氏名・(本籍)	竹(たけ) 内(うち) 照(てる) 雄(お)
学位の種類	博　士（理　学）
学位記番号	理第1046号
学位授与年月日	平成6年9月21日
学位授与の要件	学位規則第4条第2項該当
最終学歴	昭和48年4月 東北大学大学院理学研究科 博士課程数学専攻退学
学位論文題目	GENUS FIELDS, CENTRAL EXTENSIONS, THE HASSE NORM PRINCIPLE MODULO $\mathfrak{m}$ AND A GENRALIZATION OF A THEOREM OF FROHLICH （$\mathfrak{m}$を法とするジーナス体，中心拡大，ハッセノルム原理とフレーリッヒによる1定理の拡張）
論文審査委員	（主査） 教　授　森田康夫　　教　授　小田忠雄 教　授　高橋豊文 教　授　内田興二

論　文　目　次

論 文 内 容 要 旨

ℓを素数とする。1954年 A. Fröhlich は“On Fields of class two”と題する論文で，狭義のジーナス体と一致するようなℓ巾アーベル体の，狭義の中心拡大のガロア群の構造を，生成系とその関係式によって決定した。彼はこの理論の重要な応用の1つとして，続く同年の論文で，ℓ巾アーベル体で狭義の類数がℓと素になるような体を，具体的計算可能な条件を用いて決定した。これらの結果は彼の1983年の著書“Central Extensions, Galois Groups, and Ideal Class groups of Number Fields”において，より現代的な方法で再証明されている。

これらの結果に関連して，S. V. Ullom と S. B. Watt は1988年，虚2次体上のℓ巾アーベル拡大で類数がℓと素になるような体の決定について同様の結果を証明した。これは類数の可除性についての Fröhlich の結果の虚2次体への拡張と見られるが，証明方法は Fröhlich のものとは異なる。彼らの証明はナンバーノットの性質に基づいており，中心拡大のガロア群の具体的な生成系についての性質を使わず，Fröhlich の証明と比べると，同じ中心拡大の理論の範囲のものであるが，かなり直接的なものとなっている。

この論文の主要な目的の1つは，ℓ巾アーベル体で狭義の類数がℓと素になるような体の決定に関する Fröhlich の結果を，一般有限次代数体上の結果へと拡張することにある。Ullom と Watt の虚2次体上での証明は，Fröhlich の有理数体上での証明と比べ，より直接的であるので，本論ではこの問題を Fröhlich の方法ではなく，Ullom と Watt の議論を一般化することによって扱う。

Fröhlich や Ullom と Watt の結果は，正の単数群が自明であるという有理数体や虚2次体の特有の性質に本質的に依存しており，これらの結果を有理数体や虚2次体以外の体に拡張することは，このままの形ではもはや出来ない。このことについて，有理数体上で$\ell = 2$の場合は，この結果が狭義の類数の結果になっていることに注目して，一般の場合は，更により狭義な類数，即ち適当な法$\mathfrak{m}$に関するレイ類数についての結果として定式化を行う。狭義の類数は無限素点を法とするレイ類数であり，これは自然な拡張と見られる。

Fröhlich や Ullom と Watt が使った理論は主に中心拡大の理論であるが，中心拡大の理論はその基礎理論としてのジーナス理論にも依存している。このことから，$\mathfrak{m}$を法とするジーナス理論および中心拡大の理論を展開する必要がある。基礎体のモデュラス$\mathfrak{m}$をもとにした，$\mathfrak{m}$を法とするこれらの理論は従来より余り行われていない。そこでこの論文では，この観点から，ガロワ拡大の$\mathfrak{m}$を法とするジーナス理論及び中心拡大の理論をかなり一般的に論ずる。基礎体での法$\mathfrak{m}$をもとにした視点からのジーナス理論及び中心拡大の理論の基本的性質を示すのも，この論文の目的の1つである。そしてそれら結果の応用として，ハッセノルム原理について論じ，Fröhlich の結果の拡張を行う。

第1節では$\mathfrak{m}$を法とするジーナス理論を主にジーナス群の構造に焦点をあて論ずる。1．1では大域体への準備として局所体でのノルム群の性質を論ずる1．2では大域体を扱い，$\mathfrak{m}$を法と

するジーナス理論を展開する。ここでは基礎体kの1つのモデュラス$\mathfrak{m}$を固定して，$\mathfrak{m}$からハッセ関数を用いて自然な方法で，kの拡大体Kへの$\mathfrak{m}$の持ち上げモデュラス$\mathfrak{m}^*$を定義する。そしてその拡大体Kの$\mathfrak{m}^*$を法とするジーナス群の構造について論ずる。第1節での主結果はジーナス群の階数公式と言える定理1．1である。定理1．1ではある条件の下で，K／kのジーナス群の構造を，その階数を$\mathfrak{m}$を法とするkのイデール類群，K／kで分岐する素点の分岐群，K／kでのノルムから得られる群で記述することで，決定している。このジーナス群の階数公式を用いると，従来から知られていたジーナス数公式が系として導かれる。

第2節では1953年H. W. Leopoldtによって証明された有理数体上のジーナス理論における基本的定理の一般的について論ずる。このLeopoldtの定理はアーベル体の狭義のジーナス体は素巾導手を持つアーベル体の合成体になることを主張している。Fröhlichの結果は中心拡大に関するものであるが，これはℓ巾アーベル体で狭義の類数がℓと素になるような体の決定が，狭義のジーナス体と一致する体に限定してよいことに由来する。そしてこの限定を可能にするのが，上述のLeopoldtの定理であり，Fröhlichの結果を一般化する場合，このLeopoldtの定理をも一般化する必要がある。このLeopoldtの定理もまた有理数体での正の単数が自明になるということに依存していて，このままの形での一般化は有理数体でのものよりも弱い結果にならざるを得ない。Fröhlichの結果の一般化には精密な形でのLeopoldtの定理の一般化が必要であり，そのために$\mathfrak{m}$を法とするジーナス理論が必要になる。定理2．1では，ある種の条件を満たす$\mathfrak{m}$を法とするジーナス体について，Leopoldtの定理が精密な形で一般化されることを示す。そして定理2．2ではそのような条件を満たす$\mathfrak{m}$が比較的弱い条件の下で，確かに存在することを示す。

第3節では$\mathfrak{m}$を法とする中心拡大について，一般的な状況のもとで論ずる。ジーナス体と中心拡大との差が，ナンバーノットを用いて表現されるという中心拡大の理論での基本的結果があるが，3．1では$\mathfrak{m}$を法とする中心拡大について，このことを示す。さらに，これに関連して，$\mathfrak{m}$を法とするハッセノルム原理の定義を行い，レイ類数との関連を考察する。特に，ジーナス体と一致する体ではレイ類数とハッセノルム原理とは密接な関係があることを示す。3．2ではある条件を満たす$\mathfrak{m}$を法とするハッセノルム原理の成立条件をより具体的な形に表すことを論ずる。特に，定理3．3はアーベル拡大の場合にハッセノルム原理の成立条件が分岐する素点の分解群の2次外積によって表現されることを示す。これらの結果はM. Razarの1977年の結果の$\mathfrak{m}$を法とする理論への拡張を与えている。

第4節ではハッセノルム原理とFröhlichの結果の一般代数体への拡張について論ずる。D. Grabanatiは1978年の論文で，ハッセノルム原理と類数のℓ-可除性との間に密接な関係があることを指摘し，ハッセノルム原理を満たすアーベル体の決定をFröhlichの結果を用いて行った。ハッセノルム原理と類数のℓ-可除性との密接な関係を考慮すると，Leopoldtの定理を用いて，ハッセノルム原理の結果からFröhlichの結果を導くことが出来る。虚2次体ではLeopoldtの定理は有理数体の場合と同様にそのまま成立するので，この観点からすると，UllomとWattの議論は類数のℓ-可除性についての議論と言うよりむしろハッセノルム原理の成立の具体的条件に

ついての結果と見ることも出来る。４．１では$\mathfrak{m}$を法とする素巾導手の初等ℓ-アーベル体の合成体に定理３．３を適用する。そしてこの場合，ハッセノルム原理の成立条件を具体的に計算することにより，ハッセノルム原理の成立するそれらの型の体を決定する。４．２ではこの結果と第２節の結果を用いてFröhlichの結果が一般代数体へと拡張出来ることを示す。この結果は，特別な場合として，FröhlichやUllomとWattの結果を含んでいる。

論文審査の結果の要旨

1954年 A. Fröhlich は，素数ℓを固定したとき，有理数体のアーベル的ℓ-拡大で，その類数がℓと素な拡大体Lを，Lで分岐する素数の間に成り立つ合同式を使って特徴づけた。

1988年 S. V. Ullom と S. B. Watt は虚二次体Kの上で対応する問題を取り上げ，Kのアーベル的ℓ-拡大Lの類数h_Lがℓと素なのは，Lの最大中心拡大のL上の拡大次数がℓと素となることが必要かつ十分であることに注目し，最大中心拡大（central extensim）および genus field の性質を類体論を使って調べることにより，対応する結果を得た。

竹内照雄は，一般の代数体K上で，Fröhlich の定理の拡張を研究し，以下の結果を得た。

$\mathfrak{m}$をKの整イデアルとし，LをKのアーベル的ℓ-拡大する。このとき，Lの類数（class number）の拡張として，mod $\mathfrak{m}$の ray class number h(L, $\mathfrak{m}$) が定義される。同極にL／Kの mod $\mathfrak{m}$の genus field G(L／K, $\mathfrak{m}$) とL／Kの mod $\mathfrak{m}$の（最大）central extension Z(L／K, $\mathfrak{m}$) が定義される。竹内は，これらLの2つの拡大に対し，その拡大次数をh(L, $\mathfrak{m}$) 等で表す公式を得た。これは，$\mathfrak{m}=\{1\}$ の場合には，良く知られた結果である。

次に竹内は，アーベル的ℓ-拡大L／Kに対して mod $\mathfrak{m}$の Hasse の原理，および単数に関する mod $\mathfrak{m}$の Hasse の原理の2つを定義し，mod $\mathfrak{m}$の Hasse の原理が成り立つための必要十分条件は，Z(L／K, $\mathfrak{m}$)＝G(L／K, $\mathfrak{m}$) と単数に関する mod $\mathfrak{m}$の Hasse の原理が成り立つことであることを証明した。さらに拡大次数［G (L／K, $\mathfrak{m}$):L］がℓと素な場合には，L／Kに対し mod $\mathfrak{m}$の Hasse の原理が成り立つための必要十分条件は，ray class number h(L, $\mathfrak{m}$) がℓと素で，かつL／K対し単数に関する Hasse の原理が成り立つことであることを証明した。これより，［G(L／K, $\mathfrak{m}$) : L］がℓと素かつ Hasse の原理が成り立つL／Kを構成することにより，ray class number h(L, $\mathfrak{m}$) がℓと素なLが作れることがわかる。

さらに竹内は，L／Kが mod $\mathfrak{m}$で素べき導手を持つ elementary abelian ℓ-extensions の有限個の合成体となる場合に，L／Kにおいて単数に関する mod $\mathfrak{m}$のHasse の原理が成り立つという仮定のもとで，ray class number h(L, $\mathfrak{m}$) がℓと素となるのは，L／K自身が mod $\mathfrak{m}$で素べき導手を持つ elementary abelian ℓ-extension となる場合など，Fröhlich や Ullom-Watt の結果に対応する三つの場合，その場合に限ること，およびこれらの三つの場合にはh(L, $\mathfrak{m}$) がℓと素となることを証明した。

また竹内は，ここに出て来たL／Kが mod $\mathfrak{m}$で素べき導手をもつ elementary abelian ℓ-extensions の合成体となるための$\mathfrak{m}$が満たすべき十分条件を求め，この様な拡大L／Kがかなり沢山存在することを証明した。

竹内は以上により，h (L, $\mathfrak{m}$) がℓと素となるアーベル的ℓ-拡大を作る方法を与え，また Fröhlich および Ullom-Watt が成功した理由は，Kの単数群が有限群であるという事実に基くことを明らかにした。

以上の結果は，代数体の整数論における一流の結果であり，この結果は，竹内照雄が自立して

研究活動を行うに必要な高度な研究能力と学識を有することを十二分に証明している。よって竹内照雄提出の論文は，博士（理学）の学位論文として合格と認める。