氏名・(本籍)	天羽雅昭（あもう まさあき）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理博第1194号
学位授与年月日	平成3年3月28日
学位授与の要件	学位規則第5条第1項該当
研究科専攻	東北大学大学院理学研究科 (博士課程) 数学専攻
学位論文題目	Transcendence Measures and Algebraic Independence of Special Values of Mahler Type Functions (マーラー型関数の特殊値の超越測度及び代数的独立性)
論文審査委員	(主査) 教授 森田康夫　教授 佐武一郎 教授 小田忠雄

論文目次

論 文 内 容 要 旨

本論文の目的は，マーラー型関数の特殊値の超越測度及び代数的独立性を研究することである。以下で，先ずマーラー型関数及びマーラーのＳ数の定義を述べ，その後に我々の結果（定理１－定理５）を述べる。

Ｋを有限次代数体とし，以下これを固定する。原点のまわりでＫ－係数のテーラー展開をもつ超越関数 $f(z)$（或いは，そのような関数のベクトル $\mathbf{f}(z)={}^t(f_1(z),\cdots,f_m(z))$）が，次の関数方程式（M－１）（或いは（M－２））をみたすとき，$f(z)$（或いは $f_i(z)$ たち）を（Ｋ上定義された）マーラー型関数という：

$$\text{(M－1)}\qquad f(z^r)=\frac{A_1(z,f(z))}{A_2(z,f(z))},$$

ここに $A_i(z,y)$ は $K[z,y]$ の元で $a_{i1}(z)y+a_{i2}(z)$ の形のもの，ｒは２以上の整数；

$$\text{(M－2)}\qquad \mathbf{f}(z)=\mathbf{A}(z)\mathbf{f}(z^r)+\mathbf{B}(z),$$

ここに $\mathbf{A}(z)$ は $K[z]$ の元を成分とする $m\times m$ 正則行列，$\mathbf{B}(z)$ は $K[z]$ の元を成分とする m 次列ベクトル，ｒは２以上の整数。

$$F_r(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^{r^\nu}\quad (r\text{ は２以上の整数})$$

で定義される関数はフレドホルム級数と呼ばれ，（$\mathbf{Q}$ 上定義された）マーラー型関数の最も簡単な例を与える。

次に，マーラーのＳ－数について説明する。複素数 ω について，自然数 d, h の関数 $W_d(\omega,h)$ を

$$W_d(\omega,h)=\mathrm{Min}\{\,|P(\omega)|\;;\;P(x)\in\mathbf{Z}[x],\quad \deg P\leqq d,\ H(P)\leqq h \text{ and } P(\omega)\neq 0\}$$

で定義する。ここに，$H(P)$ はＰの高さ（即ち，Ｐの係数の絶対値の最大値）を表わす。さらに，$W_d(\omega)$ 及び $W(\omega)$ を

$$W_d(\omega)=\limsup_{h\to\infty}\frac{-\log W_d(\omega,h)}{\log h},\ W(\omega)=\limsup_{d\to\infty}\frac{W_d(\omega)}{d}$$

で定義する。ω が代数的数であることは，$W(\omega)=0$ と同値である。特に，$W(\omega)$ が正で有限値のとき，ω をＳ－数と呼ぶ。Ｓ－数 ω について，数列 $\{W_d(\omega)/d\}_{d\in\mathbf{N}}$ の上限を ω のタイプと呼ぶ。

以下の諸定義はすべて，マーラー型関数がみたす関数方程式（M－１）或いは（M－２）を有効に利用して証明される。

定理１　$f(z)$ を（M－１）をみたすマーラー型関数とし，その原点のまわりでのテーラー展開

の収束円をUとおく。α を，$\alpha \in U$ かつ $0<|\alpha|<1$ をみたす代数的数とし，さらに，任意の l ($l=0, 1, 2, \cdots$) について

$$\det\left(a_{ij}(\alpha^{r^l})\right)_{i,j=1,2} \neq 0$$

が成り立つとせよ。

$$b=[Q(\alpha):Q]^{-1}\log M(\alpha),\ c=\log|\alpha|^{-1},\quad \chi_0=[K(\alpha);Q].$$

とおく。ここに，$M(\alpha)$ は α のマーラー測度を表わす。以上のもとで，任意の自然数 d について

$$W_d(f(\alpha)) \leqq \{r(1+1/\sqrt{r})^2 bc^{-1}\chi_0{}^2+1\}d-1$$

が成り立つ。特に，$f(\alpha)$ はタイプが $r(1+1/\sqrt{r})^2 bc^{-1}\chi_0{}^2+1$ 以下のS－数である。

この定理は，ガロチキン（1980年）の結果

$$W_d(f(\alpha)) \leqq (2r+1)^2 b' c^{-1}\chi_0{}^2 d,\ b'=[Q(\alpha):Q]^{-1}\log L(\alpha)$$

を改良する。ここに，$L(\alpha)$ は α の長さを表わす（$M(\alpha) \leqq L(\alpha)$ が成り立つ）。

定理1の f と α を特殊化することで，$W_d(f(\alpha))$ の下界を含む次の結果を証明できる。

定理2　$F_r(z)$ をフレドホルム級数とし，$\alpha=1/a$（a は絶対値2以上の整数）とせよ。$d_0=[(r-1)/2]$ とおく。このとき，$\omega=F_r(\alpha)$ について

$$W_d(\omega)=r-1,\qquad d=1,\cdots,d_0,$$

$$r-1 \leqq W_d(\omega) \leqq rd/(r-1),\qquad d=d_0+1,\cdots,r-1,$$

$$W_d(\omega) \leqq \{r(1+1/\sqrt{r})^2+1\}d-1,\qquad d \geqq r,$$

が成り立つ。特に，ω はタイプが $r-1$ 以上，$r(1+1/\sqrt{r})^2+1$ 以下のS－数である。

定理1，2を証明するためには，複素数 ω について，代数的数による近似列で適当な性質をもつものが存在するときに，$W_d(\omega)$ を上から（或いは上下から）評価する補題を必要とする。

定理3　$f(z)={}^t(f_1(z),\cdots,f_m(z))$ を（M－2）をみたす，単位円板上のマーラー関数たちのベクトルとせよ。$f_1(z),\cdots,f_m(z)$ は有理関数体 $K(z)$ 上代数的独立と仮定する。このとき，単位円内の超越数 ω について

$$\mathrm{tr\,deg}\ \mathbf{Q}(\omega, f_1(\omega), \cdots, f_m(\omega)) \geqq [(m+1)/2]$$

が成り立つ。

この定理は，指数関数や楕円関数について知られている結果の，マーラー型関数についての類似物と見做せる。証明には，フィリポン（1986年）による代数的独立性の判定条件を用いる。

$m=1$，2 の場合については，定量的な結果を含む，次の定理 4，5 を証明できる。

定理 4　$a(z), b(z) \in K[z]$ とし，$f(z)$ を

$$f(z) = a(z) f(z^r) + b(z) \qquad (r \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

をみたす単位円板上のマーラー型関数とする。ω を単位円内の複素数で，$f(\omega) \in \mathbf{Q}(\omega)$ かつ $a(\omega^{r^l}) \neq 0$ $(l=0, 1, 2, \cdots)$，をみたすものとせよ。このとき ω は超越数で，次のような超越測度をもつ：$0 \neq P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ を次数が d 以下，高さが h 以下の多項式とせよ。このとき，$dh \geqq 3$，の下で

$$|P(\omega)| > \exp\{-C \ \log(dh)\ \log\log(dh)\ (d\log(d+1) + (\log(dh))^2)\}$$

が成り立つ。ここに，C は $k, r, \omega, a(z), b(z)$ 及び $f(z)$ のみに依る正の定数である。

定理 5　$a_i(z), b_i(z) \in K[z]$ $(i=1, 2)$ とし，$f_1(z), f_2(z)$ をそれぞれ

$$f_i(z) = a_i(z) f_i(z^r) + b_i(z) \quad (r \text{ は } 2 \text{ 以上の整数})$$

をみたすマーラー型関数とする。$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は有理関数体 $k(z)$ 上代数的独立と仮定する。このとき，単位円内の超越数 ω について

$$\mathrm{tr\,deg}_{\mathbf{Q}}\ \mathbf{Q}(\omega, f_1(\omega), f_2(\omega)) \geqq 2$$

が成り立つ。

もし，ω と $f_2(\omega)$ が $\mathbf{Q}$ 上代数的従属ならば，ω と $f_1(\omega)$ について次が成り立つ：$0 \neq P(x, y) \in \mathbf{Z}[x, y]$ を全次数が d 以下，高さが h 以下の多項式とせよ。$t = d + \log h$ とおき，$t > 1$ を仮定する。このとき

$$|P(\omega, f_1(\omega))| > \exp\{-Cd^3 t^6 (\log t)^{13}\}$$

が成り立つ。ここに，C は $k, r, \omega, a_i(z), b_i(z)$ 及び $f_i(z)$ のみに依る正の定数である。

定理の前半に述べられている下界は最良である。後半の証明は，ゲルフォント以来知られている消去法に定理 4 を応用して為される。

論文審査の結果の要旨

超越数論における重要な問題の一つに『与えられた特殊関数の特殊値の超越性，およびそれらの間の代数的独立性の研究』がある。

この種の問題の代表的なものとしては，指数関数や対数関数の特殊値の超越性および代数的独立性の研究があるが，その他の整数論的特殊関数についても同種の問題が考えられている。

たとえば，K. Mahler はこの種の問題を考え得る特殊関数として

$$F_r(z)=\sum_{i=1}^{\infty} z^{r^i} \qquad (r\in \mathbf{N})$$

を発見し，その漸化式

$$F_r(z^r)=F_r(z)-z$$

を使ってこの関数の特殊値を調べ，特殊値の超越性とそれらの間にある代数的独立性を研究した。

その後この種の関数の特殊値の性質については，最近に至るまで A.I. Galochkin, 西岡久美子等多くの数学者により研究がなされている。

天羽雅昭は本論文で，この問題を取り上げ，次のような結果を得た。

(1) Galochkin はこの型の数が超越数とは S 数である事を示し，その S 数としての型の上からの評価を得ているが，天羽は S 数としての型の上下からのより精密な評価を得た。

具体的に上の関数について両者の評価を比較すると，Galochkin は $F_r(1/a)\,(a\in \mathbf{Z}\neq 0)$ の S 数としての型が高々 $(2r+1)^2\log(|a|+1)/\log|a|$ であることを示したのに対し，天羽は，S 数としての型が，少くとも $r-1$ かつ高々 $r(1+1/\sqrt{r})^2+1$ であることを示した。

(2) 西岡らは，この型の関数に代数的数を代入したとき，それらの値の生成する体の超越次元を調べているが，天羽はこの型の関数に超越数を代入したとき，この超越数およびこれらの関数の特殊値の生成する体の超越次元を調べた。

上の具体例でいうと，西岡等は $\omega\neq 0$ が単位円内にある代数的数なら，$\omega, F_r(\omega), F_r(\omega^2)$, $\cdots$, $F_r(\omega^{r-1})$ は超越次元が $r-1$ の体を生成する事を示したのに対し，天羽は ω が超越数でも，$\omega, F_r(\omega), F_r(\omega^2)$, $\cdots$, $F_r(\omega^{r-1})$ は少なくとも超越次数が $[r/2]$ の体を生成する事を示した。（ω が超越数の場合は，そうでない場合より評価が半分程度に悪くなっているが，この様な事情は指数関数などでも同様であり，これを改良するのは現状では非常に困難である。）

これらの研究により，天羽雅昭はマーラー型の関数の特殊値の超越測度およびそれらの特殊値の間の代数的独立性の研究に関し大きな寄与を行った。

この事は，天羽雅昭が独立して研究活動を行うに必要な高度な研究能力と優れた学識を有する事を示している。

よって，天羽雅昭提出の本論文は，理学博士の学位論文として合格と認める。