

氏名・(本籍)	ただ 只	き 木	しん 進	いち 一
学位の種類	理	学	博	士
学位記番号	理博第	1036	号	
学位授与年月日	昭和62年	4月	30日	
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当			
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 (博士課程)物理学第二専攻			
学位論文題目	ブラックホールを含む系の熱力学と場の量子論			
論文審査委員	(主査)			
	教	授	都	築
	俊	夫		
	教	授	立	木
	昌			
	助	教	授	高
	木			
	助	教	授	柳
	田			
	勉			

論 文 目 次

第1章 序 論

第2章 black hole の熱力学

- §1 black hole の動力学の4法則とBekensteinの予想
- §2 現象論的熱力学I
- §3 現象論的熱力学II
- §4 黒体輻射とHawking輻射の差異に基づく補正
- §5 まとめ

第3章 曲がった時空中の場の量子論

- §1 Bogoliubov変換と粒子生成
- §2 Israel-Hartle-Hawking状態

第4章 Hadamard regularization と Schwarzschild 時空中の stress energy tensor

- §1 序 論
- §2 stress energy tensor と point-splitting regularization

- §3 Hadamard 基本関数の短距離展開
- §4 covariant point-splitting
- §5 Hadamard 級数展開
- §6 regularized stress energy tensor
- §7 Schwarzschild 時空中の stress energy tensor
- §8 等方性の役割
- §9 結 論
- 第 5 章 まとめと今後の課題
- 謝 辞
- 補足 A conformal 変換
- 補足 B 2次元 black hole 時空上の Green 関数の解析的構造
- 補足 C 自然 Planck 単位系
- 補足 D stress energy tensor の計算における繰り込みと不定性
- 参考文献

論文内容要旨

熱力学、一般相対論、場の量子論は物理学の基本的な柱であるが、相互に独立に発展して来たために、三者の間の関係については余り関心が持たれてこなかった。その一つの理由は扱う対称のスケールが非常に異なっていることによる。勿論相対論的熱力学などもあるが、三つの分野が内的に結び付いているという認識は少なかった。しかし1970年代に入って black hole を含む系の熱力学と場の量子論に対して理論的研究が活発に行われるようになり、それを契機としてこれら三者の間の関係に新たな光りが投げかけられてきている。本研究はこの問題に直接的に答えるものではないが、この問題を念頭におきながら black hole を含む系の熱力学と場の量子論の議論を行う。

重力は電磁力と同様に距離の2乗に反比例する長距離力であるが、電磁力と異なり引力しか存在しない。そのため星の全質量が十分に大きければ（太陽質量の数倍以上）粒子間斥力を超えて重力崩壊が進み、black hole を形成する。black hole は事象の地平線を持ち、この地平線を光でさえも内向きにしか通り抜けられない。従って black hole の外部の観測者は black hole の内部の情報、具体的には内部の entropy の変化を知ることが出来ない。つまり black hole を含む系に於て熱力学第2法則が成り立っているかどうかを外部の観測者が確かめる術がないことになる。この指摘が black hole を含む系の熱力学の理論的研究が盛んとなる契機となった。black hole の熱力学の問題としては、大きく分けて以下の二つの問題がある。先ず第一に black hole が熱力学の対象として扱えるかという問題がある。第二は black hole という強い重力源によって作られる系の非一様性などが、系の熱力学的性質にどのような影響を与えるかである。第一の問題に対して、1971年に Bekenstein は熱力学第2法則を一般化するという立場から black hole も熱力学的な対象として取り扱うべきであると考え、その entropy S_{BH} を black hole の表面積に比例するように取れば S_{BH} と black hole の周囲の普通の entropy S_C の和に対して熱力学第2法則を一般化出来る可能性を論じた。しかし古典論の範囲では black hole の温度 T_{BH} が周囲の温度 T_C より高温になったときこの議論は矛盾を起こしてしまう。つまり熱力学が成り立つためには black hole から energy が放出される機構が必要であるが、古典論ではそれは不可能であるからである。この点が Bekenstein の予想の最も大きな問題点であった。一方 Hawking は熱力学的議論とは独立に、black hole 時空中の量子場では熱 spectrum をもつ輻射 (Hawking 輻射) が観測されることを示した。以下では球対称で電氣的に中性な Schwarzschild black hole を扱うが、その質量を M とすると、Hawking 輻射の温度 T_{BH} とそれに対応する entropy S_{BH} は

$$T_{BH} = (8\pi M)^{-1}, \quad S_{BH} = 4\pi M^2 \quad (1)$$

で与えられる。ここでは自然 Planck 単位系 $\hbar = G = c = k_B = 1$ を用いている。この Hawking 輻射によって Bekenstein の予想が支持され、 $T_{BH} > T_C$ の場合にも熱力学第2法則が一般化でき

ることを示すことができる。

Hawking 輻射理論によって black hole を熱力学の対象として扱えることが分かったので、次に black hole を含む系の熱力学の性質を調べる。まずこの Hawking 輻射の理論をもとに Hawking と Page は black hole と黒体輻射からなる孤立系の平衡状態を議論した。それによると系の体積 V が全系の energy E で決まる体積 $V_H \propto E^3$ よりも小さい、つまり $f = V/V_H < 1$ のときに black hole と輻射の共存状態が可能になる。また $f_c (=0.2556) < f < f_H (=1)$ では black hole と輻射の共存状態よりも輻射だけの状態が安定だが、 $f < f_c$ では共存状態の方が安定となる。しかし彼らの理論では黒体輻射を平坦な時空上の場合と同様に扱ったために以下のような問題がある。まず系の体積を平坦時空と同様に素朴に定義することができない。また black hole の作る重力場による輻射の非一様性が考慮されていない。そこでこれらの点を考慮して Hawking-Page の現象論的熱平衡理論の吟味を行った (S.Tadaki and S.Takagi, 1985)。球対称な重力場中の球対称孤立系では全系の energy E 及び表面積 $4\pi R^2$ が明確に定義される量である。従って熱力学変数としてこれらを用い、かつ輻射を一般相対論的に扱い平衡状態の議論を行った。つまり輻射は局所的には Stephan-Boltzmann 則に従い、局所的な温度を $T(r)$ として、energy 密度 $\rho(r)$ と entoropy 密度 $s(r)$ は

$$\rho(r) = \sigma T(r)^4, \quad s(r) = \frac{4}{3} \sigma T(r)^3 \quad (2)$$

であるとする。 σ は Stephan-Boltzmann 定数である。系全体に亙っては、一般共変性の要請から輻射の全 energy E_{rad} と entoropy S_{rad} は

$$E_{\text{rad}} = \int_{R_c}^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$$S_{\text{rad}} = \int_{R_c}^R s(r) 4\pi r^2 (1-2M/r)^{-1/2} dr \quad (3)$$

と表され、輻射の温度勾配が Tolman の関係式

$$T(r) = T_\infty (1-2M/r)^{-1/2} \quad (4)$$

に従うとする。 R_c は切断パラメタである。その結果全系の energy が Planck 質量の 10^4 倍程度より小さくなると f_H や f_c の Hawking-Page 理論からのずれが大きくなり black hole が作る重力場の効果が重要になることが分かった。つまり Hawking-Page 理論に比べて、black hole は生成しにくくなり、また一度生成した black hole はより安定となることが分かった。この効果は black hole が出来ることにより、輻射の占めることの出来る体積が実効的に増加する効果によるとして理解することが出来る。ところで、black hole の周囲の輻射は本当は黒体輻射ではなく Hawking 輻射である。後者の energy 密度に関しては Page による近似式が提案されているが、これは black hole 表面近傍で energy 密度が黒体輻射から大きくずれている。そこでこの効果を考慮した議論も行うと、定性的には黒体輻射として扱った場合と同様に低 energy で

高 energy 極限の Hawking-Page 理論からのずれをみる事が出来たが、そのずれは更に大きかった。

以上では black hole と輻射の共存状態を現象論的に議論してきた。しかし更に共存状態の性質を詳しく調べるには、第一原理に戻った議論が必要である。その第一歩として、曲がった時空中での scalar 場の stress energy tensor の期待値を計算する必要がある。ところで black hole と Hawking 輻射との平衡状態の議論に際して Page の近似を用いた。彼の近似は数値計算の結果との良い一致を示すが、その近似方法の物理的基礎は不明である。従って black hole と Hawking 輻射との平衡状態の議論を更に行うためには彼の近似の意味を明らかにしなければならない。ところで彼の近似の物理的基礎が不明のまま残されている原因は、曲がった時空中での量子場に対する stress energy tensor の期待値の一般構造の理解が進んでいないことによる。その一般構造を理解するには、一般時空中で stress energy tensor の期待値の計算を行うことが重要である。しかし実際に曲がった時空中の量子場に対して stress energy tensor の期待値を計算しようとする、一般に場の方程式を厳密に解くことが出来ず、mode 展開の方法で stress energy tensor の期待値を計算することは非常に困難である。また平坦時空の場合と同様に発散を取り除く方法が必要である。第一の点については Green 関数に対する方程式を何らかの近似で解けば良い。第二の点については、発散を取り除く方法がいくつか知られていて、なかでも有限部分を議論するためには point-splitting 正則化法と呼ばれる方法が有効である。そこで一般時空中での stress energy tensor の期待値の計算方法として Hadamard 正則化法を開発した。まず scalar 場 $\phi(x)$ に対する Hadamard 基本関数

$$G^{(1)}(x, x') = \langle \phi(x) \phi(x') + \phi(x') \phi(x) \rangle \quad (5)$$

を考える。この Hadamard 基本関数は、元の scalar 場と同じ Klein-Gordon 方程式の解であり、4次元時空では以下のような形の一般解を持つことが知られている。

$$G^{(1)}(x, x') = \frac{1}{8\pi^2} \Delta^{1/2}(x, x') \left[-\frac{2}{\sigma} + v(x, x') \ln \sigma + w(x, x') \right] \quad (6)$$

ここで σ は二点 x, x' を結ぶ測地線の長さであり、 Δ は Van Vleck-Morette determinant である。 v と w は元の方程式から決まる $\sigma \rightarrow 0$ で正則な関数である。 v と w を x から以下のように共変 Taylor 展開する。

$$\begin{aligned} v(x, x') &= \sum_{k=0}^{\infty} V^{(k)}(x) \mu_{1\dots\mu_k} \sigma^{\mu_1\dots\mu_k} \\ w(x, x') &= \sum_{k=0}^{\infty} W^{(k)}(x) \mu_{1\dots\mu_k} \sigma^{\mu_1\dots\mu_k} \end{aligned} \quad (7)$$

そしてこれらを元の Klein-Gordon 方程式に代入すると、各係数 $v^{(k)}$, $w^{(k)}$ は代数方程式の解として求めることができる。 $v^{(k)}$ は元の方程式から一義的に決まる幾何学量であるのに対して、 $w^{(k)}$ は元の方程式から決めることのできない項、つまり状態の選択に依存する項である。またこの

状態の選択に依存する項に対する制限方程式を得た。次にこの展開 (Hadamard 級数展開) を用いて stress energy tensor の期待値を point-splitting 正則化法で計算する。これにより、状態に依存する一点関数 $w^{(0)}$ と $w^{(2)}_{\mu\nu}$ を与えれば stress energy tensor の期待値の有限部分を計算できることが分かる。またこの有限部分だけで保存則を満たすことが、 $w^{(0)}$ と $w^{(2)}_{\mu\nu}$ に対する制限方程式によって保証される。

次にこの方法を Schwarzschild 時空上の conformally coupled massless scalar 場へ応用する。状態の選択に依存する項に対する制限方程式は唯一つになるが未知変数を複数個含むので解は無数個ある。Page の近似はこの方程式の特解であることが分かる。Page の近似では圧力の動径方向と角度方向の成分が事象の地平線近傍を除いて等しい。この等方性を手掛かりにして制限方程式を解いてみる。すると地平線上での正則性、遠方での温度、そして適当な等方性を与えてやれば Page の近似を再現できることが分かった。

以上を纏めると、まず始めに black hole 含む系の現象論的な熱平衡理論の議論を行った。その結果輻射を一般相対論的に扱うと Hawking-Page 理論に比べて black hole が出来にくくなり、また一度生成した black hole は安定化し易くなることが分かった。しかし black hole の周囲の輻射を Hawking 輻射とした場合には輻射だけの状態と共存状態の安定性の比較ができなかったため、これは今後の課題である。さらに black hole と輻射の共存状態の議論を行うために、stress energy tensor の期待値の計算方法 (Hadamard 正則化法) を開発した。そしてそれを Schwarzschild 時空へ応用した。ここで状態に依存する項をどの様にして決めるべきかという問題が残されている。また本研究では輻射の自己重力を無視した議論を行ってきたが、これは今後の重要な問題である。

論文審査の結果の要旨

本論文は、ブラックホールを含む孤立系の熱平衡状態の理解を直接的目的とし、関連する諸概念や計算技術について論じたものである。

ホーキング輻射（即ち、古典的には物質を吸い込む一方のブラックホールが量子効果により熱輻射を出す）の理論的発見は、古典的ブラックホールに係るパラドックス、特に、ブラックホールを利用した第二種永久機関の存在を解消すると同時に、重力場と量子論の結合により熱力学的性質が出現するという可能性を示した。しかし、ホーキング理論は時空を一定の背景として扱い、輻射による時空構造の変化を無視しているという困難がある。

無論、この困難を一般的に解決するのは至難である。時間的に定常な場合をまず考えるのが妥当であろう。こうして思考実験の対象として設定されたのが、ブラックホールを含む孤立系の平衡状態である。孤立系を考えるのは、ホーキング理論が正しければ、ブラックホールの比熱は負で、無限の熱浴と接触した平衡状態は存在しないからである。ところが、このような単純化した系に対しても、時空構造とホーキング輻射を自己無撞着に決めることは未だ誰も成功していない。そこで、まず、輻射が時空に及ぼす効果を無視してこの系を扱い、性質を調べ、その上で、この効果の重要性の程度を推定し、最終的に自己無撞着な理論を目指すという研究方針を取っている。

具体的内容は以下の通り。ここで考えた孤立系の平衡状態に関しては、ホーキングとページによる現象論があるが、熱力学的独立変数の採り方、輻射に対する重力場の効果の扱い、等に関して不十分である。これらの点を、物理量の共変性を正しく取り入れて扱うことにより正確にした。その結果、上述の理論は系のエネルギーが大きい極限でのみ正しいこと、それからのずれはエネルギーの $-2/3$ 乗に比例するパラメータで展開できることを示した。なお、以上の研究に於ては、輻射のエネルギー密度として黒体輻射のそれを使うという全くの現象論をまず行い、次で、一定のブラックホール時空中でのホーキング輻射のエネルギー密度に対してページが与えた「近似式」を用いた議論を行った。これらの比較により、シュヴァルツシルド半径の略3倍以上の場所では黒体輻射による置換えが正当化されると推定され、ホーキング輻射に対する直観的描像を得る一助となった。さて、上述の「近似式」はその理論的根拠が明確でない。上に述べた考察を基礎付けるためには、この「近似式」の意味を明らかにする必要がある。そのためには、少し枠組を拡げて、一般時空でのストレス・テンソルの期待値の構造を明らかにするのが見通しがよい。この方針で問題に取り組んだのが本論文第四章である。零点振動に由来する発散は、一般時空では複雑であるが、くり込みの処方には既に知られているので、残った物理的に意味のある有限部分をどう定めるかという問題である。これを解決するために、場の演算子の反交換子の期待値（アダマード関数）を、時空間の距離で共變的に展開して、場の方程式を代数方程式に帰着しうることをまず示した。同時に、ストレス・テンソルとアダマード関数の展開係数との間の関数を明らかにし、かつ、保存則が充されることを示した。具体的に

ブラックホールの場合に、この展開係数がどのような値をとるかについては、ストレス・テンソルの等方性等に関する補助的推察以上に進むことは出来ていないが、真の平衡状態に対する描像を得るための重要な足掛りを得たといえよう。

本研究は論文提出者が主体的に行なったものであり、同人が自立して研究活動を行なうに必要な高度の研究能力と学識を有することを示している。よって、只木進一提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。