氏名・(本籍)	押切源一（おしきりげんいち）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第 757 号
学位授与年月日	昭和 59 年 3 月 12 日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和53年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Geometry of Foliations （葉層の幾何学）
論文審査委員	（主査） 教授 佐武一郎　教授 小竹　武 教授 堀田良之

論文目次

論文内容要旨

薬層構造論には，主として定量的理論と定性的理論がある。定量的理論には，特性類や分類空間の位相的構造などの研究が含まれる。この論文の第1章で考察する，葉層同境による葉層構造の分類は，Haefliger によって導入された分類空間 $B\Gamma$ の位相的構造と深く結びついている。第2章で考察する葉層構造の微分幾何的側面は，特別な性質をもった葉層構造の研究が動機となっている。例えば，Epstein や Rummler らが明らかにしたコンパクト葉層とリーマン計量の関係，及びこれを一般の葉層に対して考察した Sullivan や Harvey-Lawson の極小葉層に関する仕事がある。また，Reinhart や Hermann らによるリーマン葉層の微分幾何的研究や，最近では，Asimov，Langevin らによるリーマン計量を考えた葉層多様体上の積分公式などがある。これらの研究をみると，ある種の微分幾何的性質を伴った葉層構造を研究するのは，非常に興味深いことのように思われる。第2章では，余次元1の極小及び全測地的葉層を取り扱っている。

序章の第1節では，主として第1章で現われるいろいろな葉層多様体を例としてまとめておいた。第2節，第3節では，それぞれ，第1章，第2章の結果をまとめておいた。

第1章では，葉層構造の同境類，特に，葉層の手術によって得られた葉層多様体ともとの葉層多様体との間の関係，並びに，今まで葉層構造の存在を示すのに用いられたもの，あるいはそれらから構成されたものに対して，その同境類を調べている。多様体の同境の概念は，R. Thom によって導入され，特性類を通してその同境群は完全に決定された。葉層多様体の同境の概念は，多様体の間の同境に葉層構造も考えあわせたものとして，やはり，R. Thom によって導入されたとのことである。Godbillon と Vey が3次元の葉層多様体の同境類の不変量(Godbillon-Vey 数)を見つけ，それを使って Thurston が，3次元の余次元1葉層多様体からなる同境群 $\mathscr{F}\Omega_{3,1}$ から $\mathbf{R}$ への全射があることを示すまで，葉層構造の同境類に関する仕事はほとんどなかった。これ以後，Godbillon-Vey 数が零となる葉層多様体が零同境かどうかが大きな問題となっているが，まだ完全には解決されていない。その中でも，特に，S^3 の Reed 葉層，及び，T^2 上の葉層化 S^1—束が零同境かどうか，また，3次元の葉層多様体に葉層の手術をほどこして得られた葉層多様体がもとのものに同境かどうかということが問題となった。Reeb 葉層が零同境であることや，葉層の手術による同境類の不変性は，その幾何学的単純さから，きわめて自然なことに思われた。更に，T^2 上の葉層化 S^1—束が零同境というのも，$\mathscr{F}\Omega_{3,1}$ が $\mathbf{R}$ と同型であろうという予想からすれば，成り立って欲しいものであった。Reeb 葉層については，Sergeraert が零同境であることを証明した。T^2 上の葉層化 S^1—束については，ほとんどの場合零同境になることはわかっているが，まだ完全には決定されていない。葉層の手術については，同境類の不変性を，Sergeraert の結果を用いて第1章で証明してある。この結果は，一般次元の葉層手術に対する同境類についての次の定理の系として得られる。

[定理] $(s(M^{2n+1}), s_\alpha(\mathscr{F}))$ で $(M^{2n+1}, \mathscr{F})$ に葉層手術をして得られた葉層多様体を表わすこと

にすると，

$$(s(M^{2n+1}),\ s_\alpha(\mathscr{F})) \sim (M^{2n+1},\ \mathscr{F}) + (S^{2n+1},\ \mathscr{F}'_\alpha)。$$

ここで，$\mathscr{F}'_\alpha$ は手術で用いられる葉層多様体から自然に得られる球面 S^{2n+1} 上の葉層構造。

証明は，具体的に葉層構造を構成することによって得られる。更に，この構成法を使って，回転可能構造から得られた葉層多様体に対して，その同境類を調べることができた。

葉層多様体 $(M, \mathscr{F})$ と $\mathscr{F}$ を保つ M の自己微分同相 f に対して，力学系における懸垂と同じ構成によって懸垂葉層 $\Sigma_f(M, \mathscr{F})$ を次のように定義する；$(M, \mathscr{F}) \times [0,\ 1]/(x,\ 1) \sim (f(x),\ 0)$。

$FD(M, \mathscr{F})$ (resp. $LD(M, \mathscr{F})$) で M 上の自己微分同相で $\mathscr{F}$(resp. $\mathscr{F}$ の各葉)を保つもの全体のなす群，$FD(M, \mathscr{F})_0$(resp. $LD(M, \mathscr{F})_0$) で，C^∞—位相でのその単位元の連結成分を表わすことにすると，$FD(M, \mathscr{F})_0$ と $LD(M, \mathscr{F})_0$ の差は F の複雑さに反比例していることがわかる。また，懸垂葉層の一つである T^2 上の葉層化 S^1—束が零同境であるという予想を考えあわせると，$f \in FD(M, \mathscr{F})_0$ なら $\Sigma_f(M, \mathscr{F}) \sim 0$ であろうに予想できる。第1章の残りの部分では，この予想について調べている。一般的なアプローチは残念ながら得られなかったが，以下のような良く知られた葉層多様体に対しては，予想が正しいことが証明できた。

（1） 閉1—形式で定義された葉層。

（2） S^3 上の Reeb 葉層と変形 Reeb 葉層。

（3） Thurston によって S^3 上に構成された葉層。

（4） 回転可能構造から得られた3次元多様体上の葉層。

更に，3次元の葉層多様体に葉層の手術をしたものに対しても調べることができた。

証明は，$FD(M, \mathscr{F})_0$ と $LD(M, \mathscr{F})_0$ の差が Reeb 葉層の回復や完全群などの積になることを示し，葉層手術の回転不変性を使って零同境を構成することで得られる。

第2章では，余次元1の極小及び全測地的葉層について調べている。この方面の研究は，最近，葉層構造のほうにも重点がおかれるようになってきている。葉層構造自体の解明に，こういうアプローチがどの程度役立つかは今のところはっきりしないが，葉層の構造とリーマン幾何におけるいろいろな概念相互のからみあいは興味深いものがある。

最近，Sullivan は葉層構造をもつ多様体において，葉層カレントから得られるホモロジーに対する homology taut という概念と，リーマン計量に対する geometrically taut という概念を導入し，これらが同値であることを示した。これによると，極小葉層の研究は，ホモロジーに関するある種の条件をみたした葉層構造の研究ということになるが，極小曲面論等，微分幾何的手法が使えるという点で，より細かい議論ができるのではないかと期待している。

以下で基本的な役割をはたすのは次の定理である(定理の番号は序章のものと一致させておいた)。

[定理1] $(M, \mathscr{F}, g, N)$ を完備なリーマン多様体 (M, g) 上の横断的に向きづけられた余次元1の極小葉層とする。このとき次が成り立つ：

（1） $\mathscr{F}$ の各葉は安定である。

（2） $\mathscr{F}$ の各コンパクト葉 L に対して次は同値。

（a） L は自明でないヤコビ場をもつ。

（b） L は零点をもたないヤコビ場をもつ。

（c） L の線形ホロノミーは自明である。

更にこのとき，L の nullity は 1 となる。

証明の方針は，$\mathscr{F}$ の葉 L に対して第二変分公式を計算して，それが非負であることを示すのが（1）。（2）は，これから得られる 1 一形式に対する微分方程式を調べることと，Reeb の線形ホロノミーに関する定理から得られる。安定性に関しては，Harvey—Lawson が Sullivan の結果を精密化したものとして，一般の余次元で議論している。この定理の応用として，余次元 1 の極小葉層をもつ多様体上のキリングベクトル場について次を得る。

［定理 3］ (M, $\mathscr{F}$, g, N) を定理 1 のものとする。M が連結で，$\mathscr{F}$ はコンパクト葉をもつと仮定する。C($\mathscr{F}$) で $\mathscr{F}$ のコンパクト葉全体の和を表わすことにする。このとき，もし (M, g) 上のキリングベクトル場 X が C($\mathscr{F}$) のある点で $\mathscr{F}$ に接すれば，X は C($\mathscr{F}$) 上至る所で $\mathscr{F}$ に接する。

この定理は，Johnson と Whitt が余次元 1 全測地的コンパクト葉層に対して得た結果の拡張となっている。彼らは，更にその結果を使って，等長変換群についても調べているが，同様のことを極小葉層について行なうと次のようになる。

［定理 5］ (M, $\mathscr{F}$, g, N) は定理 3 におけるものとすると

$$\dim I_0(M, g) \leqq \min\{\dim I_0(L, g\,|\,L)\,;\, L \subset C(\mathscr{F})\} + 1。$$

ここで，“＋1”の項は，あるコンパクト葉の線形ホロノミーが自明でないなら，とり除くことができる。

証明は，上の定理と彼らの議論を組み合わせることによって得られる。また，この定理で等式が成り立つ場合には，Harvey-Lawson の homologically mass-minimizing の性質をうまく使って，$\mathscr{F}$ のすべての葉が一つのコンパクト葉と等長的になることが示される。

キリングベクトル場の性質について，余次元 1 の全測地的葉層では，定理 3 の一つの拡張として，次のことが成り立つ。

［定理 6］ (M, g) を閉じた連結なリーマン多様体，$\mathscr{F}$ を余次元 1 の全測地的葉層とする。このとき，(M, g) 上の任意のキリングベクトルは $\mathscr{F}$ を保つ。

証明には，余次元 1 の全測地的葉層に関する分解定理を用いる。また，この分解で，計量も単純な形に表わされるので，これに現われる関数を使った微分方程式を考え，その解を調べることによって定理 6 が得られる。

キリングベクトル場をもつリーマン多様体は，計量がある意味では「きれい」なので，極小葉層や全測地的葉層は調べやすいと思うが，今のところ，よくわかっていない。比較的簡単なリーマン多様体として，曲率に制限をつけ，その上の極小葉層を調べたのが次の定理である。

［定理７］ $(M, \mathscr{F}, g, N)$を閉じたリッチ曲率が非負なリーマン多様体上の横断的に向きづけられた余次元１極小葉層とすると，Ｎは平行ベクトル場になる。特に，$\mathscr{F}$は閉１一形式で定義される。

最近，Britoが，余次元２で同様のことを考察しているが，一般の余次元では，まだよくわかっていない。また，リッチ曲率非正という条件では，余次元１でしかも全測地的葉層で，閉１一形式で定義できないものがあることを注意しておく。但し，Propositionにあるように，断面曲率非正にすると，余次元１の全測地的葉層は，閉１一形式で定義できることがわかる。証明は，いずれも，Bochnerの手法を用いることによって得られる。

論文審査の結果の要旨

高次元多様体の多くは，ファイバー束や群多様体の例が示すように，低次元多様体の連続的な層に分解される。このような葉層構造をもつ多様体(“葉層多様体”)は力学系の理論や微分幾何学とも関連し，最近 Haefliger，Thurston 等によって活発に研究されている。押切氏の論文はこの葉層多様体に関していくつかの基本的な結果を与えるものである。

第1章は Thom によって導入された葉層多様体の “同境類” (cobordism class)に関するもので，まず余次元1の3次元葉層多様体の同境類が多様体のある種の変形(“手術”)によって不変であろうという Rosenbery-Thurston の予想を肯定的に解決している。さらに与えられた葉層構造とその自己同型から作られる懸垂葉層(suspended foliation)の同境類がゼロになるためのいくつかの十分条件を得ている。これらの結果は非常に基本的なもので多くの応用をもつものと考えられる。

第2章ではさらに，葉層構造とリーマン構造の関係，特に葉層がリーマン幾何のいみで最小曲面や測地曲面になっている場合について，その上のキリング場やヤコビ場の性質をしらべ，いくつかの興味ある結果を得ている。

このように押切氏の論文はこの方面の研究に対し重要な貢献をするもので，同氏が研究者としてすぐれた感覚と力量をもつことを示している。よって理学博士の学位論文として合格と認める。