氏名・(本籍)	中西敏浩（なかにし としひろ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第 927 号
学位授与年月日	平成元年11月29日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和58年3月 京都大学大学院理学研究科 （修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	Teichmüller Spaces and Kleinian Groups （タイヒミュラー空間とクライン群）
論文審査委員	（主査） 教授 黒田　正　教授 島倉紀夫 教授 森田康夫

論文目次

論 文 内 容 要 旨

序

クライン群とは元来リーマン球面 $\hat{C}=C\cup\{\infty\}$ 上のある開集合上に不連続に作用するメビウス変換群のことであったが今日では少し定義が拡張され単に SL(2,C) の離散部分群を指すようになった。また用途によっては 3 次元上半空間 H^3 上のポアンカレ計量に関する離散的運動群といってもよいであろう。この論文ではクライン群理論から(1)タイヒミュラー空間，(2)リーマン面上の双曲幾何及び(3)クライン群に付随する力学系の三つの主題を取り上げてそれらに関連したいくつかの問題について論じる。この三つの主題をここでは独立して扱うが，クライン群理論の土壌においてこれらは互いに固く結びついた根をもち，一つの主題の研究の進展が他の主題のより深い理解を促すものである。

この論文で取り扱う問題を個々に要約する。

第１章　タイヒミュラー空間の内半径と外半径

この章ではベアス埋め込みによるタイヒミュラー空間を考える。ここでは双曲的平面 H^2 を単位円板 $\Delta=\{z:|z|<1\}$ に取り，Δ^* を $\hat{C}$ における Δ の閉包の補集合，$p(z)|dz|=2(|z|^2-1)^{-1}|dz|$ を Δ^* 上のポアンカレ計量とする。Δ（従って Δ^*）を不変にするフックス群Gのタイヒミュラー空間 T(G) は Δ に台をもち L_∞ ノルムが 1 より小さいG－不変ベルトラミ微分 μ に対する微分方程式 $\delta w/\delta\bar{z}=\mu\delta w/\delta z$ の解 w^μ の Δ^* におけるシュワルツ微分 $\phi^\mu(z)=\{w^\mu,z\}$ の空間として定義される。B(G) を Δ^* 上のGに関する有界正則 2 次微分，即ち Δ^* 上の正則関数 ϕ でGの各元 g に対して $\phi=(\phi\circ g)(g')^2$ を満たし $\|\phi\|=\sup_{z\in\Delta^*}4p(z)^{-2}|\phi(z)|<\infty$ であるもの全体からなる複素バナッハ空間とするとシュワルツ微分のよく知られた性質及びクラウス・ネハリの不等式より T(G) は B(G) の原点 0 を含む有界領域であることがわかる。ここで T(G) が有界領域であることが重要であることを注意しておく。なぜなら $\{\phi_n\}\subset T(G)$ を T(G) の内部に集積しない点列とするとたとえ B(G) が無限次元であっても T(G) の有界性より $\{\phi_n\}$ は正規族をなし故に B(G) 内に集積点 ϕ_∞ をもち，ϕ_∞ に対応するクライン群，即ち T(G) の境界群が見出だせるからである。

さて B(G) の原点を中心とする球で T(G) を含むものの半径の下限を o(G),逆に T(G) に含まれるものの半径の上限を i(G) で表わしそれぞれ T(G) の外半径，内半径と呼ぶ。このとき次の不等式が成り立つ：$6\geqq o(G)\geqq i(G)\geqq 2$。最初の不等式は前述のクラウス・ネハリの不等式からの帰結であり，最後の不等式はアールフォルス・ウェイルに負う。特にGが第１種有限生成ならば $6>o(G)\geqq i(G)>2$（関川，ゲーリング・ポメレンケ）である。ここではGを擬等角変形したときそのタイヒミュラー空間の内半径，外半径がどのような範囲の値を動くかという問題を考える。リーマン面 Δ/Γ 上に単純閉測地線が存在するときその近傍を「ピンチング」

によって測地線の長さが0に収束するように変形すると，カラー補題によって測地線の回りにポアンカレ距離の意味でいくらでも幅の広い円環領域，即ちカラーを見出すことができる。変形されたリーマン面の普遍被覆△にこのカラーを実軸に関して対称となるように持ち上げた領域では群の作用は双曲的変換で生成される巡回群の作用と一致し，しかもユークリッド計量に関してこの領域は△の大部分を占めている。このように群の作用を単純にして擬等角写像の諸性質を用いることによって次の結果を得る。

定理(1)　Gを三角群ではない任意のフックス群とすると，Gの擬等角変形でそのタイヒミュラー空間の外半径がいくらでも6に近いものが存在する。

(2)　Gを三角群ではない任意の第1種有限生成フックス群とすると，Gの擬等角変形でそのタイヒミュラー空間の内半径がいくらでも2に近いものが存在する。

従って先に述べた不等式における6および2の値はフックス群の擬等角変形に関する限り(内半径の場合は第1種有限生成という条件があるが)最良の評価である。また(1)の結果は「いくらでも外半径が6に近い第1種有限生成フックス群がある」という朱健勝の結果を飛躍的に改良している。この定理の証明に用いられた議論は山本と筆者によるタイヒミュラー空間の外半径がそれがとり得る最大値6であるようなフックス群の完全な特徴付けにおいても用いられる。

第2章　リーマン面上の自己交差をもつ閉測地線の長さ

Gを上半平面$H^2=\{z=x+iy\,;\,y>0\}$に作用するフックス群とすると，H^2上のポアンカレ計量$y^{-1}|dz|$は商空間H^2/G上の計量を定め，これによってH^2/Gは負定曲率曲面となる。今gをGの双曲的変換とすると，H^2におけるgの軸A_gは標準的射影によってH^2/G上の閉測地線L_gに写される。このときL_gの（射影に関する）重複度を込めた長さl_gとSL(2, R)の行列とみたときのgのトレースとの間に次の関係式が成り立つ：$|\mathrm{trace}\ g|=2\cosh(l_g/2)$。自己交差をもつ閉測地線の長さはあるGに依存しない定数よりは短くならないことがヨルゲンセンの不等式を応用することによって観察される。もしGが楕円的変換を含まなければ，自己交差をもつ閉測地線に対応する双曲的変換gは$|\mathrm{trace}\ g|\geq 2\sqrt{2}$を満たす(山田，ヘムペル)。ここでは，Gに何の制約を与えることなく測地線の長さの下限を求めることを問題とする。

今LをH^2/G上自己交差をもつ閉測地線とすると，それをH^2上に持ち上げれば，すぐにわかるようにLに射影される軸A_gをもつGの双曲的変換gは次の条件を満たす。

(*)　あるGの元hが存在してA_gと$hA_g=A_{hgh^{-1}}$とが横断的に交わる。

位相的に自己交差をもたない閉測地線でもそれに対応する双曲的変換gが条件(*)を満たすとき（A_g上にGの楕円的変換の固定点が存在するときこのようなことが起こり得る）自己交差

をもつ測地線とみなすことが自然である。このとき次の定理が成り立つ。

定理　Gをフックス群としgを条件(＊)を満たすGの双曲的変換とするとき

$$|\mathrm{trace}\ g| \geqq C_0 = 1 + 2\cos(2\pi/7) = 2.2469\cdots$$

更にC_0をそれより大きいいかなる定数によっても置き換えることはできない。

勿論C_0はGに依らない絶対定数である。また(2,3,7)型の三角群の中にトレースの絶対値がC_0に等しい双曲的変換を見つけることができる。

第3章　いくつかのクライン群に対するミルベルグの近似定理

クライン群Gの作用を3次元上半空間H^3とメビウス同値な単位球$B=\{x \varepsilon R^3;\ |x|<1\}$上で考える。Bにはポアンカレ計量$2(1-|x|^2)^{-1}|dx|$を与えておく。

$T(B)=\{(x,\xi), x\varepsilon B, \xi\varepsilon T_x B, |\xi|=1\}$をB上の単位接バンドルとするとき，GはT(B)上に

$$(x,\xi) \rightarrow (g(x), g'(x)\xi/|g'(x)\xi|) \quad (g\varepsilon G)$$

によって作用し，しかもT(B)上のポアンカレ計量から自然に定まる測地的流れと可換になる。従って商多様体上の単位接バンドルT(B/G)上の測地的流れが導かれる。この章ではこの測地的流れの力学系に関する問題を扱う。

単位球面S上の点PがGに関する推移点であるとは，Bの各点xからPに至る双曲的半直線に沿う測地的流れのT(B/G)上の射影が稠密軌道を描くときをいう。ミルベルグはフックス群の場合に上と同様の設定の下で群が放物的変換をもたない第1種有限生成群あるいはモジュラー群の場合に単位円周上の殆んどすべての点が推移点であることを示した。この結果をクライン群に拡張しようとするとき，もし群Gが幾何学的有限かつ第1種で放物的変換をもたなければ（これはGのBの作用に関する正規基本多面体が閉包ともにBに含まれるという条件と同値である)，ミルベルグの方法を用いて困難なく同様の結果を得ることができる。従ってミルベルグ自身が部分的にしか成功しなかったGが放物的変換を含む場合が問題になる。Gが幾何学的有限で放物的変換gを含むとき，gはその固定点QにおいてSに内接する球面Σを不変にする。更にΣの半径が小さいとき，ΣはそのQを固定しないGの変換hによる像と交わらない。この性質が満たされるとき，ΣをQにおけるホロ球面と呼ぶ。

今UをSの任意の開部分集合，Σ_0をQにおけるホロ球面とし，QとUの各点を結ぶ測地線とΣ_0との交点及びそれとG-同値なΣ_0上の点全体を(U,Σ_0)で表わす。次に$r>0$に対してΣ_0の内部に含まれΣ_0からポアンカレ距離がrだけ離れた別のホロ球面をΣ_rとおく。このとき，推移点の次のような特徴づけが得られる。

「Sの点Pに対してLを半径$\overrightarrow{OP}$とする。任意のSの開集合U及び任意の$r_0>0$に対して，Gの元g及び$r<r_0$が存在してLが$g(\Sigma_r)$と交わった後$g(U,\Sigma_0)$と交わるならば，PはGの推移点である。」

Gが放物的変換を含む幾何学的有限な第1種クライン群ならば，任意の球面キャップUに対して上述の条件を満たす点P全体の集合は測度0の集合を除いてSと一致する。球面キャップUの中心をSの稠密可算集合上，半径を有理数上動かせば，結局次の結果を得る。

定理　Gを幾何学的有限な第1種クライン群とする。S上の殆んどすべての点はGの推移点である。

既に述べたようにGが放物的変換を含まないときは，ミルベルグの方法を用いて定理が示される。Gが第2種のクライン群の場合でも測地的流れをGの極限集合の凸包に制限して考えれば推移点の概念は意味をもつ。さらに次の定理が得られる。

定理　Gを（古典的）ショットキー群とし，αをその極限集合$\Lambda(G)$のハウスドルフ次元とする。このときα-ハウスドルフ測度に関して$\Lambda(G)$の殆んどすべての点はGの推移点である。

以上2つの定理の証明は純幾何学的考察のみで行なわれる。

論文審査の結果の要旨

クライン群は行列式が1であるような2×2行列がつくる離散群のことであって，これはポアンカレ計量をもつ3次元上半空間もしくは3次元単位開球に純不連続に作用している。近年発展したクライン群の理論はリーマン面の研究と密接に関連しており，したがってリーマン面の変形の空間であるタイヒミュラー空間の理論とも深くかかわっている。本論文では，このような見地から，タイヒミュラー空間，リーマン面およびクライン群に関するいくつかの重要な問題が取り上げられている。

まず初めに，与えられたフックス群のタイヒミュラー空間のいわゆるベアス埋め込みの外半径および内半径が論じられている。この外半径は6以下でありかつ内半径は2以上であることが知られているが，与えられたフックス群によって定まるリーマン面上に単純閉測地線がある場合にはその測地線の近傍のピンチングによる変形を詳しく解析することにより，三角形群ではない任意のフックス群の擬等角変形で，そのタイヒミュラー空間の外半径が任意に6に近いものが存在することおよび三角形群ではない任意の有限生成第一種フックス群の擬等角変形でそのタイヒミュラー空間の内半径が任意に2に近いものが存在することを示した。

ついでリーマン面上で自己交差する閉測地線の長さを評価する問題を取り上げ，解析的考察と幾何学的考察を行うことにより，そのような閉測地線の長さはある絶対定数より小さくないことおよびこの絶対定数をより大きな数ではおきかえられないことを見出した。この結果はヨルゲンセンによる定性的結果を精密に定量化したものでありかつ特殊な場合についてのヘムペル・山田による結果を改良したものである。

本論文は最後にクライン群に関してのミルベルグの近似定理を論じている。3次元単位球面上の点が単位開球に作用するクライン群の推移点であるとは，単位開球の各点から球面上のその点に至る双曲的半直線に沿う測地的流れの，そのクライン群で定まるクライン多様体上の単位接束上への射影が稠密となるときのことである。本論文では緻密な計算を行うことによって，幾何学的に有限な第一種クライン群については，単位球面上の殆どすべての点はその群の推移点であることおよび古典的ショットキ群の極限集合のハウスドルフ次元をαとするとき，α次元測度に関してその極限集合の殆どすべての点はそのショットキ群の推移点であることが証明されている。

以上本論文で得られている諸結果はクライン群の理論の進展に大きな寄与をするものであって，理学博士の学位論文として合格である。