氏名・(本籍)	大仁田　義　裕（おおにた　よし　ひろ）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	理博第　949　号
学位授与年月日	昭和61年1月29日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 （博士課程）数学専攻
学位論文題目	Minimal submanifolds, harmonic maps and Yang - Mills fields （極小部分多様体，調和写像そしてヤングーミルズ場）
論文審査委員	（主査） 教　授　佐　武　一　郎　　教　授　小　田　忠　雄 助教授　佐　藤　　肇

論　文　目　次

論 文 内 容 要 旨

極小部分多様体，調和写像，Yang - Mills 場は，微分幾何学において大変興味ある研究対象であり，近年ますますさかんに研究されている。微分幾何学によく現われる概念は，変分問題に関連したものが多い。これらもそれぞれある変分問題の解である。それぞれ汎関数として，部分多様体の体積，写像のエネルギー，接続の曲率形式の L^2 − ノルムを取ると，その臨界点として，極小部分多様体，調和写像，Yang - Mills 接続が得られる。その臨界点が1つ与えられたとき，それが実際その汎関数を極小にしているか？というのが安定性の問題である。本論文では，主に極小部分多様体，調和写像，Yang - Mills 場の安定性について論じる。

第1章においては，コンパクト既約対称空間の第1標準極小はめ込みの性質について述べる。球面内の極小部分多様体とそのラプラシアンの固有関数との興味ある関係が，高橋の定理によりよく知られている。その重要な応用の1つが，高橋自身によって示された。それは，「任意の既約な等方的表現をもつコンパクト等質空間は，そのラプラシアンの各固有空間の超球面内へ極小等長はめ込みできる」ということである。特に，第1固有空間へのその極小等長はめ込みは，第1標準極小はめ込みと呼ばれる。筆者は，多くのコンパクト既約対称空間に対して，第1標準極小はめ込みの極小等長はめ込みとして剛性があることを示した。また，コンパクト既約対称空間の第1標準極小はめ込みと対称 R - 空間の標準埋め込みの関係が論じられ，以前，竹内・小林によって提起された予想に対する完全な解答が与えられる。後の章において，コンパクト既約対称空間の標準極小はめ込みが変分問題の安定性の研究へ応用される。

第2章では，コンパクト対称空間内の安定極小部分多様体について述べる。特に，コンパクト階数1対称空間（標準的球面 S^n，実射影空間 $P_n(R)$，複素射影空間 $P_n(C)$，四元数射影空間 $P_n(H)$，Cayley 射影平面 $P_2(Cay)$）内の安定極小部分多様体の完全な分類が与えられる。リーマン多様体 $\bar{M}$ の極小部分多様体 M は，M の $\bar{M}$ におけるあらゆる変形に対してその体積の第2変分が常に非負のとき，安定であると呼ばれる。Simons および Lawson - Simons によって，S^n と $P_n(C)$ の安定極小部分多様体が分類された。筆者は，彼らの仕事を拡張して，次の定理を得た。

定理 1.

(1) S^n 内には p 次元コンパクト安定極小部分多様体は存在しない（$1 \leqq p \leqq n-1$）。（Simons）

(2) M を $P_n(R)$ 内の p 次元コンパクト極小部分多様体とする。M が安定であるためには，M が p 次元実射影部分空間 $P_p(R)$ と合同であることが必要十分である。

(3) M を $P_n(C)$ 内の p 次元コンパクト極小部分多様体とする。M が安定であるためには，$p = 2\ell$ かつ M は ℓ 次元複素部分多様体であることが必要十分である。（Lawson - Simons）

(4) M を $P_n(H)$ 内の p 次元コンパクト極小部分多様体とする。M が安定であるためには，$p = 4\ell$ かつ M は ℓ 次元四元数射影部分空間 $P_\ell(H)$ と合同であることが必要十分である。

(5) MをP_2(Cay)内のp次元コンパクト極小部分多様体とする。Mが安定であるためには，p= 8 かつMはCayley 射影直線P_1(Cay)=S^8と合同であることが必要十分である。

Lawson-Simonsは，定理1の(1)，(3)をrectifiable currentsへ拡張したが，筆者は，次の結果を統一的に証明した。

定理2.

(1) S^n内には，stable p-current ($1 \leqq p \leqq n-1$)は存在しない。(Lawson - Simons)

(2) $\mathscr{S}$が$P_n(C)$のstable p-currentならば$p=2\ell$かつ$\mathscr{S}$はcomplex current。(Lawson - Simons)

(3) $\mathscr{S}$が$P_n(H)$のstable p-currentならば$p=4\ell$かつ$\mathscr{S}$はquaternionic current。

(4) $\mathscr{S}$がP_2(Cay)のstable p-currentならば$p=0$，16または$p=8$で$\mathscr{S}$はCayley current。

定理2の(1)より「ユークリッド空間E^n内のコンパクト凸超曲面上には，stable p-current ($1 \leqq p \leqq n$)は存在しない」ことが予想されるが，筆者は次を得た。これは森の結果の改良である。

定理3.

M^nをE^{n+1}内のコンパクト凸超曲面とする。M^nの主曲率κ_i ($i=1,\cdots,n$)が$\sqrt{\delta} \leqq \kappa_i \leqq 1$をみたすとする。もし，$\delta > 1/2$ならば，$M^n$はstable p-current ($1 \leqq p \leqq n$)を含まない。

さらに，階数2以上のコンパクト対称空間内の安定極小部分多様体およびstable currentの分類をすることは，大変興味ある問題である。筆者は，この方向の研究を続けているが，本論文では，次の結果を述べる。

定理4.

Mをn次元単連結コンパクト階数2対称空間で，A_2型のものとする。すなわちMは，$SU(3)/O(3)$ $(n=5)$，$SU(3)$ $(n=8)$，$SU(6)/Sp(3)$ $(n=14)$，E_6/F_4 $(n=26)$のいずれかとする。もし，$1 \leqq p < n/3$または$2n/3 < p \leqq n$ならば，Mはstable p-currentを含まない。

第3章，第4章において調和写像およびYang-Mills場の非安定性について述べる。S^nを標準的球面とする。Xin，Leungにより調和写像に対する次の非安定性定理が示された。

定理5.　　$n \geqq 3$とするとき

(1)　(Xin) S^n から任意のリーマン多様体Nへの定数写像でない調和写像は常に非安定である。

(2)　(Leung) 任意のコンパクトリーマン多様体NからS^nへの定数写像でない調和写像は，常に非安定である。

また，Simonsにより Yang-Mills場に対する次の非安定性定理が示された。

定理6.　(Bourguignon-Lawson-Simons)

$n \geqq 5$とするとき，S^n上の任意の主束 (P, G, S^n) に対して，S^n 上の平坦でない Yang-Mills場は，常に非安定である。

そこで，次の概念を定める。Mをコンパクトリーマン多様体とする。

1) Mが"unstable"であるとは，Mの恒等写像が調和写像として非安定であることとする。

2) Mが"harmonically unstable"であるとは，次の2つの条件をみたすこととする。(a) Mから任意のリーマン多様体Nへの定数写像でない調和写像は，常に非安定である。(b) 任意のコンパクトリーマン多様体NからMへの定数写像でない調和写像は，常に非安定である。

3) Mが" Yang-Mills unstable"であるとは，M上の任意の主束 (P, G, M) に対してM上の平坦でない Yang-Mills場は常に非安定となることとする。

調和写像や Yang-Mills場に対するいくつかの存在定理から，これらの位相的制限を得る。

命題7.

(1) Mは harmonically unstable　$\Longrightarrow$　$\pi_1(M) = \{1\}$, $\pi_2(M) = \{1\}$

(2) Mは Yang-Mills unstable　$\Longrightarrow$　$H^2(M : \mathbb{R}) = \{0\}$。

筆者は，Xin, Leung, Simons の非安定性定理を次のように拡張した。

① E^{n+1} 内のコンパクト凸超曲面

定理8.

M^n をE^{n+1}内のコンパクト凸超曲面とする。M^n の主曲率 κ_i ($i=1, \cdots n.$) が $\delta \leqq \kappa_i \leqq 1$ とみたすとする。

(1) もし，$\delta > \frac{1}{n-1}$ ならば，M^n は harmonically unstable。

(2) もし，$\delta > \frac{2}{n-2}$ ならば，M^n は Yang-Mills unstable。

② 球面内の極小部分多様体

定理 9.

M^n を単位超球面 $S^{n+p}(1)$ 内のコンパクト極小部分多様体とする。

(1) もし，$\rho > n/2$ ならば，M^n は harmonically unstable。

(2) もし，$\rho - \mu > n/2$ ならば，M^n は Yang - Mills unstable。

ここで，ρ は M の Ricci 曲率の最小値，μ は M の曲率作用素の最大値を表わす。

③ コンパクト対称空間

定理 10

コンパクト対称空間 M が harmonically unstable であるためには，M が次の単連結コンパクト既約対称空間の直積であることが必要十分である。

(i) 単純リー群 $SU(n)$ $(n \geqq 2)$，$Sp(n)$ $(n \geqq 2)$

(ii) $SU(2n)/Sp(n)$ $(n \geqq 3)$

(iii) S^n $(n \geqq 3)$

(iv) 四元数グラスマン多様体 $Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$

(v) E_6/F_4

(vi) Cayley 射影平面 $P^2(Cay) = F_4/Spin(9)$。

定理 11

M が次の単連結コンパクト既約対称空間の直積ならば，Yang - Mills unstable。

(i) S^n $(n \geqq 5)$

(ii) E_6/F_4

(iii) $P_2(Cay)$。

Laquer はコンパクト対称空間の標準接続の Yang - Mills 接続としての安定性の研究した。彼の結果によれば，われわれはコンパクトリー群，S^n $(n \geqq 5)$，E_6/F_4，$P_2(Cay)$ 以外のコンパクト既約対称空間の標準接続は，Yang- Mills 接続として弱安定であることがわかる。よって定理 11 の(i)(ii)(iii)は，Yang- Mills unstable I 型コンパクト既約対称空間のすべてを与えている。コンパクトリー群が Yang-Mills unstable かどうかはまだ筆者は知らない。

Yang- Mills instability についての結果は，小林・竹内両先生と独立に得られたが，両先生も同様の研究をされていたので，共著論文としてまとめた。

論文審査の結果の要旨

微分幾何学において古くからある問題に与えられた多様体の部分多様体の中で体積が極小になるもの（いわゆる"極小部分多様体"）を求める問題がある。最近この問題の拡張ないし類似として種々の変分問題，およびその解の安定性が論じられるようになった。調和写像，ヤン－ミルズ場の理論はその中でも特に重要なものである。

大仁田氏提出の論文の第１章ではラプラシアンの第１固有関数によるコンパクト対称空間の球面への極小埋め込みおよびその剛性を論じ，特に竹内・小林の予想への完全な解答を与えている。

第２章ではコンパクト対称空間の中の安定な極小部分多様体を論じ，Simon や Lawson の分類結果をより一般な階数１の対称空間の場合（更にカレントの場合に）拡張，完成している。又階数が２以上の場合についても研究を進めている。

第３,4章では調和写像やヤン－ミルズ場について，調和的に不安定な，又はヤン－ミルズ的に不安定なコンパクト対称空間を完全に決定する等，著しい結果を得ている。

以上のように，大仁田義裕提出の論文は，微分幾何学の重要な分野において非常に大きい貢献をするものであり，理学博士の学位論文として合格と認める。