氏名・（本籍）	吉（よし） 岡（おか） 正（まさ） 典（のり）
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	理博第１３８９号
学位授与年月日	平成６年９月21日
学位授与の要件	学位規則第４条第１項該当
研究科，専攻	東北大学大学院理学研究科 （博士課程）数学専攻
学位論文題目	Polarizes algebraic surfaces of low degrees with respect to the delta-genus （デルタ種数に較べ低次数の偏極代数曲面）
論文審査委員	（主査） 教　授　小田忠雄　　教　授　森田康夫 助教授　石田正典

論文内容要旨

偏極多様体というのは完備な代数多様体Mとその上の豊富な因子Lの組（M, L）のことである。これは射影空間に埋め込まれた代数多様体の拡張であり，代数多様体Mと，Lの定める射影空間への有理写像とを組にして考えようというものである。1970年代前半以来，藤田隆夫氏によりデルタ種数，断面種数，梯子段および梯子の諸概念が定義され，これらを用いた偏極多様体の新たな分類理論が始まった。

デルタ種数が小さい偏極多様体の分類は，藤田氏によるデルタ種数が0の偏極多様体の分類に始まる。

デルタ種数が0の偏極多様体は射影空間とその超平面，二次超曲面とその超平面切断，スクロール，2次元射影空間とその上の二次曲線，および，それらの上の錐とその超平面切断であることがわかっている。

デルタ種数が1の偏極多様体の分類では，梯子段が活躍し，高次元の偏極多様体の問題が，低次元の偏極多様体の問題に帰着されるという方針の議論がなされる。このとき梯子の存在を保証するのが次の十分条件（藤田の埋め込み定理）である。

定理（藤田）　偏極多様体（M, L）の線形系$|L|$の基点集合が有限であり，かつ$g(M, L) \geq \Delta(M, L)$であれば次が成り立つ。

(1) $L^n \geq 2\Delta(M, L) - 1$ならば正則な梯子段を持つ。

(2) $L^n \geq 2\Delta(M, L)$ならば$|L|$は基点を持たない。

(3) $L^n \geq 2\Delta(M, L) + 1$ならば$L$は非常に豊富である。

さて，もっとデルタ種数の高い偏極多様体の分類を考えるとき，任意の偏極多様体に手をつける前に何か極端な性質を持っていそうな偏極多様体の分類・構成を考えることが有効であろう。このような偏極多様体として先の定理の(1)，(2)，(3)の不等式において等号をみたす偏極多様体を取り上げる。実際，藤田氏は(2)の場合の分類を完成させ，Lによって定まる写像が像に双有理な場合とデルタ種数0の偏極多様体の分岐二重被覆になっている場合の2つがあることを示し，後者については分岐集合の分類も行なった。

次に(1)の等号が成り立つ偏極多様体を取り上げる。上の定理からわかるように，この場合は線形系$|L|$の基点集合が必ずしも空であるとは限らず，Lによって定まる有理写像は不確定点を持ち得る。しかし仮に不確定点を持ったとしても高々1点であり，しかもその不確定点を中心とする1回のブローアップによって除去可能である。このときLの固有変換$\widetilde{L}$によって定まる有理写像は不確定点を持たず，像に双有理であるか一般的に2対1であるかのいずれかである。また後者の場合は，像のデルタ種数は0である。しかし固有変換$\widetilde{L}$が必ずしも豊富ではないため，この写像は必ずしも有限写像ではない。

さて先のブローアップによりMから得られた多様体を$\widetilde{M}$であるとすると，偏極多様体の類似物（準偏極多様体）（$\widetilde{M}$, $\widetilde{L}$）が得られる。これは$g(\widetilde{M}, \widetilde{L}) > \Delta(\widetilde{M}, \widetilde{L})$かつ$\widetilde{L}^n = 2\Delta(\widetilde{M}, \widetilde{L})$

をみたし，(2)の等式をみたす偏極多様体の拡張になっている。このことは藤田氏によって「偏極多様体の問題」の中で指摘された。

結局，(1)の等式を満たす場合には次の2通りの場合のみが可能である。(i) L により定まる有理写像が像に双有理になっている場合。(ii) L による有理写像が1点の不確定点を持ち $\widetilde{L}$ により定まる写像が一般的に2対1になる場合。

また（M, L）のデルタ種数が1および2の場合は藤田氏により分類されている。

以上の背景のもとに，本論文では(ii)の場合の分類・構成をおこなう。すなわち，(1)の不等式の等号をみたす偏極多様体のうち，線形系 $|L|$ が基点を持ち，L の固有変換 $\widetilde{L}$ によって定まる写像が一般的に2対1になっている偏極代数曲面の分類および構成をおこなう。藤田氏によって分類・構成された自己交点数3かつデルタ種数2の偏極多様体のうちの曲面の場合を，高いデルタ種数の偏極曲面に拡張するのが目標である。本論文の前半では，デルタ種数3の偏極多様体を取り上げ，後半ではデルタ種数が4以上の偏極多様体を取り上げる。前半後半ともに分類・構成の方法はほとんど同じなのでまとめて述べる。

分類・構成の方針は藤田氏が分類・構成した L の自己交点数3かつデルタ種数2の偏極多様体の場合に習ったものである。すなわち，$\widetilde{L}$ によって定まる一般的に2対1の写像の有限ではない部分つまり一点に潰れる曲線の特徴づけを行ない，次にその潰れていった像の点を中心にブローアップをおこない，ブローアップのユニバーサリティによって持ち上げる。するとそれは2対1の有限写像である。よって $\widetilde{M}$ および $\widetilde{L}$ の分類はこの2対1の有限写像の分岐集合の分類に帰着する。この有限写像の像のピカール群は既知であるから，分岐集合を具体的に求めることができる。また，それらの分岐集合はベルチニの定理により非特異であることもわかり，このような偏極多様体の存在が証明される。

証明の方針の詳細は次の通りである。デルタ種数2の偏極多様体の場合には $\widetilde{L}$ によって定まる写像の像は2次元射影空間とその超平面である。またデルタ種数が高い偏極多様体の場合の像は射影平面ではないがデルタ種数は0である。

したがってデルタ種数0の偏極多様体の分類から，像が非特異である場合は射影直線上のスクロール，また特異点を持つ場合は非特異有理曲線上の錐と超平面切断の組であることがわかる。よって堀川頴二氏がネーター直線上の一般型代数曲面を研究するときに用いた方法を用いて特異点を解消することができる。このとき特異点解消は射影直線上のスクロールになり，また $\widetilde{M}$ からそのスクロールへの自然な写像も同時に作ることができる。

よってどちらにしろ $\widetilde{M}$ から射影直線上のスクロールへの写像を得ることができる。つまり $\widetilde{M}$ は射影直線上のスクロールの一般的に2対1の必ずしも有限ではない分岐被覆である。

次に有限な分岐二重被覆を用いて分類するには $\widetilde{M}$ から既知の多様体への2対1の有限写像をつくることが必要である。この論文ではスクロール上の何点かを中心とするブローアップによって得られた多様体への $\widetilde{M}$ からの有限写像を作った。そのためには $\widetilde{M}$ からスクロールへの写像によって一点に潰れる曲線を調べることが必要である。

幸いなことに，これらの曲線は $|L|$ の基点を中心とするブローアップによって $\widetilde{M}$ 上に現われる例外曲線 E によって統制される。すなわち $\widetilde{M}$ からスクロールへの写像によって一点に潰れる被約既約な曲線と E との交点数は1である。$\widetilde{M}$ からスクロールへの写像における E の像を G とする。すると，一点に潰れる曲線は G 上に潰れる。よって一点に潰れる曲線は G の逆像のみに含まれ，それ以外には無いことがわかる。よって $\widetilde{M}$ からの有限写像を作るには，G および G の逆像について調べればよいことがわかる。

藤田によって上の議論がなされたのはデルタ種数2の偏極多様体の場合についてのみであったが，ここにデルタ種数が高い偏極多様体の場合に拡張される芽があったと言える。

これで曲面の場合の分類は終るが，高次元の偏極多様体の場合，また L が豊富ではない場合等の問題が残されている。また環境空間として射影空間のみではなく，その拡張であるトーリック多様体を用いたらどうか，また堀川氏が5次曲面の変形において観察した現象が L の自己交点数5かつデルタ種数3の偏極多様体においても観察されるか等も，今後に残された研究課題である。

論文審査の結果の要旨

偏極代数多様体の理論は，完備な代数多様体と，その上の豊富な因子との組を考察するものであり，代数幾何学における重要な研究課題の一つとして，古くから数々の研究成果が挙げられてきた。特に，藤田隆夫氏が1970年代に理論を整備して以来の，分類や構成に関する研究成果には，目覚ましいものがある。

偏極の次数が，藤田の意味のデルタ種数に較べて極端に低い極限状態の場合には，数々の興味ある特異現象の起こることが予測される。本論文は，最も基本的である２次元の場合に，そのような極限状態にある偏極代数多様体を考察し，それらの分類・構成に関する新知見を得ている。

デルタ種数が０，１，２の場合には，一般次元での藤田氏による分類が完成済みであるので，本論文ではデルタ種数が３以上の場合のみを考察の対象とするのであるが，偏極の次数とデルタ種数との関係が上記の極限状態にある場合，偏極に対応する有理写像は双有理となるか，あるいは２対１であって１個の不定点を持つかのいずれかである。前者の場合は取扱いが極めて困難であり，未解決問題として今後に残された研究課題である。本論文では，後者の場合に，分類・構成問題を完全に解決している。後者の場合，２対１写像による像のデルタ種数が０となり，藤田氏の研究により，その素性がよく分かるのが成功の原因の一つである。

本論文における分類・構成の手法は，基本的には藤田氏によるデルタ種数２以下の場合の手法の延長線上にあるが，デルタ種数３以上の場合には，考察すべき場合分けの数が極端に増加する。それらの各々の場合に，２対１写像の像として得られる代数曲面の幾何学と，不定点のブローアップ等により得られる代数曲線の幾何学的構造を着実に解析することによって初めて分類が完了するのである。

さらに，分類した各々の場合について，実際にそのような性質を持つ偏極代数曲面を構成することにより存在を確認するというかなりの工夫を要する作業にも，本論文は見事に成功している。

以上，本論文で得られている諸結果と，そのために編み出した数々の工夫は偏極代数多様体理論において重要な寄与をしたものであり，著者が自立して研究活動を行うに必要な高度の研究能力およびその基礎となる豊かな学識を有することを示している。よって，吉岡正典提出の論文は博士（理学）の学位論文として合格と認める。