氏名・（本籍）	和泉澤　正　隆（いずみさわ　まさ　たか）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第763号
学位授与年月日	昭和59年6月27日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和49年3月 東北大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Martingales and changes of law in the theory of stochastic processes （確率過程論に於けるマルチンゲールと法則の変換）
論文審査委員	（主査） 教授　土倉　保　　教授　猪狩　惺 教授　加藤順二

論　文　目　次

論 文 内 容 要 旨

マルチンゲールといわれる確率過程は，時間とともに増大していく情報系(F_t)とこれに関する確率法則Pによる条件付き平均の性質により特徴付けられている。従って，扱っている法則の性質をもっともよく反映するものの一つであるが，法則を変更すると原則として，その性質は失われることになる。しかし，法則のずれ(drift)の変換を考慮するとき，マルチンゲールは法則間の関連を調べるために有効なものとなる。そして現実の諸問題の解析，研究においては，現象(確率過程の1つの軌跡と考えられる)に対し，複数の確率法則を考え，その相互関係を明らかにすることが重要になってきていると思われる。

本論文では，もとになる1つの確率法則PとPに同値な確率法則(すなわちPと互いに絶対連続な確率測度)とを考え，法則の変換の性質とPに関するマルチンゲールの上の作用素についての評価との関係について研究する。

さらに，法則の変換に関連して，最適確率制御理論の値過程についても考察する。

第1章および第II章

ここでは，マルチンゲール上の作用素に関する不等式(特にDoob型，Burkholder-Davis-Gundy型，Chevalier型)を法則に重みがくわわった場合について研究する。すなわち，法則Pからの変換を，もとの法則に対して荷重のついたものと考えるのである。上述した型の不等式の多くは，実解析学におけるHardy族の理論に現れる不等式と密接な関連があり，実解析学においては，Muckenhoupt等により荷重ノルム不等式の研究がなされている。本論文でも彼等の手法を一つのモデルとしている。

いま，P, Qを2つの同値な確率法則とし，QのPに関するRadon-Nikodym微分係数をW，Pおよび(F_t)によってWから作られるマルチンゲールを(W_t)とする。従って，$dQ=W\,dP$かつ$W_t=E[W \mid F_t]$である。ここでは，QをPから変換された法則と考え，Wを重み，(W_t)を荷重マルチンゲールとよぶ。そして，(W_t)が法則の変換および増大情報系の性質を反映するものと考える。

第I章の§1と§2では荷重マルチンゲールの族とその性質を考え，§3でPマルチンゲールに対するMaximal関数のDoob型荷重不等式を取り扱う。Muckenhoupt［Trans. Amer. Math. Soc. 169 (1972)］は，R^n上の局所可積分関数とそのMaximal関数に対するHardy-Littlewood型の荷重不等式が成立するために，重み関数がみたすべき必要かつ十分な条件を与えている。この条件をマルチンゲール理論のなかで捉え直したのが$A(p)$条件である。ここでは，ほかに必要となるいくつかの定義についても述べておく。

定義(1)　$1<p<\infty$に対し，

$W_t\,E[W^{-1/(p-1)} \mid F_t]$が$L^\infty(P)$有界であるとき荷重マルチンゲールは$A(p)$条件をみたすという。また，正の定数$k$があって，$W_t \leq k\,W_\infty$となるとき$A(1)$条件をみたすという。

(2) 重み W の逆数の $(p-1)$ 乗根から作られる P マルチンゲールが A(1)条件をみたすとき，荷重マルチンゲールは $\alpha(p)$ 条件をみたすという。
(3) X を任意の非負確率変数とする。Q に関する X の条件付き平均が, P に関する X の条件付き p 次平均でおさえられるとき，荷重マルチンゲールは WI(p) 条件をみたすという。
(4) k を正の定数とする $W_t \leqq k W_{t-}$ となっているとき，荷重マルチンゲールは S^+ 条件をみたすといい，$k W_{t-} \leqq W_t$ となっているとき，S^- 条件をみたすという。

$p \geqq 1$ に関して荷重マルチンゲールが A(p) 条件をみたすならば A(p_0) 条件(ただし $p_0 > p$)もみたしていることは Hölder の不等式より容易に確かめられる。他の $\alpha(p)$, WI(p) 条件についても同じことがいえる。A(∞) 条件というのを，ある $p \geqq 1$ について A(p) 条件がみたされていることとしよう。$\alpha(\infty)$, WI(∞) 条件も同様である。

ここで定義した条件の間には，次の関係がある。(5)と(6)は Doléans-Dade と Meyer [Lecture Notes in Math. 721 (1979)] による。

定理(5) 荷重マルチンゲールが A(∞) 条件と S^+ 条件をみたすならば，WI(∞) 条件もみたしている。
(6) $p > 1$ のとき, 荷重マルチンゲールが A(p) 条件と S^- 条件をみたすならば, ある正の数 ε があって，荷重マルチンゲールは A$(p-\varepsilon)$ 条件をみたす。
(7) 荷重マルチンゲールが $\alpha(p)$ 条件をみたすならば，A(p) 条件および WI(1)条件をみたす。

次に Doob 型荷重不等式と A(p) 条件との関連について考える。一様可積分 P マルチンゲール $X=(X_t)$ に対し，$M(X)=\sup\limits_t |X_t|$ とおく。M(X) は X の Maximal 関数である。
$1 < p < \infty$ に対し

$$\int M(X)^p W \, dP \leqq C \int |X_\infty|^p W \, dP$$

を p 次 Doob 型荷重不等式という。ここで $C=C_p$ は X によらない定数である。和泉沢－風巻 [Tôhoku Math. J. 29 (1977)] により次の定理が得られている。

定理(8) 任意の P マルチンゲールに対して p 次 Doob 型荷重不等式が成立するなら，荷重マルチンゲールは A(p) 条件をみたす。
(9) 荷重マルチンゲールが A(p) 条件をみたし $p_0 > p$ ならば，任意の一様可積分 P マルチンゲールに対して p_0 次 Doob 型荷重不等式が成り立つ。

系(10) 荷重マルチンゲールが A(p) 条件と S^- 条件をみたせば, 任意の一様可積分 P マルチンゲールに対して p 次 Doob 型荷重不等式が成立する。

次に上の系と別の結果を与える。

命題(11) 荷重マルチンゲールが $\alpha(p)$ 条件をみたせば，任意の一様可積分 P マルチンゲールに対して p 次 Doob 型重不等式が成立する。

(10)と(11)の条件の間には互いに包含関係のないことが，いくつかの例により示されている。

第II章では, 離散時径数の場合について，Burkholder-Davis-Gundy 型とその一般化の Chevalier 型の荷重不等式を扱う。P マルチンゲール (X_n) に対し，Maximal 関数や 2 次変分を一般

化した行列型作用素を定義する。$x_n = X_n - X_{n-1}$ とする。確率定数を成分とする行列で，k に関して u_{jk} は可予測，

$0 < 1/d < \sum_{j=1}^{\infty} u_{jk}^2 < d$ となっているものに対し

$$U^*(X) = \sup \{\sum_{j=1}^{\infty} | \sum_{k=1}^{n} u_{jk}\ x_p |^2\}^{1/2}$$

$$U^{**}(X) = \{\sum_{j=1}^{\infty} \sup_n | \sum_{k=1}^{n} u_{jk}\ x_p |^2\}^{1/2}$$

と定め，これを行列型作用素と呼ぶ。また条件付き2次変分 $s(X) = \{\sum_{k=1}^{\infty} E\ [x_k^2 | F_{k-1}]\}^{1/2}$, $r(X) = \{\sum_{k=1}^{\infty} E\ [\ | x_k |\ | F_k]^2\}^{1/2}$ とする。

確率過程でその跳びが可予測増加過程 D でおさえられる過程を D 有界とよぶ。

定理　荷重マルチンゲール (W_t) は WI(∞) 条件をみたしているとする

(12)　$p > 0$ のとき

$$\int [\mathrm{Max}\ \{U^{**}(X),\ V^{**}(X), s(X)\}]^p\ WdP \leqq C_p \int\ [\mathrm{Min}\ \{U^*(X),\ V^*(X), s(X)\} + D_\infty]^p\ WdP$$

が任意の D 有界な P マルチンゲール X に対して成り立つ。

(13)　$p \geqq 1$ で，(W_t) が S^- 条件をみたせば，

$$\int\ [\mathrm{Max}\ \{U^{**}(X),\ V^{**}(X),\ r(X)\}]^p\ WdP$$
$$\leqq C_p \int\ [\mathrm{Min}\ \{U^*(X),\ V^*(X)\}]^p\ WdP$$

が任意の P マルチンゲールに対して成り立つ、

(14)　$p \geqq 2$ で (W_t) が S^-条件をみたせば

$\int s(X)^p\ WdP \leqq C_p \int U^*\ (X)^p\ WdP$ がまた $p \leqq 2$ で (W_t) が S^+ と S^- 条件をみたせば

$\int U^{**}\ (X)^p\ WdP \leqq C_p \int s(X)^p\ WdP$

が，任意の P マルチンゲールに対して成り立つ。ここで，V^{**}, V^* は行列型作用素で，C_p は X に無関係な定数である。

本論文では，X の跳びの分解と分布不等式とを使って，この定理を証明しているが，$A(p)$ 条件と BMO マルチンゲールとの関係を使う証明法もある。

第III章

本章では，観測が完全可能で，各制御政策測度が法則 P と絶対連続になっている場合の最適確率制御問題を扱う。すなわち，制御政策測度の法則 P からのずれに，制御過程が反映されていると考える。さて，最適制御過程 u^* というのは，許容される制御過程 u のうちで，制御に要する費用を最小にするものである。制御過程 u に対する損失過程を $b(u)$，制御政策測度を p^u とすれば，費用は $E^u\ [b_\infty\ (u)]$ である。時刻 t までの u に対する条件付き最小費用を $J_t\ (u) = \inf_u E^u\ [b_\infty\ (u)\ |\ F_t]$ とするとき，

u^* が最適制御過程であるための必要十分条件は $J_t(u^*)$ が P^{u^*} マルチンゲールであることで，一般には，$J_t(u)$ は P^u 劣マルチンゲールであり，また値過程と呼ばれる確率過程 (V_t) があって $J_t(u) = b_t(u) + V_t$ となっている。El Karoui ［Lecture Notes in Math. 876 (1981)］参照。

一方，西尾［Indian Statist, Inst. Lecture Notes 9 (1981)］は費用に対しベルマン原理とい

われる2段階最適化が成り立つことにより，関数空間上にある単調な縮小半群作用素が定められて，その生成作用素の下界がベルマン方程式と関連のあることを示している。

ここでは，西尾の考え方を使い，値過程の特徴付けを与えた。有界な右連続適合過程全体を $\mathbf{X}_b$，$\mathbf{X}_b$の元で $b_t(u)+e^{-at}X_t$ が P^u劣マルチンゲールになるものの全体を $\mathbf{J}$ とし，$U_t=e^{at}V_t$ とする。

定理(15)　U は $\mathbf{J}$ の中の最大元である。

(16)　$h\geqq 0$ に対して，$\mathbf{X}_b$ から $\mathbf{X}_b$ への単調な縮小作用素 G_h が存在して $\{G_h\}_{h\geqq 0}$は半群性をもつ。

(17)　U は $\{G_h\}$ に関する $\mathbf{J}$ での不動点となっている。

論文審査の結果の要旨

確率過程論においてマルチンゲールという概念が極めて有効な研究手法を多く提供しているが，この有効性が二つの確率法則，すなわち測度論的には2種の測度の間の関連性を考えるとき，どのように作動しているかを中心課題として研究している。具体的にのべよう。

まず第I章では二つの確率法則を，一方を他方の確率法則に荷重のついたものと解釈する。実解析学においてマケンハウプト等による荷重測度に関する重要な不等式関係が示されているが，本論文でも彼等の手法を一つのモデルとして確率論的な $A(p)$ 条件というものを定義した。さらに著者は関連した条件として $\alpha(p)$ 条件，$WI(p)$，S条件等を導入して不等式関係との関連性を述べている。例えば，「確率測度Pについてのマルチンゲールが，S条件をみたす荷重をもつときのドーブ型最大値形不等式をみたすための必要十分条件は，荷乗が $A(p)$ 条件をみたすことである」などである。その他関連した諸結果や精密化，互の条件の包含関係などについても詳細に調べられている。

第II章で述べているのは離散時系列のマルチンゲールについて，最大関数，平方変分などの概念を一般化した行列型作用素についての諸結果を荷重のある場合について研究することである。この場合にもやはり第I章の結果と平行した諸結果が調査されているが，離散時系なのでマルチンゲールの跳びの分析などが大きな問題であり，著者はこの跳びが予測可能な一つの増加過程でおさえられている場合などを想定して研究している。

第III章では完全観測可能な制御過程についての最適制御問題を扱っている。すなわち制御政策測度で，観測の停止または交換という操作について閉じているもののクラスを考え，さらに本来の確率測度と互に絶対連続であるというような仮定をおいて，その条件のもとで制御費用を最小にすることを考えるのである。一つの制御過程が最適制御になるための必要十分条件は，時刻tまでの条件付最小費用がtについてのマルチンゲールを構成することで規定されることであるが，この最小費用は損失過程と値過程とよばれる確率過程の和として表現されることを利用して，この値過程といわれるものをあるクラス上の非線型半群を構成することによって特徴づけを与えている。

参考論文は，BNOマルチンゲールとそれから導かれる指数マルチンゲールとの互の特徴づけに関するもので不連続点における条件の緩和，一様可積分性などを述べた興味ある研究である。

以上，本論文，参考論文とも斯界の研究に新しい寄与をしたもので，著者は独立した研究者として十分な学識をもつことを示しており，博士論文として合格と認める。