に属するための必要十分条件は，Aの右ポテンシャルが log k で有界になることである。

(ii) WがA_∞とS に属するための必要十分条件は，Aの左ポテンシャルが有界になることである。

ここで$A_t=\frac{1}{2}<M^c, M^c>_t+\Sigma_{0\leqq s\leqq t}\{\triangle M_s-\log(1+\triangle M_s)\}$。

上の定理の系として，Doléans－Dade とMeyer［Lecture Notes in Math. 581 (1977)］および風巻［Tohoku Math. J，31 (1979)］で与えられた結果の改良を得る。更に和泉沢－関口－塩田［Tohoku Math. J，31 (1979)］で示された結果の簡単な別証明が得られる。

［第Ⅱ章］ この章では，局所マルチンゲールのずれの変換を考える。すなわち，固定した局所マルチンゲールMを考え，各局所マルチンゲールXに対し，$\phi(X)=X+[X, \hat{M}]$とおく。ここで$\hat{M}_t=-M_t+<M^c, M^c>_t+\Sigma_{0\leqq s\leqq t}(\triangle M_s)^2/(1+\triangle M_s)$。$\phi(X)$をMによりずらされた局所マルチンゲールと呼ぶ。

§ 1.において，ずらされた局所マルチンゲールに対しDavisの不等式を次のように拡張した。

定理MをBMO－マルチンゲールで$\triangle M\neq -1$を満たすものとする。このとき各局所マルチンゲールXに対し，不等式

$c_1E[\phi(X)_\infty^*]\leqq E[[\phi(X), \phi(X)]_\infty^{1/2}]\leqq c_2E[\phi(X)_\infty^*]$が成立する。ここに$c_1$と$c_2$は正の定数であり，$\phi(X)_\infty^*=\sup_t|\phi(X)_t|$，更に$[\phi(X), \phi(X)]$は$\phi(X)$の二次変分過程である。

この定理からGarsia－Neveuの補題を用いてBurkholder－Davis－Gundy型の不等式が得られる。

§2では，上の定理の逆を考えることにより，BMO－マルチンゲールの特徴づけをする。

定理(i)MがBMO－マルチンゲールで，ある正数εに対して$|1+\triangle M|\geqq\varepsilon$とする。そのとき各局所マルチンゲールXに対し，不等式

$$E[\phi(X)^*_\infty]\leqq cE[X^*_\infty]$$

が成立する。ここでcは正の定数である。

(ii) Mが局所マルチンゲールで，$\triangle M\neq-1$を満たし，更に$\triangle M$は有界とする。各局所マルチンゲールに対し上の不等式が成立すれば，MはBMO－マルチンゲールであり，正の定数εが存在して各到達不可能停止時に対し$|1+\triangle M_T|\geqq\varepsilon$となる。

もしMが連続ならば，上の定理はMがBMO－マルチンゲールであることを，定理の中の不等式で完全に特徴づけている。

§3では，§1と§2の結果の応用として，Feffermanの双対定理，すなわち$(H^1)^*=BMO$，をずらされた局所マルチンゲールに対し拡張する。

［第Ⅲ章］　§1では，Doob型の荷重ノルム不等式について次の定理を証明する。

定理．Wを$A_p(k)$，$1\leqq p<\infty$，に属するとする。このとき各一様可積分マルチンゲールXに対し，不等式

$$E_w[(X^*_\infty)^q]\leqq\left(\frac{kq}{q-p}\right)^{q/p}E_w[|X_\infty|^q]$$

および

$$E_w[(X^*_\infty)^p]\leqq\frac{ek}{e-1}E_w[|X_\infty|^p\log^+|X_\infty|^p]+\frac{ek}{e-1}$$

が成立する。ここで$p<q<\infty$，$E_w[\ \cdot\ ]$はP_wに関する期待値とする。

上の定理の最初の不等式は，和泉沢－風巻［Tohoku Math，J．29（1977)］で得られたものである。我々は通常のDoobの不等式の証明と同様に，分布型の不等式

$$u^pP_w[X^*_\infty>u]\leqq kE_w[|X_\infty|^p;X^*_\infty>u],\ u>0$$

を先ず示し，それを用いて最初の不等式と一緒に第二の不等式を証明する。更にこの定理の逆について考察する。

§2では，Davis型の荷重ノルム不等式について調べる。第Ⅱ章の結果とGirsanovの定理を用いることにより，次の定理を得る。

定理．Wが$S^\pm$とA_∞に属するとする。そのとき各局所マルチンゲールXに対し

不等式

$$c_1E_w[(X^*_\infty)^p]\leqq E_w[[X,X]^{p/2}_\infty]\leqq c_2E_w[(X^*_\infty)^p],\ 1\leqq p<\infty,$$ が成立する。

ここでc_1とc_2は正の定数である。

定理．Wが$S^\pm$に属するとする。そのときWがA_∞に属するための必要十分条件は，各局所マル

チンゲールXに対し

$$E_w[X^*_\infty] \leqq c\,E_w[\,[X,X]^{1/2}_\infty\,]$$

が成立することである。ここでcは正の定数とする。

最初の定理については，Bonami－Lepingle［Lecture Notes in Math. 721(1979)］による別証明があるが，第Ⅱ章の方法による我々の証明がより一般的である。

最後に§3において，Riesz型の荷重ノルム不等式について考察する。βを複素ブラウン運動とし，$(\Omega, F, P, (F_t)_t)$をβから自然に構成される系とする。このとき各局所マルチンゲールXは$X = x + H\cdot B + K\cdot C$と表現できる。ここでxは実数，HとKは可予測過程，BとCはそれぞれβの実部と虚部である。Xの共役過程$\widetilde{X}$を$\widetilde{X} = K\cdot B - H\cdot C$により定義する。$\widetilde{X}$は実解析学における共役関数に相当するものである。このとき，次の定理を得る。

定理.(i) WがA_p，$1<p<\infty$，に属するならば，各局所マルチンゲールXに対し

不等式

$$E_w[\,|\widetilde{X}_\infty|^p\,] \leqq c\,E_w[\,|X_\infty|^p\,]$$

が成立する。ここでcは正の定数である。

(ii) WがA_∞に属し，上の不等式が成立するならば，WはA_pに属する。

論文審査の結果の要旨

確率論においてLévy，Doob等によりマルチンゲールの概念が導入されてからその有用性は解析学において不可欠のものとなったが，その最も顕著なものの一つは調和解析との関連性，とくにハーディ空間H^pやBMO空間との類似性で近年それらの間の研究について互いに刺激しあい急速な発展がされている。本研究もその一環をなすもので，とくに荷重をもつ場合に主眼点をおいている。すなわち確率空間の確率測度をPとするとき，一つの荷重確率変数$W \geqq 0$，$E[W]=1$に対してWdPもまた一つの確率測度を定義することになるが，これとdPに対してマルチンゲール汎関数のノルムがどのように保存されるかを検討している。以下各章ごとに概略をのべよう。

第1章では上の問題を整理するため荷重Wについていくつかの族を考える。例えばWから作られるマルチンゲールの不連続点についてその跳びの大きさに制限をつけた族，またWの大きさがWのあるノルA等でおさえられている族などである。著者はこれらの族について互の包含関係等既知の結果をより精密にし，さらに証明も一貫性をもつものに改良するなど応用の広いものとしている。

第2章では局所マルチンゲールMを一つ固定しておいたとき，これによって一般の局所マルチンゲールXをずらすという一つの変換された局所マルチンゲール$\phi_M(X)$を導入している。そしてまずこれについてDavis型の不等式を示し，ついでB－D－G型といわれる基本型の不等式を導いている。この結果はまた逆を考察することによってBMOマルチンゲールの特徴づけがされ，とくにマルチンゲールMが連続であるときは完全に精密な特徴づけである。この応用としてはFeffermanの双対定理，すなわちH^1の共役空間がBMOであるという定理は，ずらされた局所マルチンゲールの場合にも成立することを示した。

第3章では，第1章で導入された荷重Wの族の条件のうち$A_p(k)$条件といわれるものを満たす場合についてDoob型の不等式がこの荷重ノルムについても成立することなどを示している。さらに付帯条件を強めるとDavis型も成立するなど第2章の手法による証明が与えられている。さらにまた共役関数に相当するものについてもRiesz型の不等式の成立する場合の決定的な結果を与えている。

参考論文はいずれもマルチンゲール理論に関するもので，指数マルチンゲールについての一つの問題についての結果を与えるもの，マルチンゲールのKrickeberg分解についてその連続性の研究，二重パラメーターの場合の研究などいずれも新しい結果である。

以上本論文，参考論文とも学術的に重要な研究結果であり，とくにマルチンゲール理論の新しい発展に寄与するものである。著者は独立した研究者として十分な学識を示したものであり，学位論文として合格と認める。