氏名・（本籍）	塚原　尚（つかはら　ひさし）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第 957 号
学位授与年月日	昭和61年3月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 （博士課程）原子核理学専攻
学位論文題目	非線形系の Conformal anomaly （非線形系の共形変換異常項）
論文審査委員	（主査） 教授　板橋清己　　教授　北垣敏男 　　　　　　　　　教授　武田　暁

論　文　目　次

論 文 内 容 要 旨

第1章　序　　論

場の理論において，Ward－Takahashi（以下，W－T）identity は，系の対称性を表現している。classical な対称性が，量子論に移行した時，破れる場合があるが，この時 W－T identity には，anomaly 項が現われる。anomaly 項が存在するかどうかにかかわらず，この identity は，path－integral formalism により，容易に導くことができる。このとき anomaly 項は，適切に定義された path－integral measure の nontrivial な Jacobian factor として理解される。しかしながら，これまで研究されてきた model は Lagrangian の中に field が bilinear な形で含まれているもの，すなわち運動方程式が線形なものに限られていた。非線形な系については path－integral measure をどのように定義するべきか知られていなかった。

そこでこの論文では，非線形系に対して適切な path－integral measure とはどのようなものであるかを示すことを目的としている。さらに，この measure が正しく機能するかどうかを調べるため，anomaly 項を含む W－T identity を導いてみる。ここでは，非線形系の anomaly として典型的な例であると考えられる conformal anomaly を扱う。非線形系の conformal anomaly では，1－loop より高次の項も存在すると考えられる。path－integral formalism による anomaly 項の導出は，これまで1－loop までしかなされていなかったが，より高次の項の計算について議論するためにも，conformal anomaly は良い例であると考えられる。

本論文は，序論の後，第2章「path－integral measure」，第3章「$\lambda\phi^4$theory の conformal anomaly」，第4章「non－abelian gauge theory の conformal anomaly」，第5章「考察」となっているが，各章の内容は以下で述べるようなものとなっている。なお，Appendix では，我々がこの論文で定義した path－integral measure が，dimensional regularization，Pauli－Villars regularization のもとでも consistent に機能していることを示した。

第2章　「path－integral measure」

$\{v_n(x)\}$ を正規直交系とし，field $\phi(x)$ が $\phi=\Sigma a_n v_n$，と表示されるとき，path－integral measure $d\mu$ は $d\mu=\Pi da_n$，のように書ける。このとき基底系 $\{v_n\}$ に，free な運動方程式の固有関数である平面波 e^{ikx} を使うと，当然 Jacobian factor は trivial なものでしかなく，我々の目標とする，path－integral formalism による anomaly 項の理解は達成できない。このような平面波 e^{ikx} を基底に使う場合を，仮に " interaction picture " と言うとするなら，正しい path－integral measure は " Heisenberg picture " とでも言うべき基底系を使って定義されなくてはならない。すなわち系の非線形性，interaction の形の情報を基底系に反映しなくてはならない。このような事を完璧に実行するのは，なかなか困難であるが，摂動計算をする際に，摂動の各 order で適切であるような基底系を，逐次近似として求めていく事は可能である。

generating fuuctional　$e^{iW[\eta]}=\int d\mu\ \ exp\{\ iS(\phi)+i\int dx^4\ \phi\eta\ \}$

を鞍点法で求めてみよう。$\bar{\phi}$をclassicalな運動方式 $\frac{\delta S}{\delta \phi} + \eta = 0$
の解とすると，$\bar{\phi}$はηの functional である。このとき，

$$e^{iW[\eta]} = \int d\mu \ \ exp\{ iS(\bar{\phi}) + i\int dx^4 \bar{\phi}\eta \} \times exp\{ \frac{i}{2}\int dx(\phi - \bar{\phi}) \frac{\delta^2 S}{\delta\phi\delta\phi}\Big|_{\phi=\bar{\phi}} (\phi - \bar{\phi}) + \cdots\cdots \}$$

であるが，この Gauss 積分の項まで採用することにすれば，1－loop での結果を得ることができる。このGauss 積分を見積るために，最も有利であり，また最も自然な基底系は，operator $\frac{\delta^2 S}{\delta\phi\delta\phi}\Big|_{\phi=\bar{\phi}}$ の固有関数である。すなわち $\{v_n\}$ を

$$\left(\frac{\delta^2 S}{\delta\phi\delta\phi}\Big|_{\phi=\bar{\phi}} \right) v_n = \lambda_n v_n, \ \int dx^4 \ v_n(x) v_m(x) = \delta_{nm}$$

と選ぶことである。我々は以後，上述の $\{v_n\}$ を基底系の第１次近似として採用する。すなわち，１－loop の量子効果を計算するために使われる path－integral measure は，$\{v_n\}$ を通じて定義されたものとする。

ここで，$S(\bar{\phi}) + \int dx\bar{\phi}\eta$，$S(\bar{\phi})$が，それぞれ$W[\eta]$，$\Gamma(\phi)$の tree 近似であることを注意すると，$\frac{\delta^2 S}{\delta\phi\delta\phi}\Big|_{\bar{\phi}}$ は connected ２点 Green 関数の inverse operator の tree 近似になっていることが分る。また$\frac{\delta\bar{\phi}(x)}{\delta\eta(y)}$は，tree の connected ２点 Green 関数である。

第３章　「$\lambda\phi^4$ theory の conformal anomaly」

この章で扱う例は，最も簡単な非線形系である $\lambda\phi^4$ theory である。conformal 変換 $\delta_f\phi$を，f_μを conformal Killing vector として

$$\delta_f\phi = L_f\phi + (\text{conformal weight}) \times \frac{\partial f}{4}\phi = f^\mu\partial_\mu\phi + \frac{\partial f}{4}\phi$$

と定義する。L_f は Lie derivative である。我々はこの変換に対して，Poincare invariance，dilatation invariance に対応する２つのW－T identiy を得る。

$$\langle \partial_\mu\Theta^{\mu\nu} - \eta\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}\partial^\nu A \rangle_\eta = 0, \qquad \langle \Theta^\mu_\mu - Z_m m^2\phi^2 - \eta\phi - A \rangle_\eta = 0.$$

$\Theta_{\mu\nu}$は，Jackiw の improved energy－momentum tensor である。またAは，運動方程式と
$\langle \ln J + i\int dx\alpha\phi \left(\frac{\delta S}{\delta\phi} + \eta\right) \rangle_\eta = 0$
のように関係づけられた $\phi \to \phi' = \phi + \alpha\phi$ に対応する Jacobian factor J と，$\ln J = i\int dx\alpha(x)A(x)$，の関係を持ち，基底系 $\{v_n\}$ により，$A(x) = -i\sum_n v_n(x)v_n(x)$，のように書ける量である。divergence identityのA項は energy－momentum tensor を新たに $T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}A$，と定義し直せば，$T_{\mu\nu}$に含ませることができ，W－T identity は，$\langle \partial_\mu T^{\mu\nu} - \eta\partial^\nu\phi \rangle_\eta = 0$，
$\langle T^\mu_\mu - Z_m m^2\phi^2 - \eta\phi + A \rangle_\eta = 0$ となる。

A項は，前章で作った基底を使い，proper time を使って regularize すると

$$A_{reg} = -i\lim_{\tau\to 0}\sum_n v_n e^{-\tau\lambda_n} v_n = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{16\pi^2}\left[-\tau^{-1}3\lambda\bar{\phi}^2 + 3\lambda m^2\bar{\phi}^2 + \frac{\lambda}{2}\partial^2\bar{\phi}^2 + \frac{9}{2}\lambda^2\bar{\phi}^4 \right]$$

と，classical な解 $\bar{\phi}$ により，得られる。

ここで，$\bar{\phi}^4 e^{iw[\eta]} = \int d\mu\, \bar{\phi}^4 e^{i(S+\int \eta\phi)}$，及び$<\phi^4>_\eta = \int d\mu \phi^4 e^{i(S+\int \eta\phi)}$を各々$\eta$について，functional 微分した後，$\eta=0$ とする操作を行ってみよう。それぞれに対応する Feynman diagram を書いてみて，そこに現われる propagator をすべて tree のものであると考えると，$\bar{\phi}^4 e^{iw}$ からも，$<\bar{\phi}^4>_\eta$ からも全く同じ Feynman diagram が得られることが分る。このことは，$\bar{\phi}$からなる他の式についても同様である。また，A項はそれ自体が1－loop の補正項であるので，1－loop のW－T identity では，A項内の$\bar{\phi}$はoperator ϕ と置き換えても良いことが分る。

以上の事より，最終的な trace identityは，

$$<T^{\mu}{}_{\mu} - Z_m m^2 \phi^2 - \eta\phi + A>_\eta = 0, \qquad A = \frac{1}{16\pi^2}\frac{9}{2}\lambda^2\phi^4$$

となる。ただし，A_{reg} の最初の3つの項は，質量への繰り込み，energy－momentum tensor の補正項として処理した。この結果は，他の方法により知られている結果と一致するものであり，我々の使った基底系の正しさを支持するものと考えられる。

第4章 「non－abelian gauge theory の conformal anomaly」

この章では，non－abelian gauge thory を扱うが，議論は前章と全く同様である。ただ今回は，gauge field A_μ の他に，ghost field C，$\bar{C}$ が存在し，各々について基底系を作らねばならない。結局，$T_{\mu\nu}$ を energy－momentum tensor とすると，trace identity は

$$<T^{\mu}{}_{\mu} + \partial_\mu(E^\mu + H^\mu) - \eta^\mu A_\mu - \bar{\eta}c - \bar{c}\eta - A>_\eta = 0, \qquad A = \frac{\beta(g)}{2g} F^2 C_2(G)$$

となる。E^μ，H^μ はA_μ，C，$\bar{C}$から作られている項である。

第5章 「考　察」

前章までにより,我々は非線形系の path - integral measure の1－loop での近似を得，さらにその measureが有効に働くことを知った。それでは2－loop 以上の計算にも有効な measure，あるいは基底系とはどのようなものであろうか。即座に結論を得ることは難しいが，次のことに注意すると1つの conjecture を得ることができる。

1－loop の Jacobian factor は，classical な解$\bar{\phi}$の項として得られた。このとき$\bar{\phi}$が$<\phi>_\eta$の tree 近似であることから 1－loop の W－T identityの中では，$\bar{\phi}$をϕと置き換えて良いことが示された。そこで Jacobian factor が $<\phi>_\eta$の項として得られるように基底系を選んだとすると，Jacobian の$<\phi>_\eta$は，W－T identity の中では all order にわたった ϕと置き換えることが可能になり，anomaly 項を Jacobian factor として理解することが極めて自然な状況となる。このような基底系は，operator $\frac{\delta^2\Gamma(\phi)}{\delta\phi\delta\phi}$ の固有関数として得ることができる。$S(\bar{\phi})$は $\Gamma(<\phi>)$ の tree 近似であったことから，この新しい基底は，1－loop の基底系の自然な拡張であると考えられる。ただし，このmeasure を使って anomaly 項を高次の order まで実際に計算するのは，なかなかめんどうな事であり，この measure が本当に正しく働くかどうかは，今後の研究を待たなくてはならない。

論文審査の結果の要旨

或る理論体系が，古典論の枠内では或る種の対称性を持ち，対応する保存則が成立つ場合には，この事情はナイーブなワード・高橋恒等式という形で表現される。この場合でも，量子効果を取入れた結果，対称性が破れてワード・高橋恒等式に余分な附加項が出現することがある。この附加項がいわゆる「異常項（ Anomaly)」である。このような異常項は，くりこみの障碍となって矛盾のない理論を作る妨げになったり，そうでない時には観測可能な物理的効果（例：$\pi^{\circ} \rightarrow 2\gamma$）をもたらすので，素粒子論にとって「異常項」の研究は重要な課題の一つである。

異常項の計算は一般には非常に厄介である。ただし，線形系で，例えばカイラル異常項の場合には，「径路積分量子化法」が簡単で見通しのよい計算法を与えてくれる。この方法では異常項は積分メジャーの変換ヤコビアンとして表われる。ただしそのためにはメジャーの定義が適切であることが必要である。

しかし上記メジャーがはっきりしているのは線形系だけである。非線形系（場の方程式が非線形になる）についてのメジャーの議論はまだない。更に，カイラル異常項の形には1－loop よりも高次の補正は全く影響しないことが知られているが，共形変換異常項の例では高次補正が無視できないと考える十分な根拠がある。

塚原尚提出の本論文は以上の問題に着目して次の目的を掲げている。第一に，一般の非線形系の場の積分メジャーを定める具体的な方法を求めること。第二に，異常項への高次補正が non-trivialな場合にそれを計算するための処法の確立。

これらの目的に最も適切な例として本論文では共形変換異常項を取り上げ，かつ非線形系の例として「ϕ^4 理論」及び「非可換ゲージ理論」を考察している。これらの例について1－loop 近似までで有効な処法を示し，かつその処法に基づく異常項の計算結果は，通常の（より複雑な）摂動計算⊕ dimensional or Pauli－Villars regularization による結果と完全に一致することを示した。

問題が複雑なため，本論文が与えた処法は，loop 展開による逐次近似の形を取らざるを得なかったが，更に高次の補正についても本論文が示唆する処法は十分説得力をもつ。またこれらの処法は本論文で取扱われた具体例に限らず一般の場合の異常項の計算に対しても有用と期待される。

従って本論文は博士論文として適当であり，著者が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。よって塚原尚提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。