氏名・(本籍)	高木　泉（たかぎ いずみ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第　795　号
学位授与年月日	昭和60年9月25日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和51年3月 東北大学大学院理学研究科 （前期2年の課程）数学専攻修了
学位論文題目	Stationary solutions to reaction — diffusion systems generating point — condensation （点凝縮を起す反応—拡散方程式系の定常解）
論文審査委員	（主査） 教授　小竹　武　　教授　加藤順二 教授　増田久弥

論　文　目　次

論 文 内 容 要 旨

本論文では生物の形態形成のモデルとして提唱されたある半線型放物型偏微分方程式系（反応ー拡散方程式系）の定常解の存在と安定性について論じる。

生物の発生過程においては，殆ど一様な状態から出発し，空間的非一様性（紋様）が自律的に形成される，非一様性は周期的紋様として現われることもあれば，極性など非周期的なものもある。このような非一様性が自律的に形成される機構を解明するという興味深い問題に対して，チューリング（1952）は次のことを発見し重要な手懸りを与えた：「拡散率の異なる2つの物質が反応するとき，空間的に一様な状態が不安定になり，その結果，濃度分布に空間的非一様性が出現し得る。」また，紋様の自律形成は化学反応系や生態系においてもしばしば観察され，拡散と非線型相互作用が伴う現象に共通する性質として意識されるようになってきた。そしてそれぞれの現象に応じて非線型放物型方程式によって記述されるモデルが提出されている。このような方程式系は，はじめおもに数値解法によって進行波解や様々な紋様を呈する。正常解が見出され，その解集合が豊かな構造をもっていることが知られるようになり，反応ー拡散方程式という1つのクラスとして組織的な研究がなされるようになった。

さて，我々が考察する方程式系について述べよう。ギーラーとマインハルト（1972）は，チューリングの考えを発展させ，活性化因子ー阻害因子モデルとよばれる形態形成のモデルを提出した。活性化因子はそれが十分多く集まった場所で細胞分化を惹き起こす作用をもった生化学物質であり，細胞や組織に形成される紋様は活性化因子の濃度分布に現われる紋様から決まると考える。阻害因子は活性化因子の増加を制御し安定な平衡状態を実現するという作用をするものとする。ある領域を占める活性化因子の濃度を u，阻害因子の濃度を v とする（従って共に空間座標と時間の正値函数である)。これらは微分方程式

(1)　$u_t = d\triangle u + f(u, v)$

(2)　$v_t = D\triangle v + g(u, v)$

に従って相互作用しつつ拡散するものとする。但し d，D は正定数，△はプラス作用素とする。自然な境界条件は斉次ノイマン条件である。即ち，u も v も境界を通って流れ出さないと仮定する。反応項 f，g は次のような函数とする：

(i)　f と g は共通零点をもつ。(ノイマン境界条件のため，これが定数定常解を与える。)

(ii)　共通零点の近傍で f，g はそれぞれ u について単調増加，v について単調減少である。

(iii)　定数定常数は(1)，(2)で拡散係数を共に0とした常微分方程式系の定常解として安定である。

ギーラーとマインハルトはこれらの条件をみたす具体的な函数の1つのクラスを設定した。それは典型的な場合として

(3)　$f = a + u^2/v - bu,\ g = u^2 - v$

を含んでいる。但し非負定数 a，正定数 b は(ii)，(iii)が成立するように選ばれているとする。彼らはおもに(3)の f，g について数値実験をおこない，様々な領域でいろいろな紋様を呈する解を

見出し，それらを実際の生物の発生現象を説明するために用いた。

活性化因子の紋様が自律的に形成される機構は直観的には次のように説明される：活性化因子 u が増加するとそれ自身と阻害因子 v の増加を惹き起こし，v の増加はそれ自身と u の増加を妨げる（条件(ii)）。しかも u の拡散率は小さく，分布は局在化する傾向があり，他方，v は十分早く拡散し，局所的に増加しても直ちに全領域にひろがり，u の増加を抑え込もうとする。その結果，ある条件を境として，u の増加が抑えられる場所と u が v の抑制効果を追い越して増加する場所が現われ，こうして初期の分布のわずかなゆらぎが拡大され，顕著な紋様が形成される。

数学的には，方程式系(1), (2)の「すべての安定な定常解を求めること」が1つの基本的問題として設定され，これに答えることが，初期値－境界値問題の時間についての大域解の存在を示すこととあわせて，上に述べた発見的考察を検証し正当化することになる。ここで定常解が安定であるとは，その近くから出発する(1)－(2)の解が時間とともにその定常解に近づくことをいう，非線型問題では一般に複数の解があらわれ，そのうちの安定な解が実際に観察される現象に対応するものと考えられる。我々は特に定常解の d に対する依存性を知ることに興味がある，何故なら，数値解を見ると，d の値が十分小さいとき，スパイク状の定常解が現われ，d が 0 に近づくにつれ，u は有限個の点を除いてある定数に近づくが，その最大値は無限に大きくなっていくことが予想されるからである。いくつかの点のごく小さな近傍にのみ分布が集中することを点凝縮とよぶことにする。

そこで，d をパラメータと見なし，d とそれに対し斉次ノイマン境界条件の下で方程式(1), (2)をみたす時間によらない函数（定常解）との組（d，u，v）を求めることとして問題を定式化する。従って，以下では定常解を単に解とよぶことにするが，これは d の属する正の実数の集合と u，v の属する（境界条件をみたし適当な滑かさをもった函数の成す）ある函数空間との直積集合の点としてとらえられる。条件(i)によってすべての正数 d に対し d によらない定数解が存在するから，これは1つの「定数解の枝」を作っているといえる。

本論文の目的は，空間次元が1の場合に有界区間上で方程式系(1)－(2)を考えて，(a)定数解の近くで非定数解を求め，その安定性を調べること（第Ⅰ章），(b)十分大きい d に対しては非定数解が存在しないこと，十分小さな d に対してはつねに非定数解が存在することを示すこと（第Ⅱ章），そして(c) D が十分大きいとき，点凝縮を呈する解を構成しあわせて解集合の構造を詳しく調べること（第Ⅲ章）である。第Ⅰ章ではパラメータを含む方程式の解曲線の枝分れを扱う分岐理論を用いる。第Ⅱ章では解のみたすべき不等式（アプリオリ評価）が重要な役割を果たす。第Ⅲ章では D を無限大とした極限方程式系を考察する。この極限では v が定数値函数に退化するため方程式が扱い易くなり，詳しい解析が可能である。極限方程式系を最初に考察したのはキーナー（1977）であるが，後に西浦（1982）によって極限方程式系の解集合ともとの方程式系の解集合との関係が明らかにされた。拡散係数が 0 に近いとき，ある種の反応－拡散方程式系に対して内部遷移層や境界層をもった解を特異摂動法によって構成できる（ファイフ1976，三村－田端－細野1980）。しかし我々の場合には，その方法を直接適用することはできない。そこで D を無限

大とした極限を考え，それに対して d を0に近づけるときの解の漸近挙動を調べて点凝縮解の存在を示す，というのが我々の接近法である。

各章の内容は次のとおりである。

第Ⅰ章　よく知られた線型化による安定性の判定法を用いて定数解の安定性を調べると，拡散係数 d の臨界値があって d がこの値よりも大きいとき定数解は安定，臨界値よりも小さい d に対しては不安定であることがわかる。更に，D がある除外値（それは0以外に集積しない）に一致しない限り，クランドールとラビノウィッツによる単純固有値からの分岐定理を適用でき，非定数解から成る曲線が d の臨界値において定数解の枝から分岐していることが示される。分岐解の安定性を調べるためには，分岐解の第2近似までを陽に求めることが必要となるが，f，g が(3)で与えられる場合についてこれを実行し，最終的には f に含まれる定数 a，b と D によって分岐解の安定性を判定できることを示した。

第Ⅱ章　引き続き本章でも f，g は(3)によって与えられるものとする。十分大きい d に対しては非定数解が存在しないこと，及び臨界値よりも小さい d に対しては必ず非定数解が存在することを示す。そのため，まず，解 u，v の最大値・最小値を d の函数によって評価する。解の2階導函数の評価はこれから直ちに得られる。これらの評価は，各正数 d に対し解 u，v はコンパクト集合を成すということを主張している。アプリオリ評価の直接的な応用として十分大きな d に対する非定数解の非存在が得られる。更に西浦（1982）によれば，ノイマン境界条件の場合，分岐解を可能な限り接続したものはコンパクト集合ではない。故に上述の性質とあわせれば分岐解は $d=0$ の任意の近傍まで接続されなければならないことがわかる。これは臨界値より小さいすべての d に対し非定数解が存在することを意味する。

第Ⅲ章　本章では十分大きい D に対し点凝縮解を構成する。まず D が無限に大きくなるとき，v が定数（それを V とする）に近づくことに着目し，極限方程式系を求めると，未知函数 u と未知数 v に対する2元連立方程式系が得られる。従って問題は u についての単独微分方程式の解のうちある積分条件をみたすものを求めることに帰着され，詳しく解析することができ，次のことがわかる：定数解の枝から u が単調増加であるような解の枝が分岐し，$d=0$ の任意の近傍まで延びている。この枝に沿って u の単調性は保たれ，更に d が0に近づくとき，u は区間の右端を除いてある定数に近づくが，右端点では無限大に発散する（即ち，点凝縮を起こしている）。また，V は無限に大きくなる。なお，単調増加な解の鏡映が単調減少な解であり，他の解は単調なものを交互につないで得られる。最後に，d に応じて D を十分大きくとれば，極限方程式系の解 u，V の近くにこのような D に対応するもとの方程式系の解が存在することを示すことができ，従って特に d が0に近いとき，十分大きな D に対しもとの方程式系の点凝縮解が存在することが結論できる。

論文審査の結果の要旨

本論文は生物の形態形成の数理モデルとして知られるギーラー・マインハルト方程式を典型とした非線型拡散方程式系に関し，定常解の存在と安定性，さらに解集合の構造についていくつかの基本的な結果を証明したものである。

第一章は拡散係数が解の安定性に深く関係することに注目した研究で，まづ臨界拡散係数の存在が示され，安定な定数解と不安定なものとはこの臨界値を境に類別されることを明らかにした。ついで臨界値に対応する定数解は一般に枝分かれの現象が起こり，いわゆる分岐解に移行してゆくことを示すと共に，かかる解の安定性についても非線型摂動項の第二次近似を考察することにより，十分に簡明な判定式を得ることに成功している。

第二章では拡散方程式に関する最大値原理の適用により解集合に対するアプリオリ評価を導き，その応用として，非定数解の存在・非存在の問題，さらに一部拡散係数が零に収束する時の定常解の極限移行の様子が調べられている。

第三章は定常解から枝分かれした分岐解の成長といわゆるパターン（紋様）形成の問題が取り扱われている。拡散方程式系において一部拡散係数が極めて小さくなると，非線型摂動項の影響で解の不安定性が高まり，漸近的に不連続解に近づくことが種々の例より想定されるが，著者はギーラー・マインハルト方程式を例にとりこの間の様相を詳しく論じている。

このように本論文は，この方向の研究に重要な貢献をするもので，同氏が研究者としてすぐれた力量を持つことを示している。よって高木泉提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。